RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

HANS PETER HEISLBETZ

Der Torsionstyp nilpotenter Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 91 (1994), p. 85-113

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__91__85_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 91 (1994)

Der Torsionstyp nilpotenter Gruppen.

HANS PETER HEISLBETZ (*)

ABSTRACT - The outher type of a torsion-free, abelian group of finite rank is a useful means to grasp important properties of this class of groups [11, Chapter 1]. This type can both be defined by means of a certain torsion quotient of the group and as the union of the types $t(G/Y_i)$ for a set $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ of subgroups such that G/Y_i is rational and the intersection $\bigcap_i Y_i$ is trivial. It is shown in Chapter 5, that for torsion-free nilpotent groups of finite rank only the first definition leads to an invariant type. This type is called torsion type, because it is defined via torsion intervalls (Chapter 3). A lot of properties of the torsion type are proofed in Chapter 4: For example, there is a connection between the torsion-types of G/Z_{k-1} and Γ_k; also a formula for the torsion type of the group UN where U is a subgroup and N is a normal subgroup of a nilpotent group of finite torsion-free rank is shown. The commutator formulas (Chapter 2) which play an important role in the proofs, are also interesting for themselves.

1. Allgemeine Bezeichnungen und Definitionen.

Die hier angegebenen Sätze werden im folgenden benutzt, ohne eigens darauf zu verweisen.

1) Wie üblich bezeichnen $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N}^+$, $\boldsymbol{N}_0$, $\boldsymbol{Q}$ die ganzen, positiven ganzen, nicht-negativen ganzen, rationalen Zahlen und $\boldsymbol{P}$ die Primzahlen.

2) Wenn U eine Untergruppe der Gruppe G ist, schreiben wir $U \leq G$ und $U < G$, wenn U eine echte Untergruppe ist. Für eine Gruppe G mit Untergruppe U bezeichnet $\mathrm{N}(U)$ den *Normalisator* von U und $\mathrm{Z}(G)$ das *Zentrum* von G.

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität Würzburg, Am Hubland, D-W-8700 Würzburg, Germany.

3) Eine Gruppe heißt *R-Gruppe*, wenn für jede natürliche Zahl n und alle Gruppenelemente x, y die Implikation

$$x^n = y^n \Rightarrow x = y$$

gilt. Jede R-Gruppe ist torsionsfrei und jede torsionsfreie, lokal nilpotente Gruppe ist eine R-Gruppe nach [1, 13.6].

4) Für eine Untergruppe U einer Gruppe G heißt die Menge

$$\sqrt{U} := \{g \in G \mid \exists_{n \in N^+} g^n \in U\}$$

Isolator von U. Die Untergruppe U heißt *isoliert*, wenn $\sqrt{U} = U$ gilt. Die Gruppe G hat die *Isolatoreigenschaft*, falls für jede Untergruppe U die Menge $\sqrt{U}$ auch eine Untergruppe ist. Wir schreiben $U \leqslant_* G$, falls U eine isolierte Untergruppe von G und $U \lhd_* G$, falls U ein isolierter Normalteiler von G ist. Lokal nilpotente Gruppen haben die Isolatoreigenschaft nach [4, 4.5]. Alle Glieder der oberen Zentralreihe einer R-Gruppe sind isoliert und die zugehörigen Faktorgruppen sind R-Gruppen nach [1, 13.4].

5) Mit dem *Rang* $\mathrm{rg}(G)$ einer Gruppe G ist stets der *Prüferrang* gemeint.

6) Für Elemente x und y einer Gruppe ist $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ der *Kommutator* von x und y und $x^y := y^{-1}xy$ das zu *x durch y konjugierte Element*. Eine (*gewöhnlicher*) *Kommutator des Gewichts* $\geqslant 1$ wird rekursiv durch die Regel $[x_1, \dots, x_i] := [[x_1, \dots, x_{i-1}], x_i]$ definiert, wobei $[x_i] := x_1$ gesetzt wird. Ein *m-facher Kommutator* von Elementen einer Teilmenge X einer Gruppe wird rekursiv wie folgt definiert: Ein 1-facher Kommutator ist ein Element aus X, ein m-facher Kommutator ist ein Element der Form $[g, h]$, wobei g ein i-facher Kommutator, h ein j-facher Kommutator ist und $i + j = m$ gilt [11, p. 43f], [2, p. 13].

7) Für eine Gruppe H ist $(\gamma_i H)_{i \in N^+}$ mit $\gamma_1 H = H$, $\gamma_{i+1} H = [\gamma_i H, H]$ für $i \geqslant 1$ die *obere Zentralreihe* von H und $(\zeta_i H)_{i \in N}$ mit $\zeta_0 = 1$, $\zeta_{i+1} H/\zeta_i H = \mathrm{Z}(H/\zeta_i H)$ für $i \geqslant 0$ die *obere Zentralreihe* von H. Anstelle von $\gamma_2 H$ scheiben wir auch H'. Die Gruppe H heißt nilpotent der Klasse c, wenn $\gamma_c H \neq 1$ und $\gamma_{c+1} H = 1$. Für eine Gruppe G schreiben wir anstelle von $\gamma_i G$ auch Γ_i und anstelle von $\zeta_i G$ auch Z_i. Es gelten die Beziehungen

$$[\gamma_i H, \gamma_j H] \leqslant \gamma_{i+j} H, \qquad \gamma_i(\gamma_j H) \leqslant \gamma_{ij} H, \qquad [\gamma_i H, \zeta_j H] \leqslant \zeta_{j-i} H,$$

wobei $\zeta_{j-i} H = 1$ für $j - i < 0$ gesetzt wird [10, 5.1].

2. Kommutatorformeln.

Aus einem Theorem von Hall [2, 2.3] wollen wir in diesem Kapitel für nilpotente Gruppen Darstellungen von Produkten beliebiger Potenzen von Elementen und Darstellungen von Kommutatoren herleiten, deren Einträge beliebige Potenzen von Elementen sind. Diese Formeln sind für einige der Beweise in Kapitel 4 wesentlich, aber auch für sich genommen von Interesse.

In 2.1 bis 2.3 beweisen wir zunächst einfache Kommutatorformeln.

LEMMA 2.1. *Für Elemente $x_1, \dots, x_r \in \sqrt{\Gamma_i}$ und $y \in \sqrt{\Gamma_j}$ einer lokal nilpotenten Gruppe G ist*

$$[x_1 \dots x_r, y] \equiv [x_1, y] \dots [x_r, y] \bmod \sqrt{\Gamma_{i+j+1}}.$$

BEWEIS. Für $r = 1$ ist nichts zu beweisen. Sei die Aussage für r schon bewiesen. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}[x_1 \dots x_r, x_{r+1}, y] &= [x_1 \dots x_r, y][x_1 \dots x_r, y, x_{r+1}][x_{r+1}, y] \equiv \\ &\equiv [x_1, y] \dots [x_r, y][x_1 \dots x_r, y, x_{r+1}][x_{r+1}, y] \equiv \\ &\equiv [x_1, y] \dots [x_{r+1}, y] \bmod \sqrt{\Gamma_{i+j+1}},\end{aligned}$$

denn $[x_1 \dots x_r, y, x_{r+1}] \in [\sqrt{\Gamma_i}, \sqrt{\Gamma_j}, \sqrt{\Gamma_i}] \overset{(*)}{\leqslant} \sqrt{[\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_i]} \leqslant \sqrt{\Gamma_{i+j+1}}$. Nach [4, 4.6] gilt $(*)$, da G eine lokal nilpotente Gruppe ist. ∎

LEMMA 2.2. *Sei G eine lokal nilpotente Gruppe und $\mathfrak{f}(x_1, \dots, x_m)$ ein m-facher Kommutator. Für ein $i \in \{1, \dots, m\}$ sei $x_i = a_1 \dots a_n \cdot b$ mit $b \in \sqrt{\Gamma_2}$. Dann ist*

$$\mathfrak{f}(x_1, \dots, x_m) \equiv \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, a_j, x_{i+1}, \dots, x_m) \bmod \sqrt{\Gamma_{m+1}}.$$

BEWEIS DURCH INDUKTION. Für $m = 1$ ist $\mathfrak{f}(x_1) = x_1 = a_1 \dots a_n \cdot b \equiv \mathfrak{f}(a_1) \dots \mathfrak{f}(a_n) \bmod \sqrt{\Gamma_2}$. Sei die Aussage für k-fache Kommutatoren mit $k < m$ schon bewiesen. Für einen r-fachen Kommutator g und einen $(m - r)$-fachen Kommutator h ist

$$\mathfrak{f}(x_1, \dots, x_m) = [g(x_1, \dots, x_r), h(x_{r+1}, \dots, x_m)].$$

Wir können annehmen, daß $1 \leqslant j \leqslant r$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $z \in \sqrt{\Gamma_{r+1}}$, so daß

$$\mathrm{f}(x_1 \ldots, x_m) = \left[\left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{g}(x_1 \ldots, x_{i-1}, a_j, x_{i+1} \ldots, x_r)\right) z, \mathrm{h}(x_{r+1} \ldots, x_m)\right] \equiv$$

$$\equiv \left(\prod_{j=1}^{n} [\mathrm{g}(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_j, x_{i+1}, \ldots, x_r), \mathrm{h}(x_{r+1}, \ldots, x_m)]\right)[z, \mathrm{h}(x_{r+1}, \ldots, x_m)] \equiv$$

$$\overset{(*)}{\equiv} \left(\prod_{j=1}^{n} [\mathrm{g}(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_j, x_{i+1}, \ldots, x_r), \mathrm{h}(x_{r+1}, \ldots, x_m)]\right) \bmod \sqrt{\Gamma_{m+1}}\,.$$

(∗) unter Benutzung von [4, 4.6] ist

$$[z, \mathrm{h}(x_{r+1}, \ldots, x_m)] \in [\sqrt{\Gamma_{r+1}}, \Gamma_{m-r}] \leqslant \sqrt{[\Gamma_{r+1}, \Gamma_{m-r}]} \leqslant \sqrt{\Gamma_{m+1}},$$

da G eine lokal nilpotente Gruppe ist. ■

LEMMA 2.3. *Sei G eine Gruppe, $f(x_1, \ldots, x_m)$ ein m-facher Kommutator und $x_1, \ldots, x_m \in G$. Für ein i sei $x_i = a \cdot b$ mit $b \in Z_{k-1}$. Dann ist*

$$f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(x_1, \ldots, \overset{(i)}{a}, \ldots, x_m) \bmod Z_{k-m}\,,$$

wobei $Z_{k-m} = 1$ für $k - m \leqslant 0$ gesetzt wird.

BEWEIS DURCH INDUKTION NACH m. Für $m = 1$ ist $f(x_1) = x_1 = a \cdot b \equiv a = f(a) \bmod Z_{k-1}$. Sei die Aussage für ν-fache Kommutatoren mit $\nu < m$ schon bewiesen. Für einer r-fachen Kommutator g und einen $(m - r)$-fachen Kommutator h ist $f(x_1, \ldots, x_m) = [g(x_1, \ldots, x_r), h(x_{r+1}, \ldots, x_m)]$. Wir können annehmen, daß $1 \leqslant i \leqslant r$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $z \in Z_{k-r}$, so daß

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_m) &= [g(x_1, \ldots, \overset{(i)}{a}, \ldots, x_r) \cdot z, h(x_{r+1}, \ldots, x_m)] = \\ &= [g(x_1, \ldots, \overset{(i)}{a}, \ldots, x_r), h(x_{r+1}, \ldots, x_m)] \cdot \\ &\quad \cdot [g(x_1, \ldots, \overset{(i)}{a}, \ldots, x_r), h(x_{r+1}, \ldots, x_m), z] \cdot [z, h(x_{r+1}, \ldots, x_m)] \equiv \\ &\equiv f(x_1, \ldots, \overset{(i)}{a}, \ldots, x_m) \bmod Z_{k-m}\,. \end{aligned}$$

■

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung der Aussage, daß zyklische Erweiterungen des Zentrums abelsch sind und wird im folgenden wiederholt benutzt.

LEMMA 2.4. *Sei G eine Gruppe mit einer nilpotenten Untergruppe U der Klasse c. Dann ist UZ_k nilpotent mit Nilpotenzklasse $\leqslant \max\{c, k\}$. Insbesondere ist das Erzeugnis $\langle x, G' \rangle$ nilpotent mit Klasse $\leqslant c-1$, falls G nilpotent mit Klasse $c \geqslant 2$ ist* [2, Kapitel 0.1].

BEWEIS. Sei $m = \max\{c, k\}$ und seien $u_1, \ldots, u_{m+1} \in U$, $y_1, \ldots, y_{m+1} \in Z_k$. Dann ist

$$[u_1, y_1, \ldots, u_{m+1} y_{m+1}] \overset{2.3}{=} [u_1, \ldots, u_{m+1}] = 1$$

aufgrund der Wahl von m. Da jedes Element von $\gamma_{m+1}(UZ_k)$ ein Produkt von Kommutatoren des Gewichts $m+1$ mit Einträgen aus UZ_k ist, folgt damit die Behauptung. ■

LEMMA 2.5. *Für die Funktion*

$$F: N^+ \to N^+, \quad F(x) = x!(x-1)! \ldots 3!2! = 2^{x-1} 3^{x-2} \ldots (x-1)^2 x,$$

Elemente $x_1, \ldots, x_m$ einer nilpotenten Gruppe G der Klasse $\leqslant c$ und alle ganzen Zahlen N gilt

i) $$\exists_{z \in \langle x_1, \ldots, x_m \rangle} x_1^{NF(c)} \ldots x_m^{NF(c)} = z^N;$$

ii) $$\exists_{\tilde{z} \in \gamma_2 \langle x_1, \ldots, x_m \rangle} x_1^{NF(c)} \ldots x_m^{NF(c)} = (x_1 \ldots x_m)^{NF(c)} \tilde{z}^N.$$

BEWEIS. Wir zeigen die Behauptungen simultan durch Induktion nach c. Für $c = 1$ sind die Aussagen klar. Sei nun für eine Gruppe H der Nilpotenzklasse $\leqslant c-1$ mit Elementen $y_1, \ldots, y_k \in H$ die Aussage

$$\exists_{z \in \langle y_1, \ldots, y_k \rangle} y_1^{NF(c-1)} \ldots y_m^{NF(c-1)} = y^N$$

bereits bewiesen. Nach einem Theorem von Hall [2, 2.3] ist

$$x_1^{NF(c)} \ldots x_m^{NF(c)} = (x_1 \ldots x_m)^{NF(c)} \cdot \tau_2^{m_2}(x_1, \ldots, x_m) \ldots \tau_c^{m_c}(x_1, \ldots, x_m),$$

wobei für $k \in \{2, \ldots, c\}$ der Exponent $m_k = \binom{NF(c)}{k}$ laut Definition von F ein Vielfaches von $NF(c-1)$ und $\tau_k(x_1, \ldots, x_m) \in \gamma_k \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ ist. Für $a_1 = (x_1 \ldots x_m)^{c!}$ und Elemente $a_2, \ldots, a_c \in \gamma_2 \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ gilt also

$$(*) \qquad x_1^{NF(c)} \ldots x_m^{NF(c)} = (x_1 \ldots x_m)^{NF(c)} a_2^{NF(c-1)} \ldots a_c^{NF(c-1)},$$

$$(**) \qquad x_1^{NF(c)} \ldots x_m^{NF(c)} = a_1^{NF(c-1)} a_2^{NF(c-1)} \ldots a_c^{NF(c-1)}.$$

Da $\langle a_2, \dots, a_c\rangle \leqslant G'$ ist nach 2.4 auch $\langle a_1, a_2, \dots, a_c\rangle$ nilpotent mit Klasse $\leqslant c-1$. Die Behauptung i) folgt nun durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf (**) und ii) folgt durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf das Teilprodukt $a_2^{NF(c-1)} \dots a_c^{NF(c-1)}$ in (*). ■

LEMMA 2.6. *Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse $\leqslant c$ mit Elemente $a, b \in G$. Dann gilt für jede natürliche Zahl N*

$$\text{i)} \qquad \exists_{z \in \gamma_2\langle a, b\rangle} [a, b^{NF(c)}] = z^N ;$$

$$\text{ii)} \qquad \exists_{\tilde{z} \in \gamma_2\langle a, b\rangle} [a, b^{NF(c)}] = [a, b]^{NF(c)} \tilde{z}^N ,$$

wobei die Funktion F wie in 2.5 gewählt ist.

BEWEIS. Nach einem Theorem von Hall [2, 2.3] ist

$$[a, b^{NF(c)}] = (a^{-1}b^{-1})^{NF(c)} b^{NF(c)} =$$

$$= [a, b]^{NF(c)} \cdot \tau_2^{m_2}(a^{-1}b^{-1}a, b) \dots \tau_c^{m_c}(a^{-1}b^{-1}a, b),$$

wobei für $k \in \{2, \dots, c\}$ der Exponent $m_k = \binom{NF(c)}{k}$ ein Vielfaches von $NF(c-1)$ und $\tau_k(a^{-1}b^{-1}a, b) \in \gamma_k\langle a^{-1}b^{-1}a, b\rangle \leqslant \gamma_k\langle a, b\rangle$ ist. Insbesondere ist

$$\tau_2(a^{-1}b^{-1}a, b) = [a^{-1}b^{-1}a, b] = bb^{-1}a^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab =$$

$$= b[b, a]b^{-1}[a, b] = [b^{-1}, [a, b]] \in \gamma_3\langle a, b\rangle,$$

bzw. dazu invers oder hat den Wert 1. Für $x_1 = [a, b]^{c!}$ und Elemente $x_2, \dots, x_c \in \gamma_3\langle a, b\rangle$ gilt also

$$(*) \qquad [a, b^{NF(c)}] = [a, b]^{NF(c)} x_2^{NF(c-1)} \dots x_c^{NF(c-1)},$$

$$(**) \qquad [a, b^{NF(c)}] = x_1^{NF(c-1)} \dots x_c^{NF(c-1)}.$$

Die Behauptung i) folgt nun durch Anwendung von 2.5 i) auf (**), da $\langle x_1, \dots, x_c\rangle \leqslant G'$ nilpotent mit Klasse $\leqslant c-1$ ist und ii) folgt durch Anwendung von 2.5 i) auf das Teilprodukt $x_2^{NF(c-1)} \dots x_c^{NF(c-1)}$ in (*), da $\langle x_2, \dots, x_c\rangle \leqslant \gamma_3\langle a, b\rangle$ nilpotent mit Klasse $\leqslant c-1$ ist. ■

LEMMA 2.7. *Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse $\leqslant c$ mit Elementen $a, b \in G$ und f ein k-facher Kommutator mit $k \geqslant 2$ und Einträgen aus $\{a^{-NF(c)^k} b^{-1} a^{NF(c)^k}, b\}$, wobei die Funktion F wie in 2.5* *definiert ist. Dann ist f eine N-te Potenz eines Elementes aus* $\gamma_{k+1}\langle a, b\rangle$.

BEWEIS DURCH INDUKTION NACH k. Zur Abkürzung setzen wir $F := F(c)$. Für $k = 2$ ist f von der Form $[a^{-NF^2}b^{-1}a^{NF^2}, b]$ bzw. dazu invers oder hat den Wert 1. Wir können also ohne Einschränkung $f = [a^{-NF^2}b^{-1}a^{NF^2}, b]$ annehmen. Dann gilt

$$f = bb^{-1}a^{-NF^2}ba^{NF^2}b^{-1}a^{-NF^2}b^{-1}a^{NF^2}b =$$

$$= b[b, a^{NF^2}]b^{-1}[a^{NF^2}, b] = [b^{-1}, [a^{NF^2}, b]] \overset{2.6\mathrm{i})}{=} [b^{-1}, x^{NF}] \overset{2.6\mathrm{i})}{=} \tilde{z}^N$$

mit $z \in \gamma_2\langle a, b\rangle$ und $\tilde{z} \in \gamma_2\langle b, z\rangle \leqslant \gamma_3\langle a, b\rangle$. Sei nun die Behauptung für alle $l < k$ schon gezeigt und $f = [g, h]$ ein k-facher Kommutator mit $k \geqslant 3$ und Einträgen aus $\{a^{-NF(c)^k}b^{-1}a^{NF(c)^k}, b\}$, wobei g ein l- und h ein $(k-l)$-facher Kommutator sei und ohne Einschränkung $2 \leqslant l \leqslant k-1$ angenommen werden kann. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $g = z^{NF^{k-l}}$ für ein $z \in \gamma_{l+1}\langle a, b\rangle$. Da $h \in \gamma_{k-l}\langle a, b\rangle$ gilt

$$f = [g, h] = [z^{NF^{k-l}}, h] \overset{2.6\mathrm{i})}{=} \tilde{z}^{NF^{k-l-1}} = (\tilde{z}^{F^{k-l-1}})^N$$

für ein $\tilde{z} \in \gamma_2\langle h, z\rangle \leqslant \gamma_{k+1}\langle a, b\rangle$. ∎

LEMMA 2.8. *Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse c mit Elementen $a_1, \dots, a_t \in G$. Dann gilt für ganze Zahlen M und N und die Funktion F aus* 2.5

$$a_1^{MNF(c)^3} \dots a_t^{MNF(c)^3} = (a_1^{MF(c)^3} \dots a_t^{MF(c)^3})^N z^{NM}$$

für ein $z \in \gamma_2\langle a_1, \dots, a_t\rangle$.

BEWEIS. Zur Abkürzung setzen wir $F := F(c)$. Nach einem Theorem von Hall [2, 2.3] ist

$$a_1^{MNF^3} \dots a_t^{MNF^3} =$$

$$= (a_1^{MF^3} \dots a_t^{MF^3})^N \tau_2^{m_2}(a_1^{MF^3}, \dots, a_t^{MF^3}) \dots \tau_c^{m_c}(a_1^{MF^3}, \dots, a_t^{MF^3})$$

wobei für $k \in \{2, \dots, c\}$ der Exponent $m_k = \binom{F}{k}$ und

$$\tau_k(a_1^{MF^3}, \dots, a_t^{MF^3}) \in \langle [x_1, \dots, x_l] \,|\, l \geqslant k, \quad x_i \in \{a_1^{MF^3}, \dots, a_t^{MF^3}\}\rangle$$

ist. Nach 2.6 i) ist ein Kommutator $[x_1, \dots, x_{s-1}, u^{MF^3}]$ mit $x_1, \dots, x_{s-1} \in \{a_1^{MF^3}, \dots, a_t^{MF^3}\}$ und $y \in \{a_1, \dots, a_t\}$ eine MF^2-te Potenz eines Elementes aus $\gamma_2\langle a_1, \dots, a_t\rangle$. Daher ist jedes $\tau_k(a_1^{MF^3}, \dots, a_t^{MF^3})$

ein Produkt MF^2-ter Potenzen von Elementen aus $\gamma_2\langle a_1, \dots, a_t\rangle$ und damit nach 2.5 i) selbst eine MF-te Potenz eines Elementes aus $\gamma_2\langle a_1, \dots, a_t\rangle$. Für geeignete Elemente $y_2, \dots, y_c \in \gamma_2\langle a_1, \dots, a_t\rangle$ ist also

$$a_1^{MNF^3} \dots a_t^{MNF^3} = (a_1^{MF^3} \dots a_t^{MF^3})^N y_2^{m_2 MF} \dots y_c^{m_c MF}.$$

Wegen $m_k = \binom{N}{k}$ und $F = c!\,F(c-1)$ ist $m_k MF$ ein Vielfaches von $MNF(c-1)$. Da $\langle y_2, \dots, y_c\rangle \leqslant G'$ nilpotent mit Klasse $\leqslant c-1$ ist, ergibt 2.5 die Behauptung. ■

Lemma 2.9. *Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse $\leqslant c$ mit Elementen $a, b \in G$. Dann gilt für die Funktion F aus* 2.5 *und alle natürlichen Zahlen M und N*

i) $$\exists_{z \in \gamma_3\langle a, b\rangle} [a^{MF(c)^{c+2}}, b^N] = [a, b]^{MNF(c)^{c+2}} z^{MN};$$

ii) $$\exists_{\tilde{z} \in \gamma_2\langle a, b\rangle} [a^{MF(c)^{c+2}}, b^N] = \tilde{z}^{MN}.$$

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $F := F(c)$. Für $c = 1$ ist die Behauptung trivial und für $c = 2$ folgt sie direkt aus der Identität $[xy, z] = [x, z][y, z, y][y, z]$. Nach einem Theorem von Hall [2, 2.3] ist

$$[a^{MF^{c+2}}, b^N] = (a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}})^N b^N =$$
$$= [a^{MF^{c+2}}, b]^N \tau_2^{m_2}(a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}}, b) \dots \tau_c^{m_c}(a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}}, b),$$

wobei für $k \in \{2, \dots, c\}$ der Exponent $m_k = \binom{N}{k}$ ist und $\tau_k(a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}}, b)$ ein Produkt von Kommutatoren $[x_1, \dots, x_l]$ des Gewichts $l \geqslant k$ mit $x_i \in \{a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}}, b\}$ ist. Nach 2.7 ist dann jedes $\tau_k(a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}}, b)$ ein Produkt MF^2-ter Potenzen von Elementen aus $\gamma_3\langle a, b\rangle$ und damit nach 2.5 eine MF-te Potenz eines Elementes aus $\gamma_3\langle a, b\rangle$. Wegen $m_k = \binom{N}{k}$ ist

$$\tau_k^{m_k}(a^{-MF^{c+2}} b^{-1} a^{MF^{c+2}}, b) = y_k^{MNF(c-1)}$$

für ein $y_k \in \gamma_3\langle a, b\rangle$. Wir haben also gezeigt

$$(*) \quad \exists_{y_2, \dots, y_c \in \gamma_3\langle a, b\rangle} [a^{MF^{c+2}}, b^N] = [a^{MF^{c+2}}, b]^N y_2^{MNF(c-1)} \dots y_c^{MNF(c-1)}.$$

Nach 2.6 ii) ist

$$[a^{MF^{c+2}}, b] = [a, b]^{MF^{c+2}} w^{MF^{c+1}}$$

für eine $w \in \gamma_3\langle a, b\rangle$. Da wir nach der Bemerkung zu Beginn des Beweises $c \geqslant 3$ annehmen dürfen, ergibt 2.8

$$[a^{MF^{c+2}}, b]^N = ([a, b]^{MF^{c+2}} w^{MF^{c+1}})^N = [a, b]^{MNF^{c+2}} w^{MNF^{c+1}} \tilde{w}^{MNF}$$

für eine $\tilde{w} \in \gamma_2\langle [a, b], w\rangle \leqslant \gamma_3\langle a, b\rangle$. Zusammen mit (*) folgt hieraus die Aussage

$$\exists_{w, \tilde{w}, y_2, \ldots, y_c \in \gamma_3\langle a, b\rangle} [a^{MF^{c+2}}, b^N] =$$

$$= [a, b]^{MNF^{c+2}} w^{MNF^{c+1}} \tilde{w}^{MNF} y_2^{MNF(c-1)} \ldots y_c^{MNF(c-1)}.$$

Die Gruppe $\langle [a, b], w, \tilde{w}, y_2, \ldots, y_c\rangle \leqslant G'$ ist nilpotent mit Klasse $\leqslant c-1$. Aus der letzten Gleichung folgt durch Anwendung von 2.5 i) auf das Teilprodukt

$$w^{MNF^{c+1}} \tilde{w}^{MNF} y_2^{MNF(c-1)} \ldots y_c^{MNF(c-1)}$$

die Behauptung i) und durch Anwendung auf die ganze rechte Seite die Behauptung ii), da $F = F(c)$ ein Vielfaches von $F(c-1)$ ist. ■

Lemma 2.10. *Sei H eine nilpotente Gruppe der Klasse $\leqslant c$ mit Elementen $a_1 \in \gamma_s H$ und $a_2, \ldots, a_k \in H$. Dann gilt für alle $k \geqslant 2$ und alle natürlichen Zahlen $N_1, \ldots, N_k$*

$$\exists_{z \in \gamma_{s+k} H} [a_1^{N_1 F(c)^{(c+3)(k-1)}}, a_2^{N_2}, \ldots, a_k^{N_k}] = [a_1, \ldots, a_k]^{N_1 \ldots N_k F(c)^{(c+3)(k-1)}} z^{N_1 \ldots N_k},$$

wobei die Funktion F wie in 2.6 definiert ist.

Beweis. Wir setzen $F := F(c)$. Für $k = 2$ folgt die Aussage unmittelbar aus 2.9 i). Sei sie nun für k schon bewiesen, d.h. für alle natürlichen Zahlen $N_1, \ldots, N_k$ ist

$$[a_1^{N_1 F^{(c+3)(k-1)}}, a_2^{N_2}, \ldots, a_k^{N_k}] = [a_1, \ldots, a_k]^{N_1 \ldots N_k F^{(c+3)(k-1)}} z^{N_1 \ldots N_k},$$

für ein $z \in \gamma_{s+k} H$. Da $\gamma_{s+k} H \lhd H$ gilt damit auch

$$[a_1^{N_1 F^{(c+3)(k-1)}}, a_2^{N_2}, \ldots, a_k^{N_k}] =$$

$$= [a_1, \ldots, a_k]^{N_1 \ldots N_k F^{(c+3)(k-1)}} z^{N_1 \ldots N_k} [a_1, \ldots, a_k]^{-N_1 \ldots N_k F^{(c+3)(k-1)}} \cdot$$

$$\cdot [a_1, \ldots, a_k]^{N_1 \ldots N_k F^{(c+3)(k-1)}} =$$

$$= ([a_1, \dots, a_k]^{N_1 \dots N_k F^{(c+3)(k-1)}} z [a_1, \dots, a_k]^{-N_1 \dots N_k F^{(c+3)(k-1)}})^{N_1 \dots N_k} \cdot$$

$$\cdot [a_1, \dots, a_k]^{N_1 \dots N_k F^{(c+3)(k-1)}} =$$

$$= \tilde{z}^{N_1 \dots N_k} [a_1, \dots, a_k]^{N_1 \dots N_k F^{(c+3)(k-1)}}$$

für ein $\tilde{z} \in \gamma_{s+k} H$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$[a_1^{N_1 F^{(c+3)k}}, a_2^{N_2}, \dots, a_{k+1}^{N_{k+1}}] = [\tilde{z}^{N_1 \dots N_k F^{c+3}} [a_1, \dots, a_k]^{N_1 \dots N_k F^{(c+3)k}}, a_{k+1}^{N_{k+1}}] =$$

$$= [\tilde{z}^{N_1 \dots N_k F^{c+3}}, a_{k+1}^{N_{k+1}}]^{[a_1, \dots, a_k]^{N_1 \dots N_k F^{(c+3)k}}} [[a_1, \dots, a_k]^{N_1 \dots N_k F^{(c+3)k}}, a_{k+1}^{N_{k+1}}] \overset{2.9}{=}$$

$$\overset{2.9}{=} z_1^{N_1 \dots N_{k+1} F} [a_1, \dots, a_{k+1}]^{N_1 \dots N_{k+1} F^{(c+3)k}} z_2^{N_1 \dots N_{k+1} F} =$$

$$= [a_1, \dots, a_{k+1}]^{N_1 \dots N_{k+1} F^{(c+3)k}} z_3^{N_1 \dots N_{k+1} F} z_2^{N_1 \dots N_{k+1} F} \overset{2.5i)}{=}$$

$$\overset{2.5i)}{=} [a_1, \dots, a_{k+1}]^{N_1 \dots N_{k+1} F^{(c+3)k}} z_4^{N_1 \dots N_{k+1}},$$

wobei $z_1 \in \gamma_2 \langle \tilde{z}, a_{k+1} \rangle \leqslant \gamma_{k+s+1} H$, $z_2 \in \gamma_3 \langle [a_1, \dots, a_k], a_{k+1} \rangle \leqslant \gamma_3 \langle \gamma_{s+k+1} H, a_{k+1} \rangle \leqslant \gamma_{k+s+1} H$, $z_3 \in \gamma_{k+s+1} H$, da $\gamma_{s+k+1} H \lhd H$ und damit auch $z_4 \in \langle z_2, z_3 \rangle \leqslant \gamma_{s+k+1} H$. ■

3. Typen, Torsionsintervalle und die Definition des Torsionstyps.

Sei G eine — nicht notwendig torsionsfreie — Gruppe mit einer Untergruppe U, $x \in U$ und p eine Primzahl; dann bezeichnet $h_p^U(x)$ wie üblich die *p-Höhe* von $x \in U$ in U [3, 85]. Die *Charakteristik* von $x \in U$ in U ist $\chi^U(x) := (h_p^U(x) \mid p \in \boldsymbol{P})$. Analog wie in [3, 85] sprechen wir von *Typen, homogenen Gruppen* und verwenden die dortigen Verknüpfungen für Charakteristiken und Typen. Für eine Charakteristik χ ist $\bar{\chi}$ der Typ, der χ enthält. Für eine natürliche Zahl $k \in \boldsymbol{N}_0$ und eine Charakteristik $\chi = (n_p \mid p \in \boldsymbol{P})$ mit zugehörigem Typ $t = \bar{\chi}$ ist $k\chi = (kn_p \mid p \in \boldsymbol{P})$ und $kt = \overline{k\chi}$. Es gilt $(k\chi)(l\chi) = (k + l)\chi$ und $(kt)(lt) = (k + l)t$ für Zahlen $k, l \in \boldsymbol{N}_0$.

Eine natürliche Zahl n ist ein *Teiler der Charakteristik* $\chi = (n_p \mid p)$, i.Z. $n \mid \chi$, wenn $l_p \leqslant n_p$ für die Primfaktorzerlegung von $n = \prod_p p^{l_p}$ gilt.

Für eine Gruppe G mit Untergruppen $A \geqslant B$ ist $[A : B]$ ist ein *Torsionsintervall*, wenn es für jedes $a \in A$ eine natürliche Zahl n gibt, so daß $a^n \in B$ gilt. Dem Torsionsintervall $[A : B]$ wird eine Charakteristik

$\chi[A:B]$ zugeordnet, nämlich die kleinste, für die gilt

$$\forall_{a \in A} \exists_{n|\chi} a^n \in B .$$

Diese Definition ist von entscheidender Bedeutung für die Definition des Torsionstyps. Der Beweis des folgenden Lemmas ist trivial.

LEMMA 3.1. *Für Untergruppen* $A \geqslant B \geqslant C$ *ist* $[A:C]$ *genau dann ein Torsionsintervall, wenn* $[A:B]$ *und* $[B:C]$ *Torsionsintervalle sind. Für die zugehörigen Charakteristiken gilt* $\chi[A:B] \cup \chi[B:C] \leqslant \chi[A:C] \leqslant \leqslant \chi[A:B]\chi[B:C]$.

Falls C *zusätzlich ein Normalteiler von* A *ist, ist* $[A:B]$ *genau dann ein Torsionsintervall wenn* $[A/C:B/C]$ *ein Torsionsintervall ist und falls eines der Intervalle ein Torsionsintervall ist, gilt* $\chi[A:B] = = \chi[A/C:B/C]$. ■

Eine Gruppe G hat *endlichen torsionsfreien Rang*, wenn sie eine Reihe besitzt, deren Faktoren Torsionsgruppen oder unendlich zyklisch sind.

LEMMA 3.2. *Eine lokal nilpotente Gruppe* G *hat genau dann endlichen torsionsfreien Rang, wenn es eine endlich erzeugte Untergruppe* $U \leqslant G$ *mit* $\sqrt{U} = G$ *gibt.*

BEWEIS. Sei $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n$ eine Reihe, deren Faktoren unendlich zyklisch oder Torsionsgruppen sind. Seien $1 \neq x_i G_{i-1} \in \in G_i/G_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ beliebig gewählt. Dann folgt $\sqrt{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle} = G$ induktiv. Sei nun umgekehrt U eine endlich erzeugte Untergruppe einer lokal nilpotenten Gruppe G mit $\sqrt{U} = G$. Die Menge $\operatorname{tor}(G)$ der Torsionselemente von G ist ein Normalteiler von G, da G die Isolatoreigenschaft hat und nach [6, 2.2, 2.6] hat $G/\operatorname{tor}(G) = = \sqrt{(U \operatorname{tor}(G))/\operatorname{tor}(G)}$ eine Reihe, bestehend aus lauter rationalen Gruppen. Diese läßt sich aber zu einer Reihe bestehend aus Torsionsgruppen und unendlich zyklischen Gruppen verfeinern. Da $\operatorname{tor}(G)$ sowieso eine Torsionsgruppe ist, hat G endlichen torsionsfreien Rang. ■

Sei nun G eine nilpotente Gruppe von endlichen torsionsfreiem Rang, U eine endlich erzeugte Untergruppe von G mit $\sqrt{U} = G$. Dann ist

$$\operatorname{TTP}(G) := \overline{\chi[G:U]}$$

der *Torsionstyp* von G. Insbesondere gilt $\mathrm{TTP}(1) = t(\boldsymbol{Z}) = 0$. Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A von endlichem Rang ist $\mathrm{TTP}(A) = \mathrm{OT}(A)$, dem äußeren Typ von A (vergleiche [8, 4] und Kapitel 5). Für den Beweis der Invarianz des Torsionstyps, (siehe 3.4), benötigen wir

LEMMA 3.3. *Sei $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe und H eine Untergruppe von G, so daß $x_1^k, \dots, x_n^k \in H$ für eine natürliche Zahl k. Dann ist der Index $[G:H]$ endlich, also $\chi[G:H] \in t(\boldsymbol{Z})$.*

BEWEIS. Sei c die Nilpotenzklasse von G. Für $c = 1$ ist die Aussage klar. Als Induktionsvoraussetzung sei angenommen, daß $[G:H\gamma_c(G)]$ endlich ist.

$\gamma_c(G) = \langle [z_1, \dots, z_c] \mid z_i \in \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Für beliebige $z_1, \dots, z_c \in \{x_1, \dots, x_n\}$ ist $[z_1, \dots, z_c]^{k^c} = [z_1^k, \dots, z_c^k] \in \gamma_c(H)$. Daher ist der Exponent von $\gamma_c(G)/\gamma_c(H)$ endlich. Da $\gamma_c(G)$ endlich erzeugt ist, ist also $\gamma_c(G)/\gamma_c(H)$ endlich. Mit $[\gamma_c(G):\gamma_c(H)]$ ist auch der Index $[\gamma_c(G):\gamma_c(G) \cap H] = [H\gamma_c(G):H]$ endlich. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $[G:H] = [G:H\gamma_c(G)][H\gamma_c(G):H]$ endlich. ∎

SATZ 3.4. *Der Torsionstyp ist eine Invariante für nilpotente Gruppen von endlichem torsionsfreiem Rang.*

BEWEIS. Seien U, V endlich erzeugte Untergruppen einer nilpotenten Gruppe G von endlichem torsionsfreiem Rang mit $\sqrt{U} = \sqrt{V} = G$. Da G die Isolatoreigenschaft hat, gibt es für jedes beliebige $g \in G$ natürliche Zahlen r, s mit $g^r \in U$ und $g^s \in V$. Daher ist $g^{rs} \in U \cap V$ und es folgt $\sqrt{U \cap V} = G$. Es genügt nun zu zeigen, daß $\chi\overline{[G:U]} = \chi\overline{[G:U \cap V]}$. Offensichtlich ist $\chi\overline{[G:U]} \leq \chi\overline{[G:U \cap V]}$. Da U endlich erzeugt ist, ist es nilpotent und $U \cap V$ ist auch endlich erxeugt. Nach 3.3 ist $\chi[U:U \cap V] \in t(\boldsymbol{Z})$ und damit gilt $\chi\overline{[G:U \cap V]} \leq \chi\overline{[G:U]} \cdot \chi\overline{[U:U \cap V]} = \chi\overline{[G:U]}$ nach 3.1. ∎

4. Eigenschaften des Torsionstyp.

Das folgende Lemma werden wir wiederholt benötigen.

LEMMA 4.1. *Sei G eine nilpotente Gruppe von endlichem, torsionsfreiem Rang mit einer Untergruppe U und einem Normalteiler N.*

Dann ist

$$\mathrm{TTP}\left(\frac{UN}{N}\right) \leqslant \mathrm{TTP}(G).$$

Insbesondere gilt für $1 \leqslant V \lhd_* U \leqslant G$ *mit* $1 \neq U/V \overset{\sim}{\leqslant} \boldsymbol{Q}$ *die Aussage* $t(U/V) \leqslant \mathrm{TTP}(G)$.

BEWEIS. Seien $x_1, \dots, x_n \in G$, so daß $[G:\langle x_1, \dots, x_n\rangle]$ ein Torsionsintervall ist. Mit $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ ist auch $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \cap U$ endlich erzeugt und es gibt $z_1, \dots, z_m \in U$, so daß $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \cap U = \langle z_1, \dots, z_m\rangle$. Für jedes $u \in U$ gibt es ein $n \mid \chi[G:\langle x_1, \dots, x_n\rangle]$ mit $u^n \in \langle x_1, \dots, x_n\rangle \cap U$. Daher ist $[U:\langle z_1, \dots, z_m\rangle]$ ein Torsionsintervall und es gilt $\chi[U:\langle z_1, \dots, z_m\rangle] \leqslant \chi[G:\langle x_1, \dots, x_n\rangle]$. Weiter gilt

$$\mathrm{TTP}\left(\frac{UN}{N}\right) = \overline{\chi\left[\frac{UN}{N} : \frac{\langle z_1, \dots, z_m\rangle N}{N}\right]} \overset{3.1}{=} \overline{\chi[UN:\langle z_1, \dots, z_m\rangle N]} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\chi[U:\langle z_1, \dots, z_m\rangle]} \leqslant \overline{\chi[G:\langle x_1, \dots, x_n\rangle]} = \mathrm{TTP}(G).$$

Nach [8, 4.1] erhalten wir also insbesondere $t(U/V) = \mathrm{TTP}(U/V) \leqslant \leqslant \mathrm{TTP}(U) \leqslant \mathrm{TTP}(G)$ für Untergruppen $1 \leqslant V \lhd_* U \leqslant G$ mit $1 \neq U/V \overset{\sim}{\leqslant} \boldsymbol{Q}$. ■

Für den Beweis von 4.3 benötigen wir

LEMMA 4.2. *Eine abelsche Gruppe* A *endlichen Ranges mit* $\mathrm{TTP}(A) = t(\boldsymbol{Z})$ *ist endlich erzeugt.*

BEWEIS. Wir schreiben die Gruppe A additiv. Da $\mathrm{TTP}(A) = t(\boldsymbol{Z})$ ist und A endlichen Rang hat, gibt es eine freie, d.h. endlich erzeugte, torsionsfreie Untergruppe U endlichen Ranges von A mit $nA \leqslant U$ für eine geeignete natürliche Zahl n. Der Kern des natürlichen Epimorphismus $A \twoheadrightarrow nA$ ist die Torsionsuntergruppe $\mathrm{tor}(A)$ von A, also von endlichem Rang und endlichem Exponenten, folglich endlich. Wegen $A/\mathrm{tor}(A) \cong nA \leqslant U$ ist auch A endlich erzeugt, da mit U auch nA frei abelsch von endlichem Rang ist. ■

SATZ 4.3. *Eine nilpotente Gruppe* G *endlichen Ranges ist genau dann endlich erzeugt, wenn* $\mathrm{TTP}(G) = t(\boldsymbol{Z})$ *gilt.*

BEWEIS. Wenn G endlich erzeugt ist, gilt $\mathrm{TTP}(G) = t(\boldsymbol{Z})$ nach Definition des Torsionstypen. Falls umgekehrt $\mathrm{TTP}(G) = t(\boldsymbol{Z})$, ist auch $\mathrm{TTP}(Z_k/Z_{k-1}) = t(\boldsymbol{Z})$ nach 4.1 und außerdem ist Z_k/Z_{k-1} eine abelsche Gruppe endlichen Ranges. Nach 4.2 ist daher Z_k/Z_{k-1} und wegen der Nilpotenz auch G selbst endlich erzeugt. ■

In den folgenden Sätzen formulieren wir eine Vielzahl von Eigenschaften des Torsionstyps. Die meisten der daraus folgenden Anwendungen auf klassische Fragestellungen haben mit endlich erzeugten Untergruppen und Faktorgruppen zu tun und können auch mit einfacheren Mitteln (siehe z.B. [11, 3]) gezeigt werde. Für den zweiten Teil von Korollar 4.13 kenne ich allerdings keinen Beweis, der ohne die hier entwickelte Begriffsbildung auskommt.

SATZ 4.4. *Sei G eine nilpotente Gruppe mit einem Normalteiler U und einer Untergruppe V, beide von endlichem torsionsfreiem Rang. Dann hat auch UV endlichen torsionsfreien Rang und es gilt*

$$\mathrm{TTP}(UV) = \mathrm{TTP}(U) \cup \mathrm{TTP}(V).$$

BEWEIS. Seien $u_1, \dots, u_m \in U$ und $v_1, \dots, v_n \in V$, so daß $[U:\langle u_1, \dots, u_m\rangle]$ und $[V:\langle v_1, \dots, v_n\rangle]$ Torsionsintervalle sind. Wegen der Isolatoreigenschaft nilpotenter Gruppen ist dann auch $[UV:\langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\rangle]$ ein Torsionsintervall und nach 3.2 hat UV endlichen torsionsfreien Rang. Nach 4.1 ist $\mathrm{TTP}(UV) \geqslant \geqslant \mathrm{TTP}(U) \cup \mathrm{TTP}(V)$. Sei nun c die Nilpotenzklasse von G und F die Funktion aus 2.5. Für die Umkehrung genügt es zu zeigen daß

$$(\chi[U:\langle u_1, \dots, u_m\rangle] \cup \chi[V:\langle v_1, \dots, v_n\rangle]) + (n_p \mid p) \geqslant \geqslant \chi[UV:\langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\rangle]$$

ist, wobei $F(c) = \prod_p p^{n_p}$. Sei $uv \in UV$ mit $u \in U$ und $v \in V$ und sei

$$K_d = \{f \in G \mid f \text{ ist ein } i\text{-facher Kommutator von Elementen aus } \{u, v\} \text{ mit } i \geqslant d\}.$$

Jedes K_d ist eine endliche Menge. Es gilt $K_d \subseteq K_{d-1} \subseteq \dots \subseteq K_1$, und es ist $(K_1 \setminus \{v\}) \subseteq U$, da $U \lhd G$ ist. Daher gibt es ein

$$R \mid (\chi[U:\langle u_1, \dots, u_m\rangle] \cup \chi[V:\langle v_1, \dots, v_n\rangle]),$$

so daß $a^R \in \langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\rangle$ für jedes $a \in K_1$ ist. Wir zeigen durch Induktion über d, beginnend mit $d = c$:

$$(*) \quad \forall_{1 \leqslant d \leqslant c} \; \forall_{b_1, \dots, b_s \in K_d} (b_1 \cdots b_s)^{RF(c-d+1)} \in \langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\rangle.$$

Für $d = 1$, $s = 2$, $b_1 = u$, $b_2 = v$ folgt dann die Behauptung.

Für $d = c$ ist $(*)$ klar, denn dann gilt $b_1, \dots, b_s \in \Gamma_c \leqslant Z(G)$. Sei $(*)$ für $c, c-1, \dots, d > 1$ schon bewiesen und $b = b_1 \dots b_s$ mit $b_1, \dots, b_s \in K_{d-1}$. Nach einem Theorem von Hall [2, 2.3] ist

$$b^{RF(c-d+2)} =$$

$$= b_1^{RF(c-d+2)} \dots b_s^{RF(c-d+2)} \cdot \tau_2^{m_2}(b_1, \dots, b_s) \dots \tau_{c-d+2}^{m_{c-d+2}}(b_1, \dots, b_s),$$

wobei für $j \in \{2, \dots, c-d+2\}$ die Potenzen $m_j = \binom{RF(c-d+2)}{j}$ und die $\tau_j(b_1, \dots, b_s)$ Produkte von Elementen aus K_d sind. Wegen $F(x) = x!(x-1)! \dots 3!\,2!$ sind die m_j ganzzahlige Vielfache von $RF(c-d+1)$. Nach Annahme sind daher die $\tau_j^{m_j}(b_1, \dots, b_s) \in \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \rangle$ und außerdem gilt

$$b_1^R, \dots, b_s^R \in \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \rangle$$

und $(*)$ ist gezeigt. ∎

Auf die Voraussetzung, daß U ein Normalteiler ist, kann im allgemeinen nicht verzichtet werden, denn die Menge $U(3, \boldsymbol{Q})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit 1 in der Diagonalen und Einträgen aus $\boldsymbol{Q}$ ist eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe der Klasse 2 [10, 5.1] und für die Untergruppen

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in S \right\rangle, \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in S \right\rangle$$

von $U(3, \boldsymbol{Q})$ gilt

$$2t(S) = \mathrm{TTP}\,(\langle U, V \rangle) > \mathrm{TTP}\,(U) \cup \mathrm{TTP}\,(V) = t(S),$$

wobei S die (additive) Gruppe der rationalen Zahlen mit quadratfreiem Nenner ist. In 4.9 formulieren wir eine Aussage über den Torsionstyp von $\langle U, V \rangle$, wenn U und V Untergruppen sind.

KOROLLAR 4.5. *Sei N ein Normalteiler von endlichem torsionsfreiem Rang einer nilpotenten Gruppe G und seien $x_1, \dots, x_n \in G$. Dann gilt: $[N\langle x_1, \dots, x_n \rangle : \langle x_1, \dots, x_n \rangle]$ ist genau dann ein Torsionsintervall, wenn $[N; N \cap \langle x_1, \dots, x_n \rangle]$ ein Torsionsintervall ist und in diesem Fall gilt*

$$\overline{\chi[N\langle x_1, \dots, x_n \rangle : \langle x_1, \dots, x_n \rangle]} = \overline{\chi[N : N \cap \langle x_1, \dots, x_n \rangle]}.$$

BEWEIS. Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Isolatoreigenschaft nilpotenter Gruppen. Wegen der Nilpotenz ist $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ und damit auch $N \cap \langle x_1, \dots, x_n\rangle$ polyzyklisch [10, 5.2.18] und es gibt Elemente $z_1, \dots, z_m \in N$, so daß $\langle z_1, \dots, z_m\rangle = N \cap \langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Daher gilt

$$\overline{\chi[N\langle x_1, \dots, x_n\rangle : \langle x_1, \dots, x_n\rangle]} \overset{4.4}{=} \mathrm{TTP}(N) \cup \mathrm{TTP}(\langle x_1, \dots, x_n\rangle) \overset{4.3}{=}$$

$$\overset{4.3}{=} \mathrm{TTP}(N) = \overline{\chi[N : \langle z_1, \dots, z_m\rangle]} = \overline{\chi[N : N \cap \langle x_1, \dots, x_n\rangle]}. \quad \blacksquare$$

SATZ 4.6. *Sei G eine nilpotente Gruppe endlichen torsionsfreien Ranges mit einem Normalteiler N. Dann ist*

$$\mathrm{TTP}(G/N) \cup \mathrm{TTP}(N) \leqslant \mathrm{TTP}(G) \leqslant \mathrm{TTP}(G/N)\ \mathrm{TTP}(N).$$

BEWEIS. Sei Y eine endlich erzeugte Untergruppe von G mit $\sqrt{Y} = G$. Dann gilt nach 4.3 und 4.4 (*)

$$\mathrm{TTP}(G/N) \cup \mathrm{TTP}(N) \overset{(*)}{=} \mathrm{TTP}(G/N) \cup \mathrm{TTP}(NY) =$$

$$= \overline{\chi(G/N : (NY)/N])} \cup \overline{\chi([NY : Y])} \overset{3.1}{=} \overline{\chi(G : NY])} \cup \overline{\chi([NY : Y])} \overset{3.1}{\leqslant}$$

$$\overset{3.1}{\leqslant} \overline{\chi([G : Y)]} = \mathrm{TTP}(G) = \overline{\chi([G : Y])} \overset{3.1}{\leqslant} \overline{\chi(G : NY])\chi([NY : Y])} =$$

$$= \mathrm{TTP}(G/N)\ \mathrm{TTP}(NY) \overset{(*)}{=} \mathrm{TTP}(G/N)\ \mathrm{TTP}(N). \quad \blacksquare$$

SATZ 4.7. *Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse c, für die G/G' endlichen torsionsfreien Rang hat. Dann auch G endlichen torsionsfreien Rang und es gilt*

$$\mathrm{TTP}(G/G') \leqslant \mathrm{TTP}(G) \leqslant \frac{c(c+1)}{2}\ \mathrm{TTP}(G/G').$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß jedes $k \in \{2, \dots, c\}$ die Faktorgruppe Γ_k/Γ_{k+1} endlichen torsionsfreien Rang hat und $\mathrm{TTP}(\Gamma_k/\Gamma_{k+1}) \leqslant k\ \mathrm{TTP}(G/G')$ gilt. Seien $x_1, \dots, x_n \in G$ mit $\sqrt{\langle x_1, \dots, x_n\rangle G'} = G/G'$. Sei D die von den Kommutatoren des Gewichts k mit Einträgen aus $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugte Untergruppe von G. Sei $g = [g_{11}, \dots, g_{1k}] \dots [g_{s1}, \dots, g_{sk}]$ ein beliebiges Element aus Γ_k und R eine natürliche Zahl mit $R | \chi[G : \langle x_1, \dots, x_n\rangle G']$ und $g_{\sigma\kappa}^R \in u_{\sigma\kappa} G'$ für alle $\sigma \in \{1, \dots, s\}$, $\kappa \in \{1, \dots, k\}$ und geeignete Elemente

$u_{\sigma\kappa} \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Dann gilt

$$g^{(R^k)} \overset{2.10}{\equiv} [g_{11}^R, \dots, g_{1k}^R] \dots [g_{s1}^R, \dots, g_{sk}^R] \equiv$$

$$\equiv [u_{11}, \dots, u_{1k}] \dots [u_{s1}, \dots, u_{sk}] \bmod \Gamma_{k+1},$$

und es folgt $g^{(R^k)} \in D\Gamma_{k+1}$. Da $D\Gamma_{k+1}/\Gamma_{k+1}$ eine endlich erzeugte Untergruppe von Γ_k/Γ_{k+1} ist und $g \in \Gamma_k$ beliebig gewählt war, folgt, daß Γ_k/Γ_{k+1} und damit auch G endlichen torsionsfreien Rang hat und $\mathrm{TTP}(\Gamma_k/\Gamma_{k+1}) \leqslant k\ \mathrm{TTP}(G/G')$ gilt. Aus 4.1 und 4.6 folgt nun die Ungleichungskette. ■

Aus 4.3 und 4.7 folgt

KOROLLAR 4.8. *Eine nilpotente Gruppe G ist endlich erzeugt, wenn G/G' endlich erzeugt ist.* ■

SATZ 4.9. *Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse c mit Untergruppen U und V von endlichem torsionsfreiem Rang. Dann hat auch $\langle U, Y \rangle$ endlichen torsionsfreien Rang und es gilt*

$$\mathrm{TTP}(U) \cup \mathrm{TTP}(V) \leqslant \mathrm{TTP}(\langle U, V \rangle) \leqslant \frac{c(c+1)}{2} (\mathrm{TTP}(U) \cup \mathrm{TTP}(V)).$$

BEWEIS. Wir können ohne Einschränkung $G = \langle U, V \rangle$ annehmen. Mit U und V haben auch $(UG')/G'$ und $(VG')/G'$, also nach 4.4 auch $((UG')(VG'))/G' = G/G'$ endlichen torsionsfreien Rang. Nach [3, 61. Ex. 8] hat daher das n-fache Tensorprodukt $\otimes^n G/G'$ und damit nach [11, 3.1] auch Γ_n/Γ_{n+1}, also auch G endlichen torsionsfreien Rang. Es gilt weiter

$$\mathrm{TTP}(U) \cup \mathrm{TTP}(V) \overset{4.1}{\leqslant} \mathrm{TTP}(G) \overset{4.7}{\leqslant} \frac{c(c+1)}{2} (\mathrm{TTP}(G/G')) =$$

$$= \frac{c(c+1)}{2}\left(\mathrm{TTP}\left(\frac{UVG'}{G'}\right)\right) \overset{4.4}{=} \frac{c(c+1)}{2}\left(\mathrm{TTP}\left(\frac{UG'}{G'}\right) \cup \mathrm{TTP}\left(\frac{VG'}{G'}\right)\right) =$$

$$= \frac{c(c+1)}{2}\left(\mathrm{TTP}\left(\frac{U}{U \cap G'}\right) \cup \mathrm{TTP}\left(\frac{V}{V \cap G'}\right)\right) \overset{4.1}{\leqslant}$$

$$\overset{4.1}{\leqslant} \frac{c(c+1)}{2} (\mathrm{TTP}(U) \cup \mathrm{TTP}(V)). \quad ■$$

Für den Beweis des folgenden Satzes sind die in Abschnitt 2 bewiesenen Kommutatorformeln von essentieller Bedeutung. Zwar läßt sich mit Hilfe des Tensorproduktes viel leichter eine Beziehung zwischen $\mathrm{TTP}(\Gamma_k)$ und $\mathrm{TTP}(G/Z_{k-1})$ beweisen ([11, 3]), doch ergibt diese Methode einen deutlich größeren Vorfaktor auf der rechten Seite.

SATZ 4.10. *Sei G eine nilpotente Gruppe in der G/Z_{k-1} für eine natürliche Zahl k von endlichem torsionsfreiem Rang ist. Dann ist Γ_k von endlichem torsionsfreiem Rang und es gilt* $\mathrm{TTP}(\Gamma_k) \leqslant \leqslant k\ \mathrm{TTP}(G/Z_{k-1})$.

BEWEIS. Sei c die Nilpotenzklasse von G, $E = \langle e_1, \ldots, e_q\rangle$ eine endlich erzeugte Untergruppe von G, so daß $\bar{E} = \langle e_1 Z_{k-1}, \ldots, e_q Z_{k-1}\rangle \leqslant \leqslant G/Z_{k-1}$ eine endlich erzeugte Unturgruppe ist, für die $[G/Z_{k-1} : \bar{E}]$ ein Torsionsintervall ist. Sei weiter $\chi[G/Z_{k-1} : \bar{E}] = (n_p \,|\, p)$ die Charakteristik dieses Torsionsintervalles. Für die Funktion F aus 2.5 sei die Zahl $F := F(c)$. Sei

$$F^{(c+3)(k-1)(c-k)} F^{c-k} = \prod_{p \in P} p^{k_p}.$$

Wir werden zeigen, daß es für alle $g \in \Gamma_k$ ein $M \,|\, (kn_p + k_p \,|\, p)$ gibt, so daß $g^M \in \gamma_k E$ gilt. Dann ist $\gamma_k E$ ebenfalls endlich erzeugt, $[\Gamma_k : \gamma_k E]$ ein Torsionsintervall, also Γ_k von endlichem torsionsfreiem Rang nach 3.2 und für die zugehörige Charakteristik gilt $\chi[\Gamma_k : \gamma_k E] \leqslant (kn_p + k_p \,|\, p)$. Da $(kn_p + k_p \,|\, p) \sim k(n_p \,|\, p)$ im Sinne der Äquivalenz von Charakteristiken [3, 85] ist damit die Behauptung des Satzes gezeigt.

Sei $[x_{11}, \ldots, x_{1r_1}] \ldots [x_{s1}, \ldots, x_{sr_s}]$ ein beliebiges Element aus Γ_k mit $r_1, \ldots, r_s \geqslant k$ und $X = \{x_{11}, \ldots, x_{1r_1}, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_{sr_s}\}$. Da G nilpotent ist, gibt es nur endlich viele Kommutatoren $[x_1, \ldots, x_l]$ des Gewichts $l \geqslant k$ mit Einträgen $x_1, \ldots, x_l \in X$ und es existiert ein $N \,|\, \chi[G/Z_{k-1} : \bar{E}]$, so daß für jeden solchen Kommutator die Aussage $[x_1, \ldots, x_l]^N \in EZ_{k-1}$ gilt. Wir werden nun sogar zeigen, daß die Aussage

$$(*) \qquad \forall_{x \in \gamma_m\langle X\rangle}\ x^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m)} F^{(c-m)}} \in \gamma_k E$$

für alle $m \in \{k, k+1, \ldots, c\}$ gilt. Dazu beweisen wir die Aussage $(*)$ zuerst für $m = c$, nehmen an, daß sie für ein $m > k$ gilt und zeigen, daß sie dann auch für $m - 1$ gilt.

Für ein Element $x \in \gamma_c\langle X\rangle$ gibt es Elemente $x_{11}, \ldots, x_{1c}, \ldots, x_{r1}, \ldots, x_{rc} \in X$ mit $x = [x_{11}, \ldots, x_{1c}] \ldots [x_{r1}, \ldots, x_{rc}]$. Da $\gamma_c\langle X\rangle \leqslant \mathrm{Z}(G)$, gilt

$$x^{N^k} = [x_{11}, \dots, x_{1c}]^{N^k} \dots [x_{r1}, \dots, x_{rc}]^{N^k} \overset{2.2}{=}$$

$$\overset{2.2}{=} [\underbrace{[x_{11}, \dots, x_{1c-k+1}]^N}_{\in EZ_{k-1}}, \underbrace{x^N_{1c-k+2}}_{\in EZ_{k-1}}, \dots, \underbrace{x^N_{1c}}_{\in EZ_{k-1}}] \dots$$

$$\dots [\underbrace{[x_{r1}, \dots, x_{rc-k+1}]^N}_{\in EZ_{k-1}}, \underbrace{x^N_{rc-k+2}}_{\in EZ_{k-1}}, \dots, \underbrace{x^N_{rc}}_{\in EZ_{k-1}}] \overset{2.3}{\in} \gamma_k E\,.$$

Damit ist (*) für $m = c$ gezeigt. Sei nun (*) für ein m mit $k < m \leqslant x$ schon gezeigt und sei $x = y_1 \dots y_s z$ ein beliebiges Element aus $\gamma_{m-1}\langle X\rangle$, wobei die y_σ (gewöhnliche) Kommutatoren des Gewichts $m-1$ mit Einträgen aus X sind und $z \in \gamma_m\langle X\rangle$ ist. Nach 2.5 ii) ist dann

$$x^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}} = y_1^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}} \dots$$

$$\dots y_s^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}} \underbrace{z^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}}}_{\gamma_k E} \underbrace{z_1^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m}}}_{\gamma_k E},$$

für ein $z_1 \in \gamma_2\langle y_1, \dots, y_s, z\rangle \leqslant \gamma_m\langle X\rangle$. Die Aussage (*) ergibt

$$z^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}},\ z_1^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m}} \in \gamma_k E\,.$$

Es ist also noch zu zeigen, daß $y_\sigma^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}} \in \gamma_k E$ für alle $1 \leqslant \sigma \leqslant s$ gilt. Sei $\sigma \in \{1, \dots, s\}$ fest gewählt. Für geeignete Elemente $h_1, \dots, h_{m-1} \in X$ ist $y_\sigma = [h_1, \dots, h_{m-1}]$ und es gilt nach 2.10 für ein $w \in \gamma_m\langle X\rangle$

$$[h_1, \dots, h_{m-1}]^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}} \overset{2.10}{=}$$

$$\overset{2.10}{=} \underbrace{[\underbrace{[h_1, \dots, h_{m-k}]^{N F^{(c+3)(k-1)(c-m+1)} F^{c-m+1}}}_{\in EZ_{k-1}}, \underbrace{h^N_{m-k+1}}_{\in EZ_{k-1}}, \dots, \underbrace{h^N_{m-1}}_{\in EZ_{k-1}}]}_{\overset{2.3}{\in} \gamma_k E} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{w^{N^k F^{(c+3)(k-1)(c-m)} F^{c-m+1}}}_{\overset{(*)}{\in} \gamma_k E} \in \gamma_k E\,. \qquad \blacksquare$$

Aus 4.3 und 4.10 folgt nun

KOROLLAR 4.11 ([11, 3.19]). *Sei G eine nilpotente Gruppe, in der G/Z_{k-1} für eine natürliche Zahl k endlich erzeugt ist. Dann ist auch Γ_k endlich erzeugt.* ∎

Für eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe G von endlichem Rang mit Elementen $x_1, \dots, x_n$, so daß $\sqrt{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} = G$ gilt, ist der *innere Typ* $\mathrm{IT}(G) := t(x_1) \cap \dots \cap t(x_1)$ eine Invariante der Gruppe, also von der Wahl einer solchen Menge $x_1, \dots, x_n$ unabhängig (vergleiche [6, 5]).

LEMMA 4.12. *Für eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe $G \neq 1$ von endlichem Rang gilt* $\mathrm{IT}(G) \leqslant \mathrm{TTP}(G)$.

BEWEIS. Sei $1 \neq x \in G$. Dann gilt

$$\mathrm{IT}(G) \leqslant t(x) = t(\sqrt{\langle x \rangle}) = \mathrm{TTP}\,(\sqrt{\langle x \rangle} \overset{4.1}{\leqslant} \mathrm{TTP}(G). \qquad \blacksquare$$

Für rationale Gruppen $R, S \leqslant \boldsymbol{Q}$ ist das Komplexprodukt $RS := \{rs \mid r \in R,\ s \in S\}$ wieder eine rationale Gruppe. Für eine natürliche Zahl n wird R^n rekursiv durch $R^1 = R$, $R^n := R^{n-1}R$ definiert. Es gilt $t(R^n) = nt(R)$. Eine torsionsfreie, abelsche Gruppe heißt *vollständig zerlegbar*, wenn sie sich als direkte Summe rationaler Gruppen darstellen läßt.

KOROLLAR 4.13. *Sei G eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe in der G/Z_{k-1} für eine natürliche Zahl k endlichen Rang hat. Dann hat auch Γ_k endlichen Rang und es gilt*

$$k\ \mathrm{TTP}(G/Z_{k-1}) \geqslant \mathrm{TTP}(\Gamma_k) \geqslant \mathrm{IT}(\Gamma_k) \geqslant k\ \mathrm{IT}(G/Z_{k-1}).$$

Falls G die Nilpotenzklasse c hat und G/Z_{c-1} vollständig zerlegbar, homogen vom Typ t ist, so ist Γ_c vollständig zerlegbar, homogen vom Typ $ct(R)$.

BEWEIS. Die Ungleichungskette folgt aus 4.10, 4.12 und [5, Theorem D]. Falls G die Nilpotenzklasse c hat und G/Z_{c-1} vollständig zerlegbar, homogen vom Typ t ist, gilt $t(R) \overset{4.1}{=} \mathrm{TTP}(R) \overset{4.4}{=} \mathrm{TTP}(G/Z_{c-1})$, also

$$ct(R) = c\ \mathrm{TTP}(G/Z_{c-1}) \geqslant \mathrm{TTP}(\Gamma_c) \geqslant \mathrm{IT}(\Gamma_c) \geqslant c\ \mathrm{IT}(G/Z_{c-1}) = ct(R)$$

und damit $\mathrm{TTP}(\Gamma_c) = \mathrm{IT}(\Gamma_c) = ct(R)$. Daher ist Γ_c homogen von Typ $ct(R)$ und vollständig zerlegbar nach [3, 86.5]. $\blacksquare$

5. Der wichtigste Unterschied zum abelschen Fall.

Für eine torsionsfreie, abelsche Gruppe A mit endlichem Rang n gibt es stets Untergruppen $U_1, \dots, U_n$ mit $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = 1$ und $A/U_i \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q}$.

Die Vereinigung

$$\mathrm{OT}(A) := \bigcup_{i=1}^{n} t(A/U_i)$$

ist der *äußere Typ* von A. Nach [8, 2.2] ist der äußere Typ eine Invariante, also von der Wahl einer solchen Menge von Untergruppen unabhängig und nach [8, 4.1] gilt $\mathrm{OT}(A) = \mathrm{TTP}(A)$ für eine torsionsfreie, abelsche Gruppe A von endlichem Rang.

In 5.3 konstruieren wir eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe G der Klasse 2 und des Ranges 3, in der die Menge

$$VT = \left\{ t = \bigcup_{i \in I} t(U_i/V_i) \,|\, I \text{ endlich},\ V_i \lhd_* U_i \leqslant G,\ 1 \neq U_i/V_i \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q} \right\}$$

kein maximales Element enthält und für die $a < \mathrm{TTP}(G)$ für jedes $a \in VT$ gilt. Dies zeigt, daß — anders als in den torsionsfreien, abelschen Gruppen — der Torsionstyp in nilpotenten Gruppen im allgemeinen nicht als Vereinigung von Typen $t(U/V)$ mit $V \lhd_* U \leqslant G$ und $U/V \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q}$ dargestellt werden kann und ferner die Betrachtung endlicher, aber ansonsten beliebiger Vereinigungen solcher Typen auch nicht zu einem invarianten Typ führt. Da der Verband der Typen nicht vollständig ist, ist die Betrachtung unendlicher Vereinigungen von Typen sowieso sinnlos. Zur Vorbereitung von Beispiel 5.3 dienen 5.1 und 5.2.

Wir bezeichnen mit p_n die n-te Primzahl, d.h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$. Nach einem Satz von Rosser [9, p. 190] gilt $n \log n < p_n < n \log n + n(\log \log n + 8)$ für $n > 1$. Hieraus folgt unmittelbar

Lemma 5.1. *Es gibt eine Zahl $R \in \boldsymbol{N}^+$, so daß für alle $j < R$ die Ungleichungen $j^3 < p_{2^j-1}$ und $p_j \leqslant j^2$ gelten.* ■

Für den Beweis der Eigenschaften der Gruppe G aus Beispiel 5.3 benötigen wir Informationen über die Normalisatoren der rationalen Untergruppen $V \neq Z(G)$. Dabei spielen die im folgenden Satz definierten Lösungsmengen $T(r,s)$ bestimmter Kongruenzen eine entscheidende Rolle. Die (endliche) Menge $E(r,s)$, die in der Darstellung der $T(r,s)$ auftritt, hat auf das weitere Vorgehen keinen wesentlichen Einfluß, da wir die Darstellung für Aussagen über Typen benutzen.

Lemma 5.2. *Für $j \in \boldsymbol{N}^+$ sei $N_j = \{k \in \boldsymbol{N}^+ \,|\, k = 2^{j-1}z$ mit $(2, z) = 1\}$, wobei (a, b) wie üblich den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen a, b bezeichnet. Dann gilt $\boldsymbol{N}^+ = N_1 \cup N_2 \cup \ldots$ und $N_i \cap N_j = \emptyset$ für $i \neq j$.*

Weiter definieren wir die Folge $(b_i)_{i \in N^+}$ *durch*

$$b_i := p_j, \qquad \text{falls } i \in N_j .$$

Sei schließlich für ganze Zahlen r, s *mit* $r^2 + s^2 \neq 0$

$$T(r, s) = \{i \in N^+ \mid r \equiv s b_i \bmod p_i\}.$$

Dann gibt es für jedes Paar $0 \neq (r, s) \in Z \times Z$ *eine endliche Menge* $E(r, s) \subseteq N^+$ *mit*

$$T(r, s) = \begin{cases} E(r, s), & \text{falls} \quad r \neq s p_j \text{ für alle } j \in N^+, \\ N_j \cup E(r, s), & \phantom{\text{falls}} \quad r = s p_j \text{ für } j \in N^+. \end{cases}$$

Beweis. Offensichtlich ist N^+ die disjunkte Vereinigung der N_j und damit ist die Folge $(b_i)_{i \in N^+}$ wohldefiniert.

Seien $r, s \in Z$ mit $r^2 + s^2 \neq 0$ beliebig aber fest gewählt. Für $j \in N^+$ definieren wir

$$T_j(r, s) := \{i \in N_j \mid r \equiv s b_i \bmod p_i\} = \{i \in N_j \mid r \equiv s p_i \bmod p_i\}.$$

Es gilt $T(r, s) = \bigcup_{j \in N^+} T_j(r, s)$.

Falls $r = s p_j$ für ein $j \in N^+$ gilt, ist $T(r, s) \supseteq T_j(r, s) = N_j$. Sei nun $r \neq s p_j$. Dann gilt $0 \neq |r - s p_j| < p_i$ und damit $r \not\equiv s p_j \bmod p_i$ für fast alle $i \in N^+$. Daher gilt

$$r \neq s p_j \Rightarrow T_j(r, s) \quad \text{endlich}.$$

Es genügt nun zu zeigen, daß

$$\forall_{j \in N^+} \quad (j \geqslant \max\{|r| + |s|, R\} \wedge r \neq s p_j) \Rightarrow T_j(r, s) = \emptyset,$$

wobei $R \in N^+$ nach 5.1 so gewählt sei, daß $p_j \leqslant j^2$ und $j^3 < p_{2^j - 1}$ gilt.

Für $j \geqslant \max\{|r| + |s|, R\}$ und $r \neq s p_j$ erhalten wir damit

$$0 \neq |r - s p_j| \leqslant (|r| + |s|)\, p_j \leqslant j p_j \overset{5.1}{\leqslant} j j^2 = j^3 \overset{5.1}{<} p_{2^j - 1} \leqslant p_i$$

für alle $i \in N_j = \{k \in N^+ \mid k = 2^{j-1} z \text{ mit } (2, z) = 1\}$. Daher ist $r \not\equiv s p_j \bmod p_i$ für alle $i \in N_j$ und damit $T_j(r, s) = \emptyset$ in diesem Fall. ∎

Wir benötigen noch ein paar Definitionen: Mit $U(3, \boldsymbol{Z})$ bzw. $U(3, \boldsymbol{Q})$ bezeichnen wir die Menge der oberen Dreieckmatrizen mit 1 in der Diagonalen und Einträgen aus $\boldsymbol{Z}$ bzw. $\boldsymbol{Q}$. Beide Mengen sind torsionsfreie, nilpotente Gruppen der Klasse 2 [10, 5.1] und haben nach [12, Theorem 2] den Rang 3. Mit $\mathcal{S}$ bezeichnen wir die Gruppe der rationalen Zahlen mit quadratfreiem Nenner.

BEISPIEL 5.3. *Für die Folge* $(b_i)_{i \in \boldsymbol{N}^+}$ *aus* 5.2 *ist die Menge*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sum r_i p_i^{-1} & \sum r_i p_i^{-3} + \sum t_i p_i^{-2} \\ & 1 & \sum r_i b_i p_i^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} \Bigg| t_i, r_i \in \boldsymbol{Z}, \ i \in \boldsymbol{N}^+ \right\}$$

eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe der Klasse 2 *und von Rang* 3. *Dabei sind — wie üblich — fast alle* t_i, s_i *gleich* 0 *und wir schreiben* $\sum$ *anstelle von* $\sum_{i \in \boldsymbol{N}^+}$. *Es gilt* $\mathrm{TTP}(G) = 3t(\mathcal{S})$ *und die (offensichtlich bezüglich endlicher Vereinigungen abgeschlossene) Menge*

$$VT = \left\{ t = \bigcup_{i \in I} t(U_i/V_i) \,|\, I \text{ endlich}, \ V_i \lhd_* U_i \leqslant G, \ 1 \neq U_i/V_i \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q} \right\}$$

enthält kein maximales Element. Weiter gilt $a < \mathrm{TTP}(G)$ *für jede* $a \in VT$.

BEWEIS. Offensichtlich ist G eine Gruppe. Wegen $N_1 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $N_2 = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$ gilt $b_1 = p_1 = 2$, $b_2 = p_2 = 3$ und damit sind

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \cdot 2^{-1} & -2 \cdot 2^{-3} \\ & 1 & -2 \cdot 2 \cdot 2^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 3^{-1} & 3 \cdot 3^{-3} \\ & 1 & 3 \cdot 3 \cdot 3^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Da außerdem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{-2} - 3^{-2} + 3 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

ist

$$\begin{pmatrix}1 & -2\cdot 2^{-1} & -2\cdot 2^{-3}\\ & 1 & -2\cdot 2\cdot 2^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\cdot 3^{-1} & 3\cdot 3^{-3}\\ & 1 & 3\cdot 3\cdot 3^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2^{-2}-3^{-2}+3\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3^{-2}-3-2^{-2}\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2^{-2}-3^{-2}+3\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}\in G$$

und daher auch

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2^{-2}\\ & 1 & 2\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & -2\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2-2^{-2}\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\in G.$$

Damit ist $U(3, \boldsymbol{Z}) \leqslant G \leqslant U(3, \boldsymbol{Q})$ und G ist eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe der Klasse 2 und des Ranges 3.

Seien r_i, $t_i = 0$ für $i > k$. Dann ist für $P = p_1^3 \dots p_k^3$

$$\begin{pmatrix}1 & \sum r_i p_i^{-1} & \sum r_i p_i^{-3} + \sum t_i p_i^{-1}\\ & 1 & \sum r_i b_i p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}^P =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \sum r_i P p_i^{-1} & \sum r_i P p_i^{-3} + \sum t_i P p_i^{-2} + \frac{1}{2}P(P-1)(\sum r_i p_i^{-1})(\sum r_i b_i p_i^{-1})\\ & 1 & \sum r_i P p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}\in$$

$$\in U(3, \boldsymbol{Z})$$

und damit $\chi[G : U(3, \boldsymbol{Z})] \leqslant (3, 3, \dots)$. Andererseits gilt für $p_2 \neq 2$ die Implikationskette

$$\begin{pmatrix}1 & p_i^{-1} & p_i^{-3}\\ & 1 & b_i p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & n p_i^{-1} & n p_i^{-3} + \frac{1}{2} n(n-1)\, b_i p_i^{-2}\\ & 1 & n b_i p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}^n \in U(3, \boldsymbol{Z})$$

$$\Rightarrow n + \frac{1}{2} n(n-1)\, b_i p_i \in p_i^3 \boldsymbol{Z} \Rightarrow p_i^3 \mid n\,,$$

also insgesamt $\mathrm{TTTP}(G) = 3t(\mathcal{S})$. Wegen $U(3, \boldsymbol{Z}) \leqslant G \leqslant U(3, \boldsymbol{Q})$ gilt

$$\mathrm{Z}(G) = \sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\right\rangle} = \left\langle\begin{pmatrix}1 & 0 & q\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, q \in \boldsymbol{Q}\right\rangle \cap G.$$

Wir zeigen nun

$$\mathrm{Z}(G) = \left\langle\begin{pmatrix}1 & 0 & p_i^{-2}\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, i \in \boldsymbol{N}^+\right\rangle.$$

Offensichtlich gilt «$\geqslant$». Falls

$$\begin{pmatrix}1 & \sum r_i p_i^{-1} & \sum r_i p_i^{-3} + \sum t_i p_i^{-2}\\ & 1 & \sum r_i b_i p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & q\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix} \in G$$

für ein $q \in \boldsymbol{Q}$, gilt insbesondere $\sum r_i p_i^{-1} = 0$, also $p_i \mid r_i$ und wir erhalten die angegebene Darstellung des Zentrums. Daher gilt $\mathrm{TTP}\,(\mathrm{Z}(G)) = 2t(\mathcal{S})$.

Seien nun $r_i, t_i = 0$ für $i > k$. Dann ist für $P = p_1 \dots p_k$

$$\begin{pmatrix}1 & \sum r_i p_i^{-1} & \sum r_i p_i^{-3} + \sum t_i p_i^{-2}\\ & 1 & \sum r_i b_i p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix}^P =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \sum r_i P p_i^{-1} & \sum r_i P p_i^{-3} + \sum t_i P p_i^{-2} + \frac{1}{2} P(P-1)(\sum r_i p_i^{-1})(\sum r_i b_i p_i^{-1})\\ & 1 & \sum r_i P p_i^{-1}\\ & & 1\end{pmatrix} \in$$

$$\in \mathrm{Z}(G)\, U(3, \boldsymbol{Z})$$

und es gilt $\mathrm{TTP}\,(G/\mathrm{Z}(G)) \leqslant t(\mathcal{S})$. Die Annahme $\mathrm{TTP}\,(G/\mathrm{Z}(G)) < t(\mathcal{S})$ führt aber wegen

$$3t(\mathcal{S}) = \mathrm{TTP}\,(G) \overset{4.6}{\leqslant} \mathrm{TTP}\,(G/\mathrm{Z}(G))\ \mathrm{TTP}\,(\mathrm{Z}(G)) = \mathrm{TTP}\,(G/\mathrm{Z}(G))\, 2t(\mathcal{S})$$

zum Widerspruch und wir erhalten $\mathrm{TTP}\,(G/\mathrm{Z}(G)) \leqslant t(\mathcal{S})$.

Wir zeigen nun, daß die Menge VT kein maximales Element enthäly. Zunächst beschaffen wir uns Informationen über die *Haupttypenmenge* $\{t(U/V) \mid V \lhd_* U \leqslant_* G,\ U/V \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q}\}$ von G. Da G vom Rang 3 ist, gilt für einen Haupttyp a

$$a = t(U) \qquad \text{für } U \leqslant_* G,\ U \mathrel{\tilde{\leqslant}} \mathbf{Q}\,,$$

$$\text{oder } a = t(G/V) \qquad \text{für } 1 \neq G/V \mathrel{\tilde{\leqslant}} \mathbf{Q}\,,$$

$$\text{oder } a = t(U/V) \qquad \text{für } 1 < V \lhd_* U <_* G,\ U/V \mathrel{\tilde{\leqslant}} \mathbf{Q}\,.$$

Offensichtlich ist

$$t^G\left(\left(\begin{matrix} 1 & r & t \\ & 1 & s \\ & & 1 \end{matrix}\right)\right) \leqslant t(\mathcal{S})\,,$$

falls $r^2 + s^2 \neq 0$. Da $t^G(g) = 2t(\mathcal{S})$ für $g \in \mathrm{Z}(G)$, folgt damit

$$\text{(1)} \qquad \forall_{U \mathrel{\tilde{\leqslant}} \mathbf{Q}}\ U \leqslant G \Rightarrow t(U) \leqslant 2t(\mathcal{S})\,.$$

Für einen Normalteiler V von G mit $G/V \mathrel{\tilde{\leqslant}} \mathbf{Q}$ gilt $\sqrt{G'} \leqslant V$ und wir erhalten

$$\text{(2)} \quad t(G/V) = \mathrm{TTP}\,(G/V) \overset{4.1}{\leqslant} \mathrm{TTP}\,(G/\sqrt{G'}) = \mathrm{TTP}\,(G/\mathrm{Z}(G)) = t(\mathcal{S})\,.$$

Wir untersuchen nun $t(U/V)$ für $1 < V \lhd_* U <_* G$ und $V \neq \mathrm{Z}(G)$. Wir können

$$V = \sqrt{\left\langle\left(\begin{matrix} 1 & r & t \\ & 1 & s \\ & & 1 \end{matrix}\right)\right\rangle} \quad \text{für} \left(\begin{matrix} 1 & r & t \\ & 1 & s \\ & & 1 \end{matrix}\right) \in U(3, \mathbf{Z}), \qquad r^2 + s^2 \neq 0$$

annehmen. Dazu nutzen wir aus, daß U im Normalisator $\mathrm{N}(V)$ von V liegen muß und beschaffen uns zunächst Informationen über $\mathrm{N}(V)$. Wegen

$$\left(\begin{matrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{matrix}\right)^{-1}\left(\begin{matrix} 1 & r & t \\ & 1 & s \\ & & 1 \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & r & t + ry - sx \\ & 1 & s \\ & & 1 \end{matrix}\right)$$

ist der Normalisator

$$\mathrm{N}(V) \leqslant \left\{\left(\begin{matrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{matrix}\right) \middle|\, ry = sx \wedge x, y, z \in \mathbf{Q}\right\} \cap G\,.$$

Es gilt also die folgende Kette von Implikationen

$$\begin{pmatrix} 1 & \sum r_i p_i^{-1} & \sum r_i p_i^{-3} + \sum t_i p_i^{-2} \\ & 1 & \sum r_i b_i p_i^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{N}(V) \Rightarrow r \sum r_i b_i p_i^{-1} = s \sum r_i p_i^{-1}$$

$$\Rightarrow \sum (r r_i b_i - s r_i)\, p_i^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \forall_{i \in N^+} r_i = 0 \vee r b_i \equiv s \bmod p_i$$

$$\Rightarrow \forall_{i \in N^+} r_i = 0 \vee i \in T(r, s)$$

für die in 5.2 definierte Menge $T(r, s)$. Daher ist

$$\mathrm{N}(V) \leqslant \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{i \in T(r,s)} r_i p_i^{-1} & \sum\limits_{i \in T(r,s)} r_i p_i^{-3} + \sum\limits_{i \in N^+} t_i p_i^{-2} \\ & 1 & \sum\limits_{i \in T(r,s)} r_i b_i p_i^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir definieren Typen a_j wie folgt: $a_0 = 2t(\mathcal{S})$ und für $j \in N^+$ sei $(n_{p_i} \mid i \in N^+) \in a_j$, wobei

$$n_{p_i} = \begin{cases} 3 & \text{falls } i \in N_j; \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Darstellung von $T(r, s)$ nach 5.2 folgt TTP $(\mathrm{N}(V)) \leqslant a_j$ für ein geeignetes $j \in N_0$. Für $1 < V \lhd_* U <_* G$, $U/V \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q}$ gilt also zusammenfassend

$$(3)\ t(U/V) \overset{4.1}{\leqslant} \begin{cases} \text{TTP } (G/\mathrm{Z}(G)) = t(\mathcal{S}), & \text{falls } V = \mathrm{Z}(G); \\ \text{TTP } (\mathrm{N}(V)) \leqslant a_j \text{ für ein geignetes } j \in N_0, & \text{falls } V \neq \mathrm{Z}(G), \end{cases}$$

da $U \leqslant \mathrm{N}(V)$ im Fall $V \neq \mathrm{Z}(G)$ ist.

Für $V \lhd_* U \leqslant G$ mit $U/V \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \boldsymbol{Q}$ leiten wir nun eine Abschätzung für $t(U/V)$ her. Wegen $\mathrm{N}(\sqrt{V}) \geqslant \mathrm{N}(V)$ [1, 9.4] gilt $\sqrt{V} \lhd_* \langle U, \sqrt{V} \rangle$; weiter ist $\sqrt{V} \lhd_* \sqrt{U} = \sqrt{\langle U, \sqrt{V} \rangle}$, da der Normalisator einer isolierten Untergruppe einer torsionsfreien, nilpotenten Gruppe selbst isoliert ist [7, § 67]. Wegen $\mathrm{rg}\,(X) = \mathrm{rg}\,(\sqrt{X})$ für eine Untergruppe X einer torsionsfreien, nilpotenten Gruppe ([6, 2.5] und [1, 13.6]) ist $\mathrm{rg}\,(\sqrt{U}/\sqrt{V}) = 1$, also $\sqrt{U}/\sqrt{V}$ rational. Damit gilt

$$t(U/V) = t(U/(U \cap \sqrt{V})) = t((U\sqrt{V})/\sqrt{V}) \leqslant t(\sqrt{U}/\sqrt{V})$$

und wir erhalten, daß es für jedes Element $a \in VT$ sogar Haupttypen $b_1, \ldots, b_n$ mit $a \leqslant b_1 \cup \ldots \cup b_n$ gibt. Aus den Abschützungen (1), (2) und (3) für die Haupttypen von G erhalten wir damit, daß für jeden Typ $a \in VT$ ein $k \in \boldsymbol{N}^+$ existiert, so daß $a < a_0 \cup \ldots \cup a_k$ gilt.

Um zu zeigen, daß VT kein maximales Element enthält, genügt es daher zu zeigen, daß $a_j \in VT$ für $j \in \boldsymbol{N}_0$ ist. Zunächst gilt $a_0 = t(\mathrm{Z}(G)) \in VT$. Für $j \in \boldsymbol{N}^+$ ist

$$U_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i \in N_j} r_i p_i^{-1} & \sum_{i \in N_j} r_i p_i^{-3} + \sum_{i \in \boldsymbol{N}^+} t_i p_i^{-2} \\ & 1 & \sum_{i \in N_j} r_i b_i p_i^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| t_i \in \boldsymbol{Z};\ r_i \in \boldsymbol{Z} \text{ für } i \in N_j \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i \in N_j} r_i p_i^{-1} & \sum_{i \in N_j} r_i p_i^{-3} + \sum_{i \in \boldsymbol{N}^+} t_i p_i^{-2} \\ & 1 & p_j \sum_{i \in N_j} r_i p_i^{-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| t_i \in \boldsymbol{Z};\ r_i \in \boldsymbol{Z} \text{ für } i \in N_j \right\} \leqslant G$$

eine abelsche Untergruppe von G mit $\mathrm{TTP}(U_j) = a_j$. Da $\mathrm{TTP}(U_j) = \mathrm{OT}(U_j)$ in abelschen Gruppen gilt ([8, 4.1]), und $\mathrm{rg}(U_j) = 2$ ist, gibt es nach Definition des äußeren Typen Haupttypen c_j, d_j von U_j mit $c_j \cup d_j = a_j$ und es ist $a_j \in VT$ für alle j. Damit ist gezeigt, daß VT kein maximales Element enthält. Nach 4.1 folgt schließlich $a < \mathrm{TTP}(G)$ für jedes a aus VT. ∎

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Baumslag, *Some aspects of groups with unique roots*, Acta Math., **104** (1960), pp. 217-303.

[2] G. Baumslag, *Lecture Notes on Nilpotent Groups*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1971).

[3] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups I+II*, New York (1970, 1973).

[4] P. Hall, *The Edmonton Notes on Nilpotent Groups*, Queen Mary College Mathematics Notes (1969).

[5] H. P. Heislbetz, *Dividierbarkeit und Typenbedingungen in verallgemeinerten nilpotenten Gruppen*, Monatshefte für Mathematik, erscheint.

[6] H. P. Heislbetz - O. Mutzbauer, *Invariante Typen in torsionsfreien, auflösbaren Gruppen endlichen Ranges*, Arch. Math., **55** (1990), pp. 10-24.

[7] A. G. Kurosh, *The Theory of Groups*, 2nd volume, 2nd edition, New York (1960).

[8] O. MUTZBAUER, *Type invariants of torsion-free Abelian groups*, in *Abelian Group Theory, Proceedings, Perth 1989*, Contemporary Math., 87 (1989), pp. 133-154.

[9] P. RIBENBOIM, *The Book of Prime Number Records*, Berlin-Heidelberg-New York (1988).

[10] D. J. S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[11] R. B. WARFIELD jr., *Nilpotent Groups*, Lecture Notes Math., **513**, Berlin-Heidelberg-New York (1976).

[12] D. I. ZAIČEV, *On soluble groups of finite rank*, Soviet Math. Dokl., **9** (1968), pp. 783-785.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1992.