Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Jean Guillerme

Convergences et relations compactantes. Application aux équilibres de Stackelberg

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 89 (1993), p. 127-160

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1993__89__127_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 89 (1993)

Convergences et relations compactantes. Application aux équilibres de Stackelberg.

JEAN GUILLERME (*)

RÉSUMÉ - Après avoir adapté la notion de Γ-limite aux espaces semi-convergentiels (à tout point d'un tel espace X est associé une famille de semi-filtres sur X), on montre ce qu'il est convenu d'appeler les «Γ-inégalités», ici dans des treillis complets non nécessairement complètement distributifs. Une Γ-inégalité permet d'établir le «théorème d'inclusion variationnelle», important énoncé donnant les conditions dans lesquelles une limite d'ensembles définis par une inégalité entre fonctions est contenue dans l'ensemble défini par l'inégalité entre les limites de ces fonctions. Puis on introduit la notion de la relation compactante en un point, entre deux espaces semi-convergentiels; cette notion permet d'exprimer, dans un cadre unique, toutes les propriétés classiques de compacité. En particulier, elle est suffisante pour établir des résultats du type «semi-continuité inférieure de la fonction marginale». Des exemples sont présentés, dont ceux de «convergences séquentielles». Enfin, nous appliquons les méthodes précédentes à la recherche systématique de conditions suffisantes dans un problème de stabilité des équilibres de Stackelberg.

ABSTRACT - A set is a semi-convergence space if, to each of its points, is associated a family of semi-filters. We adapt the notion of Γ-limit for such spaces and prove «Γ-inequalities» in complete lattices not necessarly completely distributive. A Γ-inequality is used to prove an important result, namely, the «variational inclusion Theorem». This result gives conditions insuring that a limit of sets, defined by an inequality between functions, is included in the set defined by the inequality between the limits of those functions. Then we introduce the notion of «compacting relation at a point», between two semi-convergence spaces; this notion permits the description, in a unique framework, of all the classical properties of compacity. In particular, it is sufficient to obtain results as «the semi-continuity of the marginal function». Examples are explained, including the classical cases of «sequential convergences». Finally, we apply the previous methods to the systematical investigation of sufficient conditions for a problem of stability of Stackelberg's equilibria.

(*) Indirizzo dell'A.: Faculté des Sciences de Limoges, Départment de Mathématiques, 123 Avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex, France.

Introduction.

Tout le monde a remarqué que, dans bien des cas, on utilise un symbole tel que $x_n \to x$ sans s'occuper de savoir si la convergence exprimée par cette flèche est relative à une topologie ou à autre chose (et quelle autre chose?) définie sur l'espace X auquel ces points appartiennent; de même, lorsqu'on dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ converge vers un point x, c'est-à-dire lorsque l'on dit qu'il contient le filtre $\mathcal{N}(x)$ des voisinages de x ($\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$), on s'occupe peu (ou pas) des propriétés des autres filtres $\mathcal{N}(x')$. Mais ici, on voit clairement que l'on a fait un choix particulier initial, pour tout point x de l'ensemble X sur lequel on travaille, d'un certain filtre $\mathcal{N}(x)$ (que l'on associe au point x) et qu'ensuite, on ne s'intéresse plus qu'à la propriété pour le filtre $\mathcal{F}$ d'être ou de ne pas être plus fin que ce filtre $\mathcal{N}(x)$, ce qui ne dépend pas des autres filtres $\mathcal{N}(x')$ éventuellement associés à d'autres points et ce qui ne dépend pas non plus du fait de savoir si les familles d'ensembles non vides $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}(x)$ sont effectivement stables par intersections finies, ni même d'autres propriétés. Ceci conduit à rappeler qu'un semi-filtre sur X est une famille non vide de parties non vides de X, stable par sur-ensemble, et à dire que *l'ensemble X est muni d'une semi-convergence θ* si, à tout point x de X, on a associé une famille $\theta(x)$ de semi-filtres (que l'on peut dire initialement convergents vers x).

On voit combien cette structure d'espace semi-convergentiel (X, θ) est pauvre et cependant elle nous suffira presque toujours dans les problèmes de stabilité! Pour traiter ces problèmes que l'on pourrait d'ailleurs aussi bien appeler problèmes de convergence, nous utiliserons le langage des Γ-limites introduites par E. De Giorgi - T. Franzoni [D.Geo-Fra] et adaptées ici à notre structure d'espaces semi-convergentiels: étant donné des espaces semi-convergentiels $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et une fonction f de l'espace produit $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ à valeurs dans un treillis complet T, une Γ-limite, $\Gamma(\cdot)f$, de f est elle aussi une fonction de $X_1 \times X_2 \times \ldots, \times X_n$ dans T. Pour une partie A de $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, la Γ-limite, $\Gamma(\cdot)A$, de A est elle aussi une partie de $X_1 \times X_2 \times \ldots, \times X_n$.

Toutes les notions précédentes sont développées en détail dans les trois premiers paragraphes du chapitre I.

Dans un grand nombre de situation, un ensemble A s'exprime par une inégalité entre fonctions: $A = \{f \leq g\}$ (par exemple, A pourrait être l'ensemble des points où f atteint son minimum, ou l'ensemble des points selles d'une fonction, etc); si f et g sont susceptibles de varier, autrement dit si on dispose de familles (qui peuvent être des suites) de fonctions $(f_i)_i$ et $(g_i)_i$, que sera la «limite» des ensembles A_i correspondants? Le § 5 répond à cette question, grosso modo sous la forme:

$$\Gamma(\alpha)(\{f_i \leqslant g_i\})_i \subset \{\Gamma(\beta)(f_i)_i \leqslant \Gamma(\gamma)(g_i)_i\};$$

(c'est le *théorème d'inclusion variationnelle*: la limite des ensembles définis par une inégalité entre fonctions est contenue dans l'ensemble défini par l'inégalité entre les limites des fonctions considérées, et où les «limites» sont en fait des Γ-limites). Il suffirait alors de savoir l'exactitude des inégalités $f \leqslant \Gamma(\beta)(f_i)_i$ et $\Gamma(\gamma)(g_i)_i \leqslant g$ pour pouvoir affirmer:

$$\Gamma(\alpha)(\{f_i \leqslant g_i\}) \subset \{f \leqslant g\}.$$

On voit comme ce théorème peut être «pratique» pour la recherche de conditions suffisantes. Il est une conséquence immédiate d'une certaine Γ-inégalité.

Une *Γ-inégalité* est une proposition qui s'exprime sous la forme d'une inégalité et qui permet en quelque sorte de faire la synthèse entre deux informations; par exemple, et pour rester dans une écriture incomplète mais assez intuitive, une Γ-inégalité permettrait de donner les conditions (les «types de limites», définis ici par les symboles α, β, et γ) pour que:

$$\Gamma(\beta)(f_i)_i + \Gamma(\gamma)(g_i)_i \leqslant \Gamma(\alpha)(f_i + g_i)_i .$$

On connait déjà le rôle fondamental de ces Γ-inégalités [Dol-Mos]. Elles sont démontrées ici (§ 4), de façon élémentaire, dans le cadre d'un treillis complet et non pas seulement d'un treillis complet complètement distributif.

Disposant maintenant des outils fondamentaux que sont le théorème d'inclusion variationelle et les Γ-limites dans les espaces semi-convergentiels, nous introduisons au § 1 du chapitre II, la notion de relation $\Omega(\subset ZxX)$ dite *(τ, θ)-compactante* en un point z_0 de Z, où θ (resp. τ) est une semi-convergence sur X (resp. Z) (voir d'autres notions proches dans [Dol-Gre-Lec]). En langage topologique, on peut dire que Ω est (τ, θ)-compactante en z_0 si on peut trouver un point x de X tel que (z_0, x) appartienne à l'adhérence de Ω, pourvu que z_0 appartienne à l'adhérence de la projection de Ω sur Z. Une grande variété d'interprétations peut être donnée à cette notion suivant les choix des semi-convergences τ et θ. Il est à remarquer qu'appliquée à la relation $\{f \leqslant \lambda\}$, (et évidemment avec des hypothèses complémentaires (semi-continuité inférieure) sur le fonction f), la notion de relation compactante suffit à obtinir toutes les généralisations de théorèmes du type «une fonction s.c.i. sur un compact y atteint son minimum» ou du type si important de «semi-continuité inférieure de la fonction marginale».

On donne alors dans le § 2 des exemples d'application en insistant particulièrement sur les liens avec les convergences séquentielles.

Le troisième chapitre sert d'illustration des méthodes précédemment développées. Son prétexte est la *stabilité des équilibres de Stackelberg*. Nous montrons ainsi que l'emploi systématique des (semi-)convergences, des fonctions marginales, des relations compactantes et des Γ-limites permet de déterminer quelles propriétés sont naturellement à exiger par exemple ici pour la stabilité d'équilibres. Il est à remarquer que le théorème principal fait appel à deux convergences sur l'espace X et à pas moins de quatre (semi-)convergences sur l'espace Y(!), a priori sans rapport entre elles.

Terminons en notant qu'aucune connaissance préalable n'est nécessaire, ce qui explique la courte bibliographie. Les seuls résultats non démontrés ici (et que l'on n'utilisera qu'à titre d'exemples) seront ceux relatifs aux interprétations séquentielles de certaines Γ-limites et que l'on peut trouver dans l'article très complet de G. Greco [Gre$_2$] (voir aussi [Att]). On trouvera aussi dans [Att] des interprétations en termes de Γ-limites de nombreuses notions de «continuités» (épi-continuité, limites de Kuratowski, ...).

I. Convergence ou semi-convergence. Γ-limites.

I.1. Rappel sur les familles de parties d'un ensemble.

Soit X un ensemble non vide. Un *semi-filtre* $\mathcal{U}$ *sur* X est une famille non vide de parties non vides de X telle que:

$$\ll A \subset B \text{ et } A \in \mathcal{U} \text{ impliquent } B \in \mathcal{U} \gg .$$

Un filtre sur X est ainsi un semi-filtre stable par intersections finies.

Une famille $\mathcal{B}$ de parties de X est une *base d'un (semi-)filtre* $\mathcal{U}$ si $\mathcal{B}$ est une sous famille de $\mathcal{U}$ et si tout élément de $\mathcal{U}$ contient un élément de $\mathcal{B}$. On voit donc qu'il suffit que la famille $\mathcal{B}$ soit formée de parties non vides pour être une base de semi-filtre.

Si $\mathcal{U}$ est un semi-filtre sur X, on définit son *centre* $\mathcal{U}^0$ et sa *grille*

$\mathcal{U}^\#$[Cho] par:

$$\mathcal{U}^0 = \{A \subset X / \forall U \in \mathcal{U} A \cap U \in \mathcal{U}\} \qquad \mathcal{U}^\# = \{A \subset X / \forall U \in \mathcal{U} A \cap U \neq \emptyset\}.$$

$\mathcal{U}^0$ est un filtre mais $\mathcal{U}^\#$ n'est en général qu'un semi-filtre; de plus $\mathcal{U}^0 \subset \subset \mathcal{U}^\#$ et aussi $\mathcal{U}^0 \subset \mathcal{U}$, ce qui ne serait pas vrai si on ne supposait pas qu'un semi-filtre est une famille non vide. Remarquons que si $\mathcal{U}$ est un filtre, alors $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}$ et donc aussi $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^\#$.

L'importance de la notion de grille tient au fait que $\mathcal{U}^{\#\#} = \mathcal{U}$ pour tout semi-filtre $\mathcal{U}$.

Etant donné deux familles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de parties de X, on note $\mathcal{M} \vee \mathcal{N}$ l'ensemble des parties de X de la forme $M \cap N$ avec $M \in \mathcal{M}$ et $N \in \mathcal{N}$; lorsque $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, il nous arrivera de dire que $\mathcal{N}$ est plus fin que $\mathcal{M}$.

Si Ω est une partie d'un espace produit $Z \times X$ (on dit aussi que Ω est une relation dans $Z \times X$), on note Ω^- la *relation inverse* dans $Z \times X$ définie par:

$$(x, z) \in \Omega^- \Leftrightarrow (z, x) \in \Omega.$$

Pour z fixé dans Z, l'image (dans X) de z par Ω est l'ensemble:

$$\Omega z := \{u \in X / (z, u) \in \Omega\};$$

pour une partie W de Z, ΩW (noté aussi $\Omega(W)$), image de W par Ω, est l'ensemble:

$$\Omega(W) := \bigcup_{w \in W} \Omega w;$$

enfin, pour une famille $\mathcal{W}$ de parties de Z, $\Omega(\mathcal{W})$, image de $\mathcal{W}$ par Ω, est la famille de parties de X de la forme $\Omega(W)$ lorsque W décrit $\mathcal{W}$:

$$\Omega(\mathcal{W}) := \{\Omega(W) / W \in \mathcal{W}\}.$$

Il est alors utile de noter le fait suivant, dont la vérification est immédiate: si $\mathcal{W}$ est un filtre sur Z, alors $\Omega(\mathcal{W})$ *est une base de filtre* (*sur* X) *si* (*et seulement si*) $\Omega(W) \neq \emptyset$ *pour tout* W *dan* $\mathcal{W}$.

•

Si f est une fonction définie sur un ensemble Z et à valeurs dans un ensemble ordonné, la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur Z sera notée indifféremment $\inf_Z f$ ou $\inf_{z \in Z} f(z)$ (resp. $\sup_Z f$ ou $\sup_{z \in Z} f(z)$).

Si g est une autre fonction définie sur Z, $\{f \leq g\}$ désigne l'ensemble des points w de Z tels que $f(w) \leq g(w)$.

Pour une partie C de Z, 1_C sera la fonction égale à 1 sur C et à 0 sur le complémentaire $Z \setminus C$ (ou C^c) de C dans Z.

I.2. Espaces convergentiels ou semi-convergentiels.

Soit X un emseble non vide.

DÉFINITION. Une *semi-convergence* (resp. une *convergence*) sur X est une application θ, définie sur X, qui, à tout point x de X, fait correspondre une famille (non vide!) $\theta(x)$ de semi-filtres (resp. de filtres) sur X. On dit alors que (X, θ) est un espace *semi-convergentiel* (resp. *convergentiel*). Dans ce cas, si pour un point particulier x_0, $\theta(x_0)$ est formé de filtres, on dira que X est *convergentiel en* x_0 ou que θ est convergentielle en x_0.

Les examples suivants d'espaces semi-convergentiels sont fondamentaux:

A) *Convergence induite par une topologie.*

Si l'ensemble X est muni d'une topologie ν, la convergence θ induite par ν est celle pour laquelle, pour tout x de X, $\theta(x)$ est réduit au filtre $\mathcal{N}(x)$ des ν-voisinages de X.

B) *Convergence séquentielle.*

Un filtre sur X est dit élémentaire s'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que la suite des ensembles $\{x_n / n \geqslant p\}$ (p décrivant $\mathbb{N}$) constitue une de ses bases. Si $\mathcal{E}$ est un tel filtre, on le notera simplement $\{(x_n)_n\}$.

On dira que la convergence θ sur X est séquentielle si, pour tout x dans X, $\theta(x)$ est formé de filtres élémentaires. Par exemple, si (X, ν) est un espace topologique, la convergence séquentielle ν_{seq} induite par la topologie ν est celle pour laquelle, pour tout x de X, ν_{seq} est la famille des filtres élémentaires associés aux suites ν-convergentes vers x.

C) *Semi-convergence canoniquement associée à une convergence.*

Si X est muni d'une convergence θ, la semi-convergence canoniquement associée à θ, notée $\theta^{\#}$ est définie pour tout x dans X par:

$$\theta^{\#}(x) := \{\mathcal{U}^{\#} / \mathcal{U} \in \theta(x)\}.$$

Par exemple, si $\theta(x)$ est réduit au filtre des sur-ensembles d'une partie A de X (dépendant éventuellement de x), alors $\theta^{\#}(x)$ est réduite à la famille des parties de X rencontrant A.

I.3. Γ-limites.

La notion de Γ-limite d'une fonction apparait comme une généralisation de celles de limite inférieure ou supérieure de cette fonction suivant un semi-filtre. Rappelons que si $\mathcal{U}$ est un semi-filtre sur un ensemble non vide X et f une fonction à valeurs dans un treillis complet (ensemble ordonné dans lequel toute partie admet une borne inférieure et une borne supérieure), les limites inférieure et supérieure de f suivant $\mathcal{U}$ sont respectivement:

$$\liminf_{\mathcal{U}} f = \sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{u \in U} f(u) \quad \text{et} \quad \liminf_{\mathcal{U}} f = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{u \in U} f(u);$$

elles seront aussi notées $\Gamma(\mathcal{U}^-)f$ et $\Gamma(\mathcal{U}^+)f$. La propriété fondamentale liant ces limites est que l'on peut passer de l'une à l'autre, si le treillis est en outre complètement distributif [Gre_1], en remplaçant un semi-filtre par sa grille:

$$\liminf_{\mathcal{U}} f = \limsup_{\mathcal{U}^\#} f \quad \text{et} \quad \liminf_{\mathcal{U}^\#} f = \limsup_{\mathcal{U}} f.$$

Définissons maintenant ce que nous entendons par Γ-limite. On écrira ci-dessous ext^- paur inf et ext^+ pour sup.

Soit f une fonction définie sur un espace produit $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ à valeurs dans un treillis complet (par exemple $\overline{\mathbb{R}}^I$); pour tout i, (X_i, θ_i) est un espace semi-convergentiel et α_i un signe ($\alpha_i = +$ ou $-$; on assimilera $+$ et $+1$, $-$ et -1, dans le paragraphe suivant). La valeur, au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de la fonction $\Gamma(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots X_n^{\alpha_n})f$ définie sur $X_1 \times \times X_2 \times \ldots \times X_n$ est:

$$[\Gamma(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n})f](x_1, x_2, \ldots, x_n) :=$$

$$:= \mathrm{ext}^{\alpha_1}_{\mathcal{U}_1 \in \theta_1(x_1)} \mathrm{ext}^{\alpha_2}_{\mathcal{U}_2 \in \theta_2(x_2)} \ldots \mathrm{ext}^{\alpha_1}_{\mathcal{U}_n \in \theta_n(x_n)} \Gamma(\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \mathcal{U}_2^{\alpha_2}, \ldots, \mathcal{U}_n^{\alpha_n})f$$

où la Γ-limite «classique» $\Gamma(\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \mathcal{U}_2^{\alpha_2}, \ldots, \mathcal{U}_n^{\alpha_n})f$ vaut:

$$\mathrm{ext}^{-\alpha_n}_{U_n \in \mathcal{U}_n} \ldots \mathrm{ext}^{-\alpha_2}_{U_2 \in \mathcal{U}_2} \mathrm{ext}^{-\alpha_1}_{U_1 \in \mathcal{U}_1} \mathrm{ext}^{\alpha_1}_{u_1 \in U_1} \mathrm{ext}^{\alpha_2}_{u_2 \in U_2} \ldots \mathrm{ext}^{\alpha_n}_{u_n \in U_n} f(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Si A est une partie de $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, on définit l'ensemble $\Gamma(\ldots)A$ par l'égalité:

$$1_{\Gamma(\ldots)A} = \Gamma(\ldots)(1_A).$$

(rappelons: 1_A est la fonction égale à 1 sur A et à 0 ailleurs).

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble I et pour tout i dans I, soit f_i une fonction définie sur $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$; adjoignons à I un nouvel élément, noté ∞; soit $X_0 = I \cup \{\infty\}$ et soit f la fonction définie sur $X_0 \times$

$\times X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ par:

$f(i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $f(\infty, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ arbitraire.

Pour tout signe α_0 bien déterminé et si θ_0 est la semi-convergence définie arbitrairement en tout point de I et réduite, au point ∞, au seul filtre $\mathscr{F}$, la valeur en $(\infty, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la fonction $\Gamma(X_0^{\alpha_0}, X_1^{\alpha_1}, \ldots X_n^{\alpha_n})f$ sera notée:

$$[\Gamma(\mathscr{F}^{\alpha_0}, X_1^{\alpha_1}, \ldots X_n^{\alpha_n})(f_i)_i](x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Lorsque I est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $\mathscr{F}$ le filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ (filtre dont une base est formée des ensembles de la forme $\{q/q \geqslant p\}$, p décrivant $\mathbb{N}$), on écrira:

$$[\Gamma(\mathbb{N}^{\alpha_0}, X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_n^{\alpha_n})(f_q)_q](x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

à la place de la Γ-limite précédente.

Exemples.

1) Si (X, θ) est un espace topologique,

1.1) $\Gamma(X^-)f$ est la «régularisée s.c.i.» de f;

1.2) $\Gamma(X^+)A$ est l'adhérence de A.

1.3) Pour une famille $(A_i)_{i \in I}$, l'ensemble I étant muni d'un filtre $\mathscr{F}$, $\Gamma(\mathscr{F}^-, X^+)(A_i)_i$ est la limite inférieure de Kuratowski de la famille $(A_i)_{i \in I}$, tandis que $\Gamma(\mathscr{F}^+, X^+)(A_i)_i$ est sa limite supérieure.

2) Utilisant les caractérisations des Γ-limites pour des filtres à base dénombrable ([Att], [Gre$_2$]), on obtiendra par exemple, pour des fonctions numériques f et f_n ($n \in \mathbb{N}$) sur un espace produit $X \times Y$, où X est muni d'une convergence séquentielle et où Y est un espace topologique à base dénombrable:

$$f(x, y) \leqslant [\Gamma(\mathbb{N}^-, X^-, Y^+)(f_n)_n](x, y)$$

si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, on peut trouver une suite $(y_n)_n$ convergeant vers y telle que:

$$f(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} f_n(x_n, y_n).$$

I.4. Γ-inégalités.

Nous montrons dans ce paragraphe ce qu'il est convenu d'appeler les «Γ-inégalités» obtenues par [Dol-Mos] (puis par [Dol-Gui-Lig-Mal]), après [But-D.Mas]. La présentation est ici élémentaire (aucune connaissance préalable sur le «soutien» d'une Γ-limite [«limitoïde particulière»] n'est nécessaire). En outre, nous améliorons les résultats connus puisque nous n'avons besoin que de treillis complets, au lieu de treillis complets complètement distributifs.

La «philosophie» générale de cette notion de Γ-inégalité peut se résumer ainsi: soit P et Q deux propriétés dépendants de plusieurs paramètres, dont un paramètre u, susceptible de décrire un ensemble X muni d'un filtre $\mathcal{U}$. Il s'agit, par exemple, de pouvoir affirmer si les propriétés P et Q seront vraies pour un même paramètre u. Les Γ-limites étant définies par des extrémalisations, il leur correspondra en général une formulation par une suite de quantificateurs et on pourra être en présence de «phrases» du type:

$$\ldots \exists \mathcal{U} \in \theta(x) \ldots \forall U \in \mathcal{U} \ldots \exists u \in U \ldots P(\ldots, u, \ldots), \tag{1}$$

$$\ldots \forall \mathcal{U} \in \theta(x) \ldots \exists U_0 \in \mathcal{U} \ldots \forall u \in U_0 \ldots Q(\ldots, u, \ldots). \tag{2}$$

Dans ce cas, on en déduit:

$$\left.\begin{matrix}\ldots\\ \\ \ldots\end{matrix}\right\} \exists \mathcal{U} \in \theta(x) \left\{\begin{matrix}\ldots\\ \\ \ldots\end{matrix}\right\} \forall U \in \mathcal{U} \left\{\begin{matrix}\ldots\\ \\ \ldots\end{matrix}\right\} \exists u \in U \left\{\begin{matrix}\ldots P(\ldots, u, \ldots),\\ \\ \ldots Q(\ldots, u, \ldots).\end{matrix}\right.$$

En effet, le choix de $\mathcal{U}$ étant fait par (1), pour un choix arbitraire d'un U dans $\mathcal{U}$, on peut appliquer la fin de (1) à $U_0 \cap U$, avec le U_0 venant de (2), et ainsi obtenir un u dans U (car dans $U_0 \cap U$) pour lequel les deux propriétés P et Q sont simultanément vraies. Evidemment, dans ce qui précède, nous avons fait comme si les pointillés n'existaient pas; c'est justement la force des Γ-inégalités que d'établir des résultats comme ci-dessus, même avec plusieurs paramètres.

Venons-en à l'exposé précis de ces Γ-inégalités.

Dans ce paragraphe, G, D et T sont trois treillis complets. On désigne par N une application de $G \times D$ dans T, croissante et «continue à droite» en chaque variable, ce qui signifie: si a, a' et a_i ($i \in I$) (resp. b, b' et b_i ($i \in I$)) sont des éléments de G (resp. D), alors:

$$a \leq a' \Rightarrow N(a, b) \leq N(a', b); \qquad a = \inf_{i \in I} a_i \Rightarrow N(a, b) = \inf_{i \in I} N(a_i, b);$$

$$b \leq b' \Rightarrow N(a, b) \leq N(a, b'); \qquad b = \inf_{i \in I} b_i \Rightarrow N(a, b) = \inf_{i \in I} N(a, b_i);$$

Si Z est un ensemble arbitraire et g, d deux fonctions de Z dans G,

D respectivement, on définit la fonction $N(g, d)$ de Z dans T par:

$$N(g, d)(w) = N(g(w), d(w)) \quad \text{pour tout } w \text{ dand } Z.$$

La fonction N fait donc le «mélange» des deux fonctions g et d.

Pour obtenir le résultat souhaité, nous utiliserons deux lemmes très simples dont les démonstrations sont laissées au lecteur.

LEMME I.4.1. *Soit α, β, γ des signes vérifiant $\alpha + 1 \leqslant \beta + \gamma$; alors*:

$$\operatorname{ext}_Z^\alpha N(g, d) \leqslant N(\operatorname{ext}_Z^\beta g, \operatorname{ext}_Z^\beta d).$$

Lorsque d est constant sur Z, on prendra $\alpha = \beta$; lorsque g est constant sur Z, on prendra $\alpha = \gamma$.

LEMME I.4.2. *Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathcal{P}(Z)$, à valeurs dans G, D respectivement. Soit $\mathcal{W}$ un semi-filtre sur Z. Alors*:

$$\sup_{L \in \mathcal{W}^0} \inf_{W \in W} N(\phi(W \cap L), \psi(W \cap L)) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} N(\inf_{\mathcal{W}} \phi, \sup_{\mathcal{W}} \psi) \quad \textit{si } \phi \textit{ est croissante}, & (4.2.1) \\ N(\sup_{\mathcal{W}} \phi, \inf_{\mathcal{W}} \psi) \quad \textit{si } \psi \textit{ est croissante}, & (4.2.2) \\ N(\inf_{\mathcal{W}} \phi, \inf_{\mathcal{W}} \psi) & \\ \qquad \textit{si } \phi \textit{ et } \psi \textit{ sont croissantes et is } \mathcal{W} \textit{ est un filtre}. & (4.2.3) \end{cases}$$

Dans les théorèmes qui suivent et qui énoncent des Γ-inégalités, g et d sont des fonctions définies sur $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ à valeurs dans G et D respectivement.

THÉORÈME I.4.3. *Pour tout i de 1 à n, soit α_i, β_i, γ_i des signes et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point fixé. Alors*:

$$[\Gamma(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}) N(g, d)](x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant N([\Gamma((X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}, \ldots, X_n^{\beta_n}) g], [\Gamma((X_1^{\gamma_1}, X_2^{\gamma_2}, \ldots, X_n^{\gamma_n}) d])(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pourvu que, pour tout i fixé, l'espace X_i est convergentiel en x_i et $\alpha_i + 1 \leqslant \beta_i + \gamma_i$, ou d est constant sur X_i et $\alpha_i = \beta_i$ ou g est constant sur X_i et $\alpha_i = \gamma_i$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que, pour $\mathcal{U}_i$ dans $\theta_i(x_i)$ ($i = 1$ à n), on a:

$$(*)\qquad \Gamma(\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \dots \mathcal{U}_n^{\alpha_n})N(g, d) \leqslant N(\Gamma(\mathcal{U}_1^{\beta_1}, \dots, \mathcal{U}_n^{\beta_n})g, \Gamma(\mathcal{U}_1^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{U}_n^{\gamma_n})d)$$

En effet, par le Lemma I.4.1, on aura alors:

$$\operatorname{ext}^{\alpha_n}_{\mathcal{U}_n \in \theta_n(x_n)}[\Gamma(\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{U}_n^{\alpha_n})N(g, d)] \leqslant$$

$$\leqslant N(\operatorname{ext}^{\beta'_n}_{\mathcal{U}_n \in \theta_n(x_n)}[\Gamma(\mathcal{U}_1^{\beta_1}, \dots, \mathcal{U}_n^{\beta_n})g], \operatorname{ext}^{\gamma'_n}_{\mathcal{U}_n \in \theta_n(x_n)}[\Gamma(\mathcal{U}_1^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{U}_n^{\gamma_n})d])$$

avec $\alpha_n + 1 \leqslant \beta'_n + \gamma'_n$ (et les conventions particulières si g ou d est constant sur X_n); il suffit donc de prendre $\beta'_n = \beta_n$ et $\gamma'_n = \gamma_n$; on recommence avec des extrémalisations sur les $\mathcal{U}_{n-1}, \dots, \mathcal{U}_1$; d'où le résultat cherché.

Montrons donc ($*$). La démonstration se fait par récurrence sur n.

Ecrivons $\alpha. = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$, $\mathcal{U}^{\alpha\cdot} = (\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\alpha_{n-1}})$, et de même avec des $\beta.$ et $\gamma.$, et supprimons l'indice n. On commence par ne pas lire dans ce qui suit ce qui se trouve entre accolades: ceci correspond à la preuve pour $n = 1$; puis on revient à ($**$) et on lit la totalité des écritures; la preuve est alors complète.

Evidemment, en première lecture, g et d sont des fonctions d'une seule variable tandis qu'en seconde lecture, ce sont des fonctions de n variables (fonctions définies sur $X_1 \times X_2 \times \dots \times X$).

($**$) A) *On suppose X convergentiel en x et $\alpha + 1 \leqslant \beta + \gamma$.*

Cas où $\alpha = 1$ (et donc $\beta = \gamma = 1$). On peut écrire:

$$[\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\}\,\mathcal{U}^+)]N(g, d) = \inf_{U \in \mathcal{U}}\{\Gamma(\mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}(\sup_U N(g, d)) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{U \in \mathcal{U}}\{\Gamma(\mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}(N(\sup_U g, \sup_U d)) \qquad \text{(Lemme I.4.1)}$$

$$\{\leqslant \inf_{U \in \mathcal{U}} N(\Gamma(\mathcal{U}^{\beta\cdot})(\sup_U g), \Phi(\mathcal{U}^{\gamma\cdot})(\sup_U d)) \qquad \text{(récurrence)}\}$$

$$\leqslant N(\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\beta_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\beta_{n-1}},\}\,\mathcal{U}^+)g, \Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\gamma_{n-1}},\}\,\mathcal{U}^+)d)$$

(Lemme I.4.2)

où le Lemme I.4.2 est appliqué avec:

$$\phi(H) = \{\Gamma(\mathcal{U}^{\beta\cdot})\}(\sup_H g)) \quad \text{et} \quad \psi(H) = \{\Gamma(\mathcal{U}^{\gamma\cdot})\}(\sup_H d).$$

Cas où $\alpha = -1$. On peut écrire:

$$[\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^-)]N(g, d) = \sup_{U^0 \in \mathcal{U}} \{\Gamma(\mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}\,(\inf_{U^0} N(g, d)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{U^0 \in \mathcal{U}} \inf_{U \in \mathcal{U}} \{\Gamma(\mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}\,(\inf_{U \cap U^0} N(g, d)) \quad \text{(évident car } U^0 \supset U \cap U^0) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{U^0 \in \mathcal{U}} \inf_{U \in \mathcal{U}} \{\Gamma \mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}\,(N(\mathrm{ext}^{\beta}_{U \cap U^0} g,\ \mathrm{ext}^{\gamma}_{U \cap U^0} d)) \quad \text{(Lemme I.4.1)}$$

$$\{\leqslant \sup_{U^0 \in \mathcal{U}} \inf_{U \in \mathcal{U}} N(\Gamma(\mathcal{U}^{\beta\cdot})\,(\mathrm{ext}^{\beta}_{U \cap U^0} g),\ \Gamma(\mathcal{U}^{\gamma\cdot})(\mathrm{ext}^{\gamma}_{U \cap U^0} d)) \quad \text{(récurrence)}\}$$

$$\leqslant \begin{cases} N(\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\beta_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\beta_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^-)g,\ \Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\gamma_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^+)d) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \beta = -1 \text{ et } \gamma = +1, \\ N(\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\beta_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\beta_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^+)g,\ \Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\gamma_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^+)d) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \beta = +1 \text{ et } \gamma = +1, \end{cases}$$

où, pour obtenir ces dernières inégalités le Lemme I.4.2 est appliqué avec:

$$\phi(H) = \{\Gamma(\mathcal{U}^{\beta\cdot})\}\,(\inf_H g) \quad \text{et} \quad \psi(H) = \{\Gamma(\mathcal{U}^{\gamma\cdot})\}\,(\sup_H d)$$

$$\text{si } \beta = -1 \text{ et } \gamma = +1,$$

$$\phi(H) = \{\Gamma(\mathcal{U}^{\beta\cdot})\}\,(\sup_H g) \quad \text{et} \quad \psi(H) = \{\Gamma(\mathcal{U}^{\gamma\cdot})\}\,(\sup_H d)$$

$$\text{si } \beta = +1 \text{ et } \gamma = +1.$$

B) *d est constant sur X et $\alpha = \beta$ ou g est constant sur X et $\alpha = \gamma$.*

On supposera d indépendant de X et $\alpha = \beta$. On peut écrire:

$$[\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^{\alpha})]N(g, d) = \mathrm{ext}^{-\alpha}_{U \in \mathcal{U}} \{\Gamma(\mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}\,(\mathrm{ext}^{\alpha}_U N(g, d))$$

$$\leqslant \mathrm{ext}^{-\alpha}_{U \in \mathcal{U}} \{\Gamma(\mathcal{U}^{\alpha\cdot})\}\,(N(\mathrm{ext}^{\alpha}_U g, d)) \quad \text{(Lemme I.4.1)}$$

$$\{\leqslant \mathrm{ext}^{-\alpha}_{U \in \mathcal{U}} N(\Gamma(\mathcal{U}^{\beta\cdot})\,(\mathrm{ext}^{\alpha}_U g),\ \Gamma(\mathcal{U}^{\gamma\cdot})\,d)) \quad \text{(récurrence)}\}$$

$$\leqslant N(\Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\beta_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\beta_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^{\alpha})g,\ \Gamma(\{\mathcal{U}_1^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{U}_{n-1}^{\gamma_{n-1}},\}\, \mathcal{U}^{\gamma})\,d)$$

$$\text{(Lemme I.4.1)}$$

Le théorème est ainsi entièrement démontré. ■

REMARQUE. Dans le Lemme I.4.1, si la fonction d est constante sur

Z, on peut évidemment remplacer la condition $\alpha = \beta$ par $\alpha \leqslant \beta$. Cependant, dans le Théorème I.4.3, une telle substitution n'est pas possible en général; elle impliquerait une propriété du type:

$$\lim_{\mathcal{U}} \inf f \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \sup f,$$

propriété qui n'est pas toujours vraie car $\mathcal{U}$ n'étant qu'un semi-filtre n'est pas nécessairement contenu dans sa grille $\mathcal{U}^{\#}$.

EXEMPLES POUR N.

1) $G = D = T = \overline{\mathbb{R}}$ on pourra prendre $N(a, b) = a \wedge b$ ou $a \vee b$ ou $a \dot{+} b$ (rappelons que $\dot{+}$ est le prolongement de l'addition à $\overline{\mathbb{R}} + \overline{\mathbb{R}}$ tout entier tel que $(+\infty) \dot{+} (-\infty) = +\infty$). Ce dernier cas est le plus classique; appliqué aux fonctions, et après une extrémalisation inférieure, il permet par exemple d'obtenir l'inf-convolution de deux fonctions:

$$[\inf_{x \in X} N(f, g)](y) = \inf_{x \in X} \{f(x, y) \dot{+} g(x, y)\}.$$

2) Si $G = D = T$, on pourra toujours prendre $N(a, b) = a \wedge b$ et si T est un treillis sup-distributif (c'est-à-dire si $(\bigwedge_{i \in I} a_i) \vee b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \vee b)$), on pourra prendre $N(a, b) = a \vee b$.

Soit maintenant M une fonction sur $G \times D$, à valeurs dans T, croissante et continue à droite sur D, et décroissante et continue à gauche sur G:

$$a \leqslant a' \Rightarrow M(a, b) \geqslant M(a', b) \qquad \text{et} \qquad a = \sup_{i \in I} a_i \Rightarrow M(a, b) = \inf_{i \in I} M(a_i, b).$$

Si on munissait l'ensemble G de la relation d'ordre opposé (un sup dans G deviendrait un inf et réciproquement) la fonction M serait alors croissante et continue à droite en chaque variable et on pourrait donc lui appliquer le théorème précédent; on obtient ainsi:

THÉORÈME I.4.4. *Pour tout i de 1 à n, soit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ des signes et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point fixé. Alors:*

$$[\Gamma(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}) M(g, d)](x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant M([\Gamma(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}, \ldots, X_n^{\beta_n}) g], [\Gamma(X_1^{\gamma_1}, X_2^{\gamma_2}, \ldots, X_n^{\gamma_n}) d])(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pourvu que, pour tout i fixé, l'espace X_i est convergentiel en x_i et $\alpha_i + 1 \leqslant \gamma_i - \beta_i$, ou bien d est constant sur X_i et $\alpha_i = -\beta_i$ ou g est constant sur X_i et $\alpha_i = \gamma_i$.

Exemples pour M.

1) De façon analogue à ce qu'on a dit pour le choix de N, on pourra prendre $G = D = T = \overline{\mathbb{R}}$ et $M(a, b) = b \dot{+} (-a)$.

2) Dans le paragraphe suivant, nous prendrons $M(a, b) = 1$ si $a \leqslant b$ et 0 sinon, avec pour $G = D = T$ un treillis complet.

De même, si P est une fonction sur $G \times D$ à valeurs dans T, croissante et continue à gauche en chaque variable:

$$a \leqslant a' \Rightarrow P(a, b) \leqslant P(a', b), \qquad a = \sup_{i \in I} a_i \Rightarrow P(a, b) = \sup_{i \in I} P(a_i, b),$$

$$b \leqslant b' \Rightarrow P(a, b) \leqslant P(a, b'), \qquad b = \sup_{i \in I} b_i \Rightarrow P(a, b) = \sup_{i \in I} P(a, b_i),$$

on obtiendra, à partir du Théorème I.4.3 et en changeant les ordres sur G, D et T par les ordres opposés:

Théorème I.4.5. *Pour tout i de 1 à n, soit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ des signes et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point fixé. Alors:*

$$P([\Gamma(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}, \ldots, X_n^{\beta_n}) g], [\Gamma(X_1^{\gamma_1}, X_2^{\gamma_2}, \ldots, X_n^{\gamma_n}) d])(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\leqslant [\Gamma(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}) P(g, d)](x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pourvu que, pour tout i fixé, l'esapce X_i est convergentiel en x_i et $\gamma_i + \beta_i + 1 \leqslant \alpha_i$, ou bien d est constant sur X_i et $\alpha_i = \beta_i$ ou g est constant sur X_i et $\alpha_i = \gamma_i$.

Exemples pour P.

1) $G = D = \mathscr{P}(X)$, où X est un espace topologique et $T = T_F$ est le treillis complet des parties fermées de X; rappelons que la borne supérieure d'une famille $\mathcal{D}$ d'éléments de T_F est l'adhérence de la réunion de ces éléments et que la borne inférieure de cette famille est l'intersection des éléments de $\mathcal{D}$. On pourra alors par exemple définir P par $P(A, B) = \overline{A \cap B}$, ou aussi, si X est un espace vectoriel (topologique) par $P(A, B) = \overline{A + B}$.

Si maintenant $T = T_{CF}$ est le treillis complet des parties convexes fermées de X on pourra prendre $P(A, B) = \overline{\mathrm{co}\,(A \cap B)}$ (enveloppe convexe fermée de $A \cap B$).

2) Soit A un anneau (commutatif unitaire) et soir $\mathfrak{J}$, ordonné par inclusion, le treillis des idéaux de A. On pourra prendre $G = D = T = \mathfrak{J}$ et $P(I, J) = I \cdot J$ (idéal formé des sommes finies de produits d'un élément de l'idéal I et d'un élément de l'idéal J).

3) De façon duale à ce qu'on a dit pour N, on pourra choisir $G = D = T$ un treillis inf-distributif (c'est-à-dire vérifiant $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge b))$, et $P(a, b) = a \wedge b$.

I.5. Limites d'inégalités fonctionelles.

Nous généralisons ici le résultat bien connu suivant:

«si g et d sont deux fonctions réelles définies sur un même espace topologique et si $g^{\wedge}$ (resp. $d^{\vee}$) est la régularisée s.c.i. de g (resp. s.c.s. de d), alors l'adhérence de l'ensemble $\{g \leqslant d\}$ est contenue dans l'ensemble $\{g^{\wedge} \leqslant d^{\vee}\}$».

Considérons donc deux fonctions g et d définies sur un espace produit $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ et à valeurs dans un treillis complet T; pour tout i, (X_i, θ_i) est un espace semi-convergentiel, x_i un point fixé de X_i et $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ son des signes.

Théorème d'inclusion variationnelle (T.I.V.). *L'inclusion*

$$\Gamma(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n})(\{g \leqslant d\}) \subset$$
$$\subset \{(\Gamma(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}, \ldots, X_n^{\beta_n})g \leqslant \Gamma(X_1^{\gamma_1}, X_2^{\gamma_2}, \ldots, X_n^{\gamma_n})d\}$$

est satisfaite, pourvu que, pour tout i fixé et pour tout point x_i de X_i, l'espace X_i est convergentiel en x_i et $\alpha_i + 1 \leqslant \gamma_i - \beta_i$, ou d est constant sur X_i et $\alpha_i = -\beta_i$ ou g est constant sur X_i et $\alpha_i = \gamma_i$.

Il suffit en effet d'appliquer le Théorème I.4.4 avec $G = D = T$ et $M(a, b) = 1$ si $a \leqslant b$ et $M(a, b) = 0$ sinon; par conséquent, pour des fonctions g et d, $M(g, d) = 1_{\{g \leqslant d\}}$. ■

II. Relations compactantes.

Dans ce chapitre, (X, θ), (Y, σ) et (Z, τ) sont des espaces semi-convergentiels. On travaillera avec les notations:

$$x \in X \text{ (resp. } y \in Y, z \in Z) \qquad \mathcal{U} \in \theta(x) \text{ (resp. } \mathcal{V} \in \sigma(y), \mathcal{W} \in \tau(z))$$

$$U \in \mathcal{U} \text{ (resp. } V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}), \qquad u \in U \text{((resp. } v \in V, w \in W)$$

de sorte que le nom même d'une lettre lue permette immédiatement de savoir exactement l'objet qu'elle représente; z_0 est un point fixé de Z.

II.1. Définition et théorèmes fondamentaux.

Nous introduisons ci-dessous la notion de relation compactante; elle apparait comme étant la plus faible permettant d'obtenir les théorèmes classiques du type «semi-continuité de la fonction marginale» ou du type «une fonction s.c.i. sur un compact y atteint son minimun». Il est à remarquer, qu'à ce stade, aucune propriété d'intersection non vide (on pense aux filtres) n'est exigée; c'est pour cela que la définition ne fait appel qu'à des espaces semi-convergentiels.

DÉFINITION. Une relation Ω dans $Z \times X$ ($\Omega \subset Z \times X$) est dite (τ, θ)-compactante en z_0 si l'implication suivante est satisfaite:

$$z_0 \in \Gamma(Z^+)(\Omega^- X) \Rightarrow z_0 \in (\Gamma(Z^+, X^+)\Omega)^- X.$$

Comme on le voit cette notion peut aussi s'écrire:

$$[\Gamma(Z^+)(\sup_{x \in X} 1_\Omega(., x))](z_0) \leqslant \sup_{x \in X} ([\Gamma(Z^+, X^+) 1_\Omega](z_0, x))$$

(terme de gauche nul ou terme de droite égal à 1); elle ne dépend que de la famille de semi-filtres associés au point z_0 de Z; on dira donc également pour exprimer la propriété précédente que la relation Ω est θ-*compactante en* $\tau(z_0)$.

Dans le théorème ci-dessous, f est une application de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ et η désigne la convergence naturelle sur $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire, pour $r \in \overline{\mathbb{R}}$, $\eta(r)$ est réduit au filtre $\mathcal{N}(r)$ des voisinages de r, pour la topologie usuelle).

THÉORÈME II.1.1. *On suppose*:

(*a*) *la fonction f semi-continue inférieurement sur X, c'est-à-dire, pour tout x dans X*:

$$f(x) \leqslant [\Gamma(X^-)f](x);$$

(*b*) *la relation «épigraphe» $\{f \leqslant \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\}$ considérée dans $\overline{\mathbb{R}} \times X$, (η, θ)-compactante en λ, avec $\lambda = \inf_{x \in X} f(x)$.*

Alors f atteint son minimum: $\exists x \in X: f(x) = \lambda$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\lambda = \inf_{x \in X} f(x)$, on pourra trouver, pour tout voisinage R de λ, un nombre r dans R et un point x dans X tels que $f(x) \leqslant r$, ce qui peut s'exprimer par:

$$\forall R \in \mathcal{N}(\lambda) \qquad \exists r \in R \qquad [\sup_{x \in X} 1_{\{f \leqslant \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\}}(\cdot, x)](r) = 1$$

ou encore par:

$$[\Gamma(\overline{\mathbb{R}}^+)(\sup_{x \in X} 1_{\{f \leqslant \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\}}(\cdot, x)](\lambda) = 1 .$$

Comme la relation $\{f \leqslant \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\}$ est (η, θ)-compactante en λ, on peut alors trouver un point x dans X tel que:

$$(\lambda, x) \in \Gamma(\overline{\mathbb{R}}^+, X^+)(\{f \leqslant \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\}) .$$

A fortiori, on aura par le théorème d'inclusion variationnelle, comme f est indépendant de $\overline{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}$ de X:

$$(\lambda, x) \in \{\Gamma(X^-)f \leqslant \Gamma(\overline{\mathbb{R}}^+)\mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\} .$$

Il reste à utiliser la semi-continuité inférieure de f en x, et la semi-continuité supérieure de $\mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}$ en λ, pour obtenir le résultat: $(\lambda, x) \in \{f \leqslant \leqslant \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}}\}$. ■

Passons maintenant à des propriétés liées à des fonctions de deux variables. Dans le théorème ci-dessous, f est une fonction de $Z \times X$ dans un treillis complet complètement distributif T, et pour tout λ dans T, Ω_λ est la relation $\{f \leqslant \lambda\}$ (dans $Z \times X$).

THÉORÈME II.1.2. *Si, pour tout λ dans T, les relations Ω_λ sont (τ, θ)-compactantes en z_0 alors*:

$$\inf_{x \in X} [\Gamma(Z^-, X^-)f](z_0, x) \leqslant [\Gamma(Z^-)(\inf_{x \in X} f(\cdot, x))](z_0) .$$

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer le théorème en supposant que T est un sous-treillis complet de l'intervalle réel $[0,1]$.

Posons

$$a := [\Gamma(Z^-)(\inf_{x \in X} f(\cdot, x))](z_0) \qquad \text{et} \qquad b := \inf_{x \in X} [\Gamma(Z^-, X^-)f](z_0, x) .$$

On a toujours $a \leqslant b$. Il s'agit donc en fait de démontrer l'égalité entre ces deux éléments et pour cela supposons le contraire: $a < b$. Deux cas sont à considérer suivant qu'il existe ou non des éléments strictement compris entre a et b. Dans le premier cas, on choisira un élément λ de T, $a < \lambda < b$, et dans le second cas, on choisira $\lambda := a$.

Comme la relation Ω_λ est (τ, θ)-compactante en z_0 on a:

$$[\Gamma(Z^+)(\sup_{x \in X} 1_{\Omega_\lambda}(., x))](z_0) = 0$$

$$\text{ou} \quad \sup_{x \in X}([\Gamma(Z^+, X^+) 1_{\Omega_\lambda}](z_0, x)) = 1 .$$

Si $[\Gamma(Z^+)(\sup_{x \in X} 1_{\Omega_\lambda}(., x))](z_0) = 0$, tenant compte du fait que l'ordre sur T est total, on a:

$$\forall \mathcal{W} \in \tau(z_0) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad \forall w \in W \quad \forall x \in X \quad \lambda < f(w, x) .$$

Linégalité $\lambda < f(w, x)$ implique, dans le premier cas et de façon évidente $\lambda \leqslant f(w, x)$, tandis que dans le second cas elle implique $b \leqslant f(w, x)$. En prenant des extrémalisations successives, on obtiendra alors $\lambda \leqslant a$ (premier cas) ou $b \leqslant a$ (second cas), ce qui contredit les inégalités initiales. Si $\sup_{x \in X}([\Gamma(Z^+, X^+) 1_{\Omega_\lambda}](z_0, x)) = 1$, pour un certain x, on aura, grâce au T.I.V.: $[\Gamma(Z^-, X^-) f](z_0, x) \leqslant \lambda$, et donc $b \leqslant \lambda$, ce qui, là aussi contredit les inégalités de départ. Le théorème est donc démontré lorsque T est un sous-trellis complet de $[0, 1]$.

Supposons maintenant que T soit un produit de sous-treillis complets de $[0, 1]$: $T := \prod_{i \in I} T_i$. Si $f := (f_i)_i$ est l'application considérée de $Z \times X$ dans T, notons Ω_{i, α_i} la relation $\{f_i \leqslant \alpha_i\}$ dans $Z \times X$ (pour i dans I et α_i dans T_i fixés) et enfin notons d_i le plus grand élément de T_i. Choisissons un indice j arbitrairement dans I et un nombre α_j dans T_j; si $\lambda := (\lambda_i)_i$ avec $\lambda_j := \alpha_j$ et $\lambda_i := d_i$ pour $i \neq j$, et comme la relation Ω_λ est compactante en z_0, on voit facilment que la relation Ω_{j, α_j} est elle-aussi compactante en z_0; la première partie de la démonstration prouve donc que la conclusion du théorème est vraie pour chacune des fonctions composantes f_j, et le théorème est donc démontré dans le cas considéré.

Enfin dans le cas général où T est un treillis complet complètement distributif, on sait ([Ran], [Gre_3]) que T est isomorphe à un produit de sous-treillis complets de $[0, 1]$; le résultat final découle donc de ce qui précède. ■

Dans les deux prochains énoncés, on suppose que T est une chaîne complète (treillis complet totalement ordonné) dont le plus petit élément est noté $-\infty$.

COROLLAIRE II.1.3 (*Semi-continuité de la fonction marginale*). *On suppose*:

(*a*) *la fonction* f *semi-continue inférieurement en tout point* (z_0, x), x *décrivant* X, *c'est-à-dire* $f(z_0, x) \leq [\Gamma(Z^-, X^-)f](z_0, x)$ *pour tout* x *dans* X;

(*b*) *la relation* $\Omega_\lambda(\tau, \theta)$*-compactante en* z_0, *pour tout* λ *dans* T *tel que*

$$-\infty < \lambda < \inf_{x \in X} f(z_0, x).$$

Alors la fonction marginale $\inf_{x \in X} f(\cdot, x)$ *est semi-continue inférieurement en* z_0:

$$\inf_{x \in X} f(z_0, x) \leq [\Gamma(Z^-)(\inf_{x \in X} f(\cdot, x))](z_0).$$

Il suffit en effet d'appliquer le Théorème II.1.2 à la fonction $f \wedge m_0$, avec $m_0 := \inf_{x \in X} f(z_0, x)$. ∎

Continuons par un énoncé où la fonction f est définie sur l'espace produit $Z \times X \times Y$ et où y_0 est un point fixé de Y; on y impose la *stabilité de la semi-convergence* σ, c'est-à-dire que $\sigma(y_0)$ soit réduit à un seul semi-filtre noté $\mathcal{N}_\sigma(y_0)$. Enfin, pour λ dans T, la relation $\Omega_\lambda = \{f \leq \lambda\}$ est considérée comme une partie de $Y \times (Z \times X)$ (afin d'éviter d'avoir à utiliser la relation inverse) et pour toute partie V de Y, on pose:

$$[\Omega_\lambda](V) := \bigcap_{v \in V} \Omega_\lambda v := \{\sup_{v \in V} f(.,., v) \leq \lambda\};$$

c'est une relation dans $Z \times X$, dite polaire de V relativement à Ω_λ.

THÉORÈME II.1.4. *On suppose*:

(*a*) *pour tout* x *dans* X:

$$f(z_0, x, y_0) \leq [\Gamma(Z^-, X^-, Y^+)f](z_0, x, y_0);$$

(*b*) *pour tout* λ *dans* T, $-\infty < \lambda < \inf_{x \in X} f(z_0, x, y_0)$ *et pour tout* V *dans* $\mathcal{N}_\sigma(y_0)$:

(*b*1) *la relation* $[\Omega_\lambda](V)$ (τ, θ)*-compactante en* z_0

(*b*2) $[\Gamma(Z^+)(\inf_V \sup_X 1_{\Omega_\lambda})](z_0) \leq [\Gamma(Z^+)(\sup_X \inf_V 1_{\Omega_\lambda})](z_0)$.

Alors l'inégalité suivante est satisfaite par la fonction marginale $\inf_X f$:

$$\inf_{x \in X} f(z_0, x, y_0) \leq [\Gamma(Z^-, Y^+)(\inf_{x \in X} f(., x, .))](z_0, y_0).$$

DÉMONSTRATION. Soit λ et V comme indiqué dans l'énoncé.

Puisque

$$\sup_X \inf_V 1_{\Omega_\lambda} = \sup_X 1_{[\Omega_\lambda](V)}$$

les propriétés (*b*1) et (*b*2) impliquent:

$$(*) \qquad [\Gamma(Z^+)(\inf_V \sup_X 1_{\Omega_\lambda})](z_0) \leq \sup_{x\in X} ([\Gamma(Z^+, X^+)[1_{[\Omega_\lambda](V)}](z_0, x)).$$

Si le terme de droite de cette inégalité $(*)$ valait 1, il existerait un point x dans X tel que:

$$(z_0, x) \in [\Gamma(Z^+, X^+)(\{\sup_V f \leq \lambda\})] \qquad (\text{car } [\Omega_\lambda](V) = \{\sup_V f \leq \lambda\})$$

et par le théorème d'inclusion variationnelle, on aurait:

$$(z_0, x) \in \{[\Gamma(Z^-, X^-)(\sup_V f)] \leq \lambda\},$$

ce qui implique a fortiori (on prend la borne inférieure pour les V dans $\mathcal{N}_\sigma(y_0)$, et on permute des «inf»; c'est ici qu'intervient la stabilité de σ en y_0: si elle n'était pas supposée, il faudrait aussi permuter un «inf» et un «sup»):

$$[\Gamma(Z^-, X^-, Y^+)f](z_0, x, y_0) \leq \lambda$$

contrairement au choix par (*a*), de λ. Aussi, nécessairement, le terme de gauche de $(*)$ vaut 0, ce qui peut s'écrire $1 = [\Gamma(Z^-)\cdot$ $\cdot(\sup_V \inf_X 1_{\{\lambda < f\}})](z_0)$; alors l'inégalité, entre fonctions sur $Z \times Y$, $\inf_X 1_{\{\lambda < f\}} \leq 1_{\{\lambda \leq \inf_X f\}}$, implique que:

$$1 = [\Gamma(Z^-)(\sup_V 1_{\{\lambda < f\}} \leq 1_{\{\lambda \leq \inf_X f\}})](z_0),$$

et aussi, en prenant une borne inférieure pour les V décrivant $\mathcal{N}_\sigma(y_0)$:

$$1 = [\Gamma(Z^-, Y^+)(1_{\{\lambda \leq \inf_X f\}})](z_0, y_o).$$

Le résultant final s'obtient par application du T.I.V. et le choix arbitraire de λ. ■

Notons que, lorsque l'espace (Z, τ) est convergentiel en z_0, le théorème d'inclusion variationnelle permet de dire que (*b*2) se réalise si:

$$z_0 \in \Gamma(Z^-)\left\{\inf_V \sup_X 1_{\Omega_\lambda} \leq \sup_X \inf_V 1_{\Omega_\lambda}\right\}.$$

Une *traduction* de cette écriture est la condition:

$$(b2')\ \forall \mathcal{W} \in \tau(z_0) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad \forall w \in W$$

$$\left[\bigcap_{v \in V}\{f(w,.,v) \leq \lambda\} = \emptyset \Rightarrow \exists v \in V \quad \{f(w,.,v) \leq \lambda\} = \emptyset\right].$$

REMARQUE. Dans l'énoncé prédédent (et ceci s'adapte pour les autres théorèmes), il suffit bien naturellement que les propriétés exigées soient satisfaites pour une suite de nombres λ_n strictement inférieurs à $\inf_{x \in X} f(z_0, x, y_0)$ et convergeant vers cette quantité. De même, mais de façon plus fondamentale, il suffit que les V décrivent une base de voisinages de y_o; par exemple, si cela est possible, les V pourraient décrire une base de voisinages convexes fermés ou compacts, ce qui faciliterait la vérification de propriétés ($b1$) ou ($b2$) (compacité ou propriété de type minmax).

II.2. Exemples.

Afin de concevoir de façon plus intuitive cette notion de relation compactante, complétons la terminologie; nous dirons qu'une base de semi-filtre $\mathcal{H}$ sur X a un *point θ-semi-adhérent* s'il existe un point x de X et un semi-filtre $\mathcal{U}$ convergeant vers x ($\mathcal{U} \in \theta(x)$) tels que la famille $\mathcal{U} \vee \mathcal{H}$ soit une *base de semi-filtre* sur X.

Ainsi, si Ω est une relation dans $Z \times X$, et d'après la définition même, cette relation est (τ, θ)-compactante en z_0 si et seulement si elle vérifie la propriété suivante:

«s'il existe un semi-filtre $\mathcal{W} \in \tau(z_0)$ tel que $\Omega(\mathcal{W})$ soit une base de semi-filtre sur X, alors on peut trouver un semi-filtre $\mathcal{W}_{\text{bis}} \in \tau(z_0)$ tel que $\Omega(\mathcal{W}_{\text{bis}})$ ait un point semi-adhérent».

Par conséquent, le lien avec le cas le plus classique réside dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME II.2.1. *On suppose que tout filtre sur X a un point θ-semi-adhérent et que τ est convergentielle en z_0. Alors toute relation Ω dans $Z \times X$ est (τ, θ)-compactante en z_0.*

En effet, si possible, soit $\mathcal{W} \in \tau(z_0)$ tel que $\Omega(\mathcal{W})$ soit une base de semi-filtre sur X; comme $\mathcal{W}$ est en fait un filtre, $\Omega(\mathcal{W})$ est non seulement une base de semi-filtre mais plus précisément une base de filtre. Alors, $\Omega(\mathcal{W})$ a un point θ-semi-adhérent, comme souhaité. ∎

On s'intéresse bien souvent aux suites de points (dans Z ou dans X); aussi par exemple, si $(x_n)_n$ est une suite de points de X, nous dirons naturellement qu'une telle suite a une valeur d'adhérence (resp. est convergente) si le filtre élémentaire $\mathcal{E}$ qui lui est associé a un point θ-adhérent (resp. s'il existe un point x de X tel que $\mathcal{E} \in \theta(x)$). Par ailleurs, on dira que l'espace convergentiel (X, θ) *est séquentiellement compact si de toute suite de points de X on peut extraire une sous-suite convergente*. Alors:

THÉORÈME II.2.2. *On suppose l'espace* (X, θ) *séquentiellement compact et la convergence* τ *est séquentielle en* z_0. *Alors toute relation* Ω *dans* $Z \times X$ *est* (τ, θ)*-compactante en* z_0.

DÉMONSTRATION. Si possible, soit $(w_n)_n$ une suite de points convergeant vers z_0 (le filtre élémentaire $\mathcal{W} = \{(w_n)\}$ appartient à $\tau(z_0)$) telle que $\Omega(\mathcal{W})$ soit une base de semi-filtre; ceci signifie ici que, pour tout p, on peut trouver un entier $n \geqslant p$ tel que Ωw_n soit non vide. On peut donc construire une suite $(x_k)_k$ et une suite extraite $(n_k)_k$ avec $x_k \in \Omega w_{n_k}$ pour tout k; de la suite $(x_k)_k$, on peut extraire une suite partielle $(x_{k_p})_p$ convergente (hypothèse); le filtre élémentaire $\mathcal{E} = \{(x_{k_p})_p\}$ associé à cette sous-suite est alors tel que $\Omega(\mathcal{W}) \vee \mathcal{E}$ soit une base de (semi-)filtre puisque ceci signifie que pour une infinité d'indices p et une infinité d'indices n, on ait $x_{k_p} \in \Omega w_n$. ∎

Envisageons maintenant la situation suivante: $(\Omega_n)_n$ est une suite de parties de l'espace produit $X \times Y$ et x_0 est un point fixé de X. On peut dès lors considérer que l'on dispose d'une relation Ω dans $[(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times X] \times Y$ définie arbitrairement aux points $z = (\infty, x)$ et définie, aux points $z := (n, x)$ par $\Omega z := \Omega_n x$, pour tout x dans X et tout entier n. Définissons au point $z_0 := (\infty, x_0)$ (cela nous suffira) la semi-convergence produit π sur $Z := (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times X$: $\pi(z_0)$ est la famille des semi-filtres de base $\mathcal{N} \times \mathcal{U}$ où $\mathcal{N}$ est le filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ et où $\mathcal{U}$ décrit la famille des semi-filtres $\theta(x_0)$. On dira que la suite $(\Omega_n)_n$ est σ-compactante en $\theta(x_0)$ si la relation Ω est (π, σ)-compactante en z_0. A l'aide des Γ-limites, ceci s'exprimera par l'inégalité:

$$[\Gamma(\mathbb{N}^+, X^+)(\sup_{y \in Y} 1_{\Omega_n}(., y))_n](x_0) \leqslant \sup_{y \in Y} ([\Gamma(\mathbb{N}^+, X^+, Y^+)(1_{\Omega_n})_n](x_0, y)).$$

Si θ est une convergence séquentielle en x_0, telle que toute suite extraite d'une suite convergeant vers x_0 converge elle-même vers x_0, (ce qui est évidemment le cas si θ est la convergence séquentielle associée à une topologie) et en utilisant au besoin les propriétés des Γ-limites pour des filtres à base dénombrable ([Gre$_2$]), on peut alors montrer:

PROPOSITION II.2.3. *Supposons l'espace (Y, σ) séquentiellement compact. Alors, toute suite $(\Omega_n)_n$ est σ-compactante en $\theta(x_0)$.*

Dans l'exemple suivant, X est muni d'une convergence séquentielle θ et h est une application de X dans $[0, +\infty]$; on suppose que: «*de toute suite $(x_n)_n$ telle que la suite $(h(x_n))_n$ soit majorée, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_p})_p$ θ-convergente*».

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dira que cette suite de fonctions est *h-semi-coercive* si:

$$\liminf_n \left(f_n(x_n)/\varepsilon . h(x_n)\right) > 0,$$

pour toute suite $(x_n)_n$ dans X telle que $\liminf_n h(x_n) = +\infty$, c'est-à-dire si, pour toute telle suite $(x_n)_n$, on peut trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $f_n(x_n) > \varepsilon . h(x_n)$, pour presque tous les indices n.

A tout nombre réel λ fixé, on associe maintenant la relation Ω_λ dans $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times X$ définie arbitrairement au point $z_0 = \infty$ et par $\Omega_\lambda n = \{f_n \leqslant \lambda\}$, pour tout entier n. La convergence τ sur $Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est définie arbitrairement en tout point de $\mathbb{N}$ et $\tau(\infty)$ est réduit au filtre ayant pour base les complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}$ (filtre de Fréchet). On montrera alors facilement:

PROPOSITION II.2.4. *Si la suite $(f_n)_n$ est h-semi-coercive alors, pour tout λ, la relation Ω_λ est (τ, θ)-compactante à l'infini.*

III. Stabilité des équilibres de Stackelberg.

III.1. Enoncé du problème.

Soit f, g deux fonctions définies sur un espace produit $X \times Y$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Le problème de Stackelberg, tel qu'exposé dans [Lor-Mor], est de:

Trouver $x_0 \in X$ tel que:

$$\sup_{y \in A(x_0)} f(x_0, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in A(x)} f(x, y)$$

où

$$A(x) = \left\{y \in Y/g(x, y) = \inf_{v \in Y} g(x, v)\right\}.$$

On peut naturellement «assouplir» ce problème en cherchant, pour des fonctions f, f' de $X \times Y$ dans un treillis complet T_1, des fonctions g, g' de $X \times Y$ dans un treillis complet T_2 et des fonctions h, h' de $X \times Y$ dans un treillis complet T_3, à:

Trouver $x_0 \in X$ tel que:

$$\sup_{y \in A(x_0)} f(x_0, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in B(x)} f'(x, y)$$

où

$$A(x) = \left\{y \in Y/g(x, y) \leq \inf_{v \in Y} g'(x, v)\right\},$$

$$B(x) = \left\{y \in Y/h(x, y) \leq \inf_{v \in Y} h'(x, v)\right\}.$$

On pourrait d'ailleurs facilement imaginer que les fonctions ci-dessus ne sont pas toutes nécessairement définies sur le même espace produit.

On notera $+\infty$ (resp. $-\infty$) le plus grand (resp. petit) élément de T_1, de T_2 ou de T_3.

Si k est une fonction d'un ensemble Z dans $T_i (i = 1, 2, 3)$ et B une partie de Z, on notera k_B la fonction égale à k sur B et à $-\infty$ ailleurs [si I^B est la fonction égale à $+\infty$ sur B et à $-\infty$ sur B^c, k_B est aussi la fonction $\inf(k, I^B)$]. Alors, dans l'énoncé du problème de Stackelberg, au lieu d'écrire par exemple $y \in A(x)$, on écrira $(x, y) \in A$ et ainsi:

$$\sup_{y \in A(x)} f(x, y) = \sup_{y \in Y} f_A(x, y)$$

s'interprète comme la valeur en x de la fonction marginale supérieure de la fonction f_A obtenue par extrémalisation sur l'espace Y; on notera cette fonction $M(f_A, Y)$ ou seulement $M(f_A)$; ainsi:

$$M(f_A)(x) = M(f_A, Y)(x) = \sup_{y \in Y} f_A(x, y);$$

de même, avec la fonction f', on posera:

$$M(f'_B)(x) = M(f'_B, Y)(x) = \sup_{y \in Y} f'_B(x, y).$$

De façon analogue, la fonction marginale inférieure ($m(g', Y)$ ou seulement $m(g')$) de la fonction g', prise par extrémalisation sur Y, sera définie par:

$$m(g')(x) = m(g', Y)(x) = \inf_{y \in Y} g'(x, y);$$

et de même pour h'. Enfin, la borne inférieure de la fonction $M(f'_B)$ peut se comprendre comme la fonction marginale inférieure de la fonction $M(f'_B)$ obtenue par extrémalisation sur X; on la notera donc:

$$m(M(f'_B)) = m(M(f'_B), X) = \inf_{x \in X} M(f'_B)(x).$$

Le problème de Stackelberg devient ainsi:

Trouver $x_0 \in X$ tel que:

$$M(f_A)(x_0) \leqslant m(M(f'_B))$$

sachant que:

$f_A = f$ sur A, $-\infty$ ailleurs; $f'_B = f'$ sur B, $-\infty$ ailleurs;

$A = A(g, g') = \{g \leqslant m(g', Y)\}$;

$B = B(h, h') = \{h \leqslant m(h', Y)\}$.

On appellera *point de Stackelberg du système* $\{f, f', g, g', h, h'\}$ tout point de l'ensemble (dit de Stackelberg):

$$SG = SG(f, f', g, g', h, h') = \{M(f_A) \leqslant m(M(f'_B))\}.$$

Soit I un ensemble d'indices muni d'un filtre $\mathcal{F}$. On va s'intéresser, étant donné des fonctions f_i, f'_i, de $X \times Y$ dans T_1, g_i, g'_i de $X \times Y$ dans T_2 et h_i, h'_i de $X \times Y$ dans $T_3 (i \in I)$ aux conditions permettant de dire qu'une «limite» de points de Stackelberg du système $\{f_i, f'_i, g_i, g'_i, h_i, h'_i\}$ est un point de Stackelberg du système $\{f, f', g, g', h, h'\}$. Pour ce faire, X et Y seront des ensembles munis de semi-convergences ((θ_1, θ_2, ... sur X et σ_1, σ_2, ... sur Y); les espaces correspondants seront notés X_1, X_2, ... et Y_1, Y_2, ... Les indexations par i se comprennent aisément; par exemple:

$$A_i = \{g_i \leqslant m(g'_i, Y)\}; \qquad SG_i = \{M(f_{iA_i}) \leqslant m(M(f'_{iB_i}))\}.$$

Dans la présentation précédente, nous avons dégagé deux faits essentiels:

1) les propriétés étudiées dépendent d'inégalités, d'où des liens possibles par le *théorème d'inclusion variationnelle* entre par exemple A et les A_i, ou SG et les SG_i;

2) le rôle des fonctions marginales, d'où des liens possibles, grâce en particulier aux théorèmes faisant appel à certaines relations *compactantes*, entre par exemple $m(g', Y)$ et les $m(g_i' Y)$.

III.2. Recherche systématique de conditions suffisantes.

Commençons par préciser le cadre dans lequel nous allons travailler. On suppose d'abord $T_1 = T_2 = T_3 = \overline{\mathbb{R}}$ et avoir choisi un nombre réel $\varepsilon > 0$; on prendra, pour tout i dans I, $g_i = h_i$, $g_i' := h_i' := g_i + \varepsilon$ de sorte que:

$$A_i = B_i := A_{i,\varepsilon} := \{g_i \leqslant m(g_i, Y) + \varepsilon\};$$

l'ensemble de Stackelberg dy système $\{f_i, f_i', g_i, g_i + \varepsilon, g_i, g_i + \varepsilon\}$, dépendant du réel ε, sera noté $SG_{i,\varepsilon}$:

$$SG_{i,\varepsilon} := SG_i = \{M(f_{iA_{i,\varepsilon}}) \leqslant m(M(f'_{iA_{i,\varepsilon}}))\}.$$

On s'intéressera à la «convergence» des ensembles de Stackelberg $SG_{i,\varepsilon}$ vers l'ensemble de Stackelberg SG^ε dy système $\{f, f', g, g, g, g + \varepsilon\}$, qui lui aussi dépend de ε:

$$SG = SG^\varepsilon := \{M(f_A) \leqslant m(M(f'_{B_\varepsilon}))\}$$

$$\text{avec} \quad A := \{g \leqslant m(g, Y)\} \quad \text{et} \quad B := B_\varepsilon := \{g \leqslant m(g, Y) + \varepsilon\}.$$

Très précisément, X est muni, au départ, d'une semi-convergence θ_1 et x_0 est un point de la «limite supérieure» des ensembles de Stackelberg $SG_{i,\varepsilon}$ $(i \in I)$:

$$x_0 \in \Gamma(\mathcal{F}^+, X_1^+)(SG_{i,\varepsilon})_i;$$

notre but est d'établir le théorème ci-dessous qui donne des conditions suffisantes pour que x_0 appartienne à l'ensemble de Stackelberg SG^ε.

Nous avons ainsi été amené à supposer que *X est muni d'une semi-convergence θ_1, convergentielle en x_0 et d'une convergence θ_2 stable en tout point de X, et que Y est muni de semi-convergences σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, avec σ_1 convergentielle sur Y*. De plus, nous supposons $m(g)(x_0)$ fini ce qui implique en particulier que l'ensemble $B_\varepsilon(x_0)$ soit non vide.

THÉORÈME III.2.1. *On suppose les propriétés suivantes satisfaites:*

Majf1 $f \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, X_1^-, Y_1^-)(f_i)_i$ *sur* $\{x_0\} \times Y \cap A$;

mingl $[\Gamma(\mathcal{F}^+, X_1^+, Y_1^-)(g_i)_i] \leqslant g$ *sur* $\{x_0\} \times Y \cap A$;

(*resp.* Majf1bis $f \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(f_i)_i$ *sur* $\{x_0\} \times Y \cap A$;

minglbis $[\Gamma(\mathcal{F}^+, X_1^+, Y_1^+)(g_i)_i] \leqslant g$ *sur* $\{x_0\} \times Y \cap A$);

Majg1 $g \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, X_1^-, Y_2^-)(g_i)_i]$ *sur* $\{x_0\} \times Y \cap A$;

Comg *pour tout* $\lambda < m(g, Y)(x_0)$, *la relation* $\{g \leqslant \lambda\}$ *dans* $[(I \cup \{\infty\}) \times X] \times Y$ *est* σ_2*-compactante en* $\tau(\infty, x_0)$(1);

minf' $[\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(f_i')_i] \leqslant f'$ *sur* B_ε^-;

Majg2 $g \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, Y_3^-, X_2^\beta)(g_i)_i$ *sur* $X \times Y$;

ming2 $[\Gamma(\mathcal{F}^+, X_2^\gamma, Y_4^-)(g_i)_i] \leqslant g$ *sur* $X \times Y$, *avec* $\beta \leqslant \gamma$;

ComPerf' *pour tout* x *fixé dans* X, *pour tout* $\mu > M(f_B')(x)$ *et pour tout* U *dans* $\mathcal{N}_{\theta_2}(x)$:

Kf' la relaiton $[B. \cap \{f_.' \geqslant \mu\}](U)$(2) *est* σ_3*-compactante en* $\mathcal{F}$,

Pf' $\Gamma(\mathcal{F}^+)(\inf_U \sup_Y 1_{B_i \cap \{f_i' \leqslant \mu\}})_i \leqslant \Gamma(\mathcal{F}^+)(\sup_Y \inf_U 1_{B_i \cap \{f_i' \leqslant \mu\}})_i$.

Alors, le point x_0 *de la* θ_1*-limite supérieure des ensembles de Stackelberg* $SG_{i,\varepsilon}$ *appartient nécessairement à l'ensemble de Stackelberg* SG^ε.

Nous allons justifier le choix des hypothèses précédentes et pour cela nous commençerons par le résultat suivant:

LEMME III.2.2. *On suppose toujours* $x_0 \in \Gamma(\mathcal{F}^+, X_i^+)(SG_{i,\varepsilon})_i$; *les propriétés*

MAJ $M(f_A)(x_0) \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, X_i^-)(M(f_{iA_{i,\varepsilon}}))_i](x_0)$

MIN $[\Gamma(\mathcal{F}^+)(m(M(f'_{iA_{i,\varepsilon}})))_i] \leqslant m(M(f'_{B_\varepsilon}))$

(1) Où $\tau(\infty, x_0)$ est la famille des semi-filtres sur $(I \cup \{\infty\}) \times X$ admettant pour base les familles de la forme $\mathcal{F} \times \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ décrivant $\theta_1(x_0)$.

(2) $[B. \cap \{f_.' \geqslant \mu\}$ est défini par $A_{i,\varepsilon} \cap \{f_i' \geqslant \mu\}$ en i et par $B_\varepsilon \cap \{f' \geqslant \mu\}$ en ∞.

impliquent que x_0 *appartient à l'ensemble de Stackelberg* SG^{ε}.

En effet, puisque $SG_{i,\varepsilon} := \{M(f_{iA_{i,\varepsilon}}) \leqslant m(M(f'_{iA_{i,\varepsilon}}))\}$, l'hypothèse initiale sur x_0 et le T.I.V. donnent:

$$[\Gamma(\mathscr{F}^-, X_i^-)(M(f_{iA_{i,\varepsilon}}))_i](x_0) \leqslant [\Gamma(\mathscr{F}^+)(m(M(f'_{iA_{i,\varepsilon}})))_i]$$

et les propriétés MAJ de majoration de f et MIN de minoration de f conduisent à l'inégalité souhaitée: $M(f_A)(x_0) \leqslant m(M(f'_{B_\varepsilon}))$. ■

Notons au passage qu'une application semblable du T.I.V. aurait permis une démonstration directe du Th. 1 sur la stabilité des points de selle ([Gui$_1$]).

Nous allons donc voir comment l'étude des propriétés MAJ et MIN amènent aux conditions du théorème.

ETUDE DE LA PROPRIÉTÉ MAJ.

Comme la propriété MAJ s'écrit:

$$M(f_A, Y)(x_0) \leqslant [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_i^-)(M(f_{iA_{i,\varepsilon}}, Y))_i](x_0)$$

et que, pour tout y dans Y, et pour tout x dans X:

$$f_{iA_i}(x, y) \leqslant M(f_{iA_{i,\varepsilon}}, Y)(x),$$

il est évident (une Γ-limite étant une fonctionnelle croissante) que cette propriété MAJ sera satisfaite si, ayant choisi une semi-convergence σ_1 sur Y, on a:

$$f_A(x_0, y) \leqslant [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(f_{iA_{i,\varepsilon}})_i](x_0, y); \tag{III.2.1}$$

pour tout y dans $A(x_0)$;

car alors l'inégalité précédente sera en fait partout vraie puisque $f_A(x_0, y)$ vaut $-\infty$ pour les y hors de $A(x_0)$. Il s'agit donc de combiner une propriété sur la famille $(f_i)_i$ et une sur la famille $(A_{i,\varepsilon})_i$: on aura besoin de faire des intersections, donc de travailler avec des filtres, ce qui justifie l'hypothèse que σ_1 soit convergentielle sur Y.

En dehors de toute hypothèse complémentaire, par exemple de convexité, une Γ-inégalité [Th. I.4.5 avec $P(k, I_C) = \inf(k, I_C)$] permet d'obtenir:

$$[\text{Majf1 et Inc1}] \quad \text{ou} \quad [\text{Majf1bis et Inc1bis}] \Rightarrow (\text{III.2.1})$$

avec

Majfl $\quad f \leqslant [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^-)(f_i)_i] \quad$ sur $\{x_0\} \times Y \cap A$;

Incl $\quad \{x_0\} \times Y \cap A \subset [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(A_{i,\varepsilon})$;

Majflbis $\quad f \leqslant [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(f_i)_i] \quad$ sur $\{x_0\} \times Y \cap A$;

Inclbis $\quad \{x_0\} \times Y \cap A \subset [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^-)(A_{i,\varepsilon})_i$.

Il nous faut donc maintenant donner des conditions sur les fonctions g et g_i afin d'obtenir les propriétés d'inclusion Incl ou Inclbis; nous aurons besoin d'abord d'utiliser l'inégalité ci-dessous entre les fonctions marginales qui définissent les ensembles A et $A_{i,\varepsilon}$:

(III.2.2) $$m(g, Y)(x_0) \leqslant [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-)(m(g_i, Y))_i](x_0).$$

Commençons par montrer: [mingl et (III.2.2)] $\Rightarrow$ Incl. Pour cela, supposons les propriétés mingl et (III.2.2) satisfaites et soit y un point de Y tel que le point (x_0, y) n'appartienne pas à l'ensemble $\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(A_{i,\varepsilon})_i$; ainsi:

$$\begin{aligned}(x_0, y) \in [\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(A_{i,\varepsilon})_i]^c &= \Gamma(\mathscr{F}^+, X_1^+, Y_1^-)(A^c_{i,\varepsilon})_i \\ &= \Gamma(\mathscr{F}^+, X_1^+, Y_1^-)(\{m(g_i, Y) + \varepsilon < g_i\})_i \subset \\ &\subset \Gamma(\mathscr{F}^+, X_1^+, Y_1^-)(\{m(g_i, Y) + \varepsilon \leqslant g_i\})_i .\end{aligned}$$

Le T.I.V. permet alors d'affirmer que:

$$(x_0, y) \in \left\{\Gamma(\mathscr{F}^-, X_1^-)(m(g_i, Y))_i + \varepsilon \leqslant \Gamma(\mathscr{F}^+, X_1^+, Y_1^-)(g_i)_i\right\}$$

car les fonctions $m(g_i, Y)$ sont indépendantes de la variable y. Par conséquent, compte tenu des propriétés mingl et (III.2.2), on obtient: $(x_0, y) \in \{m(g, Y) + \varepsilon \leqslant g\}$, et donc, comme souhaité, $(x_0, y) \notin A = \{g \leqslant \leqslant m(g, Y)\}$, puisqu'on a supposé $m(g, Y)(x_0)$ fini (c'est ici que le choix d'un $\varepsilon > 0$ s'avère nécessaire).

On démontre de façon analogue: [minglbis et (III.2.2)] $\Rightarrow \Rightarrow$ Inclbis.

Il reste à donner des conditions suffisantes pour assurer la validité de (III.2.2), c'est-à-dire pour assurer la semi-continuité inférieure d'une fonction marginale; nous disposons déjà d'un tel énoncé: on appliquera le Corollaire II.1.3 avec une semi-convergence σ_2 sur l'espace Y

(où l'on prend une borne inférieure) et avec:

$$Z = (I \cup \{\infty\}) \times X,\ z_0 = (\infty, x_0),\ f(i, x, y) =$$
$$= g_i(x, y) \text{ pour tout } i \text{ dans } I \text{ et } f(\infty, x, y) = g(x, y);$$

de plus, la convergence τ sur Z sera définie en tout point (∞, x) (c'est suffisant) comme étant la convergence produit et donc, $\tau(\infty, x)$ est la famille des filtres de base $\mathscr{F} \times \mathcal{U}$, pour $\mathcal{U}$ décrivant $\theta_1(x)$. On obtient ainsi immédiatement: [Majgl et Comg] $\Rightarrow$ (III.2.2).

En résumé, nous avons montré la première étape dans la preuve du théorème grâce qux implications:

$$\text{Majgl, Comg, mingl, Majfl} \Rightarrow \text{(III.2.2), mingl, Majfl} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{incl, Majfl} \Rightarrow \text{(III.2.2)} \Rightarrow \text{MAJ}$$

et

$$\text{Majgl, Comg, minglbis, Majflbis} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{(III.2.2), minglbis, Majflbis} \Rightarrow \text{inclbis, Majflbis} \Rightarrow \text{(III.2.1)} \Rightarrow \text{MAJ.}$$

Soulignons que la semi-convergence σ_2 sur Y qui intervient dans les conditions Majgl et Comg est a priori sans rapport avec celle, σ_1, jusqu'alors utilisée et que la condition de compacité Comg sera bien souvent remplacée par une propriété (beaucoup) plus forte (on pourra par exemple, si Y est σ_2-séquentiellement compact, utiliser la Proposition II.2.3). La traduction, en langage topologique, de Comg, sous sa forme générale, pour λ fixé comme il est dit, est:

«si pour tout voisinage du point (∞, x_0), on peut trouver un point (i, u) dans ce voisinage et un point y dans Y tels que $g_i(u, y) \leqslant \lambda$, alors, on pourra trouver un point y_0 tel que, dans tout voisinage du point (∞, x_0, y_0) il existe au moins un point (i, u, v) où la fonction g soit majorée par λ: $g_i(u, v) \leqslant \lambda$».

Etude de la propriété MIN.

Il s'agit donc de donner des conditions suffisantes pour que:

$$[\Gamma(\mathscr{F}^+)(m(M(f'_{iA_{\iota,\varepsilon}})))_i] \leqslant m(M(f'_{B_\varepsilon})).$$

Comme, pour tout x de X, et pour tout i dans I, $m(M(f'_{iA_{\iota,\varepsilon}})) \leqslant$ $\leqslant M(f'_{iA_{\iota,\varepsilon}})(x)$ et aussi $m(M(f'_{B_\varepsilon})) \leqslant M(f'_{B_\varepsilon})(x)$, il suffira de disposer d'une semi-convergence θ_2 sur X pour laquelle on ait:

$$\text{(III.2.3)} \qquad [\Gamma(\mathcal{F}^+, X_2^-)(M(f'_{iA_{i,\varepsilon}}))_i] \leq M(f'_{B_\varepsilon}) \quad \text{sur } X,$$

ou, en passant aux opposés:

$$-M(f'_{B_\varepsilon}) \leq [\Gamma(\mathcal{F}^-, X_2^+)(-M(f'_{iA_{i,\varepsilon}}))_i] \quad \text{sur } X,$$

ou encore, transformant l'opposé d'une borne supérieure en borne inférieure des opposés et tenant compte du fait que les fonctions $M(\,)$ sont des fonctions marginales supérieures obtenues par extrémalisation sur Y, (III.2.3) devient:

$$\inf_Y(-f'_{B_\varepsilon}) \leq [\Gamma\mathcal{F}^-, X_2^+)(\inf_Y(-f'_{iA_{i,\varepsilon}}))_i] \quad \text{sur } X.$$

Des conditions d'obtention d'une telle inégalité sont données dans le Théorème II.1.4; il suffit donc d'adapter les notations. Ainsi, il faut d'abord supposer la stabilité en tout point de la semi-convergence θ_2 sur X et utiliser une (nouvelle) semi-convergence σ_3 sur Y. De plus, puisque le théorème est à appliquer à l'opposé de certaines fonctions, le rôle de Ω_λ sera joué par la relation $\Psi_\mu = B. \cap \{f'_. \geq \mu\}$ (avec $\mu = -\lambda$) décrite précisément ci-après (voir aussi la note (2)): pour tout μ réel, Ψ_μ est la relation dans $((I \cup \{\infty\}) \times Y) \times X$ définie par:

$$(i, y, x) \in \Psi_\mu \Leftrightarrow (x, y) \in \{f'_{iA_{i,\varepsilon}} \geq \mu\} \Leftrightarrow (x, y) \in A_{i,\varepsilon} \text{ et } f'_i(x, y) \geq \mu$$

(car $f'_{iA_{i,\varepsilon}} = -\infty$ sur $A^c_{i,\varepsilon}$) et de même:

$$(\infty, y, x) \in \Psi_\mu \Leftrightarrow (x, y) \in \{f'_{B_\varepsilon} \geq \mu\} \Leftrightarrow (x, y) \in B_\varepsilon \text{ et } f'(x, y) \geq \mu;$$

avec un léger abus de notation puisque l'ordre des espaces X et Y est parfois inversé. On obtient donc:

LEMME III.2.3. *On suppose X muni d'une semi-convergence θ_2 stable en tout point et Y muni de la semi-convergence σ_3. Si la propriété de compacité-permutation* (ComPerf') *est satisfaite, ainsi que les inégalités*:

$$\text{(III.2.4)} \qquad [\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(f'_{iA_{i,\varepsilon}})_i] \leq f'_{B_\varepsilon} \quad \textit{sur } X \times Y$$

alors, l'inégalité (III.2.3) *est elle aussi satisfaite.*

Maintenant, montrons que: [minf′ et inc2] $\Rightarrow$ (III.2.4), avec:

minf′ $\qquad [\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(f_i')_i] \leqslant f' \quad$ *sur* B_ε^- ;

inc2 $\qquad \Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(A_{i,\varepsilon}^-)_i] \subset B_\varepsilon^-$.

En effet, comme l'inclusion inc2 équivaut à l'inégalité

$$\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(I^{A_{i,\varepsilon}^-})_i] \leqslant I^{B_\varepsilon^-}$$

et que $f'_{iA_{i,\varepsilon}} = \inf(f_i', I^{A_{i,\varepsilon}})$ $(i \in I)$ et de même $f'_{B_\varepsilon} = \inf(f', I^{B_\varepsilon})$, avec donc $I^{B_\varepsilon}(x, y) = -\infty$ si (x, y) n'appartient pas à B_ε, on aura:

∗ sur le complémentaire de B_ε:

$$[\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(f'_{iA_{i,\varepsilon}})_i] \leqslant \Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(I^{A_{i,\varepsilon}^-})_i \leqslant I^{B_\varepsilon^-} = f'_{B_\varepsilon} = -\infty ,$$

∗ tandis que sur l'ensemble B_ε lui-même:

$$[\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(f'_{iA_{i,\varepsilon}})_i] \leqslant$$

$$\leqslant \inf\,(\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(f_i')_i),\ \Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(I^{A_{i,\varepsilon}^-})_i \leqslant f'_{B_\varepsilon} .$$

Il reste donc à assurer la validité de inc2. Puisque $A_{i,\varepsilon} := \{g_i \leqslant \leqslant m(g_i, Y) + \varepsilon\}$ le théorème d'inclusion variationnelle nous affirme que:

$$\Gamma(\mathcal{F}^+, Y_3^+, X_2^-)(A_{i,\varepsilon}^-)_i \subset \{[\Gamma(\mathcal{F}^-, Y_3^-, X_2^\beta)(g_i)_i] \leqslant$$

$$\leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^+, X_2^\gamma)(m(g_i, Y))_i] + \varepsilon\}$$

sous réserve que θ_2 soit en fait une convergence sur X, comme on l'a supposé, et que $\beta \leqslant \gamma$; dans ces conditions, la propriété inc2 sera donc satisfaite si:

Majg2 $\qquad g \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, Y_3^-, X_2^\beta)(g_i)_i] \quad$ sur $X \times Y$ et

(III.2.5) $\qquad [\Gamma(\mathcal{F}^+, X_2^\gamma)(m(g_i, Y)_i] \leqslant m(g, Y) \quad$ sur X.

Or, les fonctions intervenant dans (III.2.5) étant des fonctions marginales inférieures obtenues par extrémalisation sur Y, il suffira, pour que (III.2.5) soit satisfaite, que l'on ait:

ming2 $\qquad [\Gamma(\mathcal{F}^+, X_2^\gamma, Y_4^-)(g_i)_i] \leqslant g \quad$ sur $X \times Y$

pour une certaine semi-convergence σ_4 sur Y.

En résumé, nous avons montré la deuxième étape dans la preuve du Théorème III.2.1 grâce aux implications:

$$\text{ming2, Majg2, minf}', \text{ComPerf}' \Rightarrow \text{(III.2.5), Majg2, minf}', \text{ComPerf}' \Rightarrow \Rightarrow \text{inc2, minf}', \text{ComPerf}' \Rightarrow \text{(III.2.4), ComPerf}' \Rightarrow \text{(III.2.3)} \Rightarrow \text{MIN}.$$

La démonstration du théorème est donc complète par le Lemme III.2.2. ■

Terminons en soulignant que dans les raisonnements précédents aucune hypothèse de convexité n'a été faite. Si l'on en faisait on pourrait par exemple utiliser ([Gui$_2$]) dans le Théorème III.2.1 pour remplacer la condition Majf1 par la condition plus faible:

$$f \leqslant [\Gamma(\mathcal{F}^-, X_1^-, Y_1^+)(f_i)_i] \quad \text{sur } \{x_0\} \times Y \cap A;$$

on pourrait également utiliser de nombreux théorèmes de min-max pour vérifier que la condition Pf′ est bien satisfaite.

Remerciements. L'auteur remercie vivement le referee de ses nombreux conseils et des raffinements apportés à certains énoncés.

BIBLIOGRAPHIE

[Att] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, Boston (1984).

[But-Mas] G. Buttazzo - G. Dal Maso, *Γ-convergence and optimal control problems*, J. Opt. Theory Appl., **38** (1982), pp. 385-407.

[Cho] G. Choquet, *Convergences*, Ann. Univ. Grenoble, **23** (1947-1948), pp. 55-112.

[D.Geo-Fra] E. De Georgi - T. Franzoni, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Sci. Fis. Mat. Natur., **58**, 8 (1975), pp. 842-850.

[Dol.Gre-Lec] S. Dolecki - G. Greco - A. Lechiki, *Compactoïd and compact filters*, Pacific J. Math., **117** (1) (1985), pp. 69-98.

[Dol-Gui-Lig-Mal] S. Dolecki - J. Guillerme - B. Lignola - Ch. Malivert, *Γ-inequalities and stability of generalized extremal convolutions*, Math. Nachrichten, **153** (1991), pp. 1-25.

[Dol-Mos] S. Dolecki - M.-P. Moschen, *Inequalities involving Γ-functionals and semi complete lattice homomorphisms*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **77** (1987), pp. 149-159.

[Gre$_1$] G. H. Greco, *Limitoidi e reticoli completi*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII - Sc. Mat., **29** (1983), pp. 153-164.

[Gre_2] G. H. GRECO, *Decomposizioni di semifiltri e Γ-sequenziali in reticoli completamente distributivi*, Ann. Math. Pura Appl. (IV), **137** (1984), pp. 61-82.

[Gre_3] G. H. GRECO, *On Raney's theorems for completely distributive complete lattices*, Coll. Math., **55** (2) (1988), pp. 213-217.

[Gui_1] J. GUILLERME, *Convergence of approximate saddle points*, J. Math. Anal. Appl., **137** (2) (1989), pp. 297-311.

[Gui_2] J. GUILLERME, *Intersections of lower semi-continuous relations. Applications to the stability of constrained saddle points*, dans *Advances in Optimization, Proceedings, Lambrecht, FRG, 1991*, W. OETTLI, D. PALLASCHKE (eds.), Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems, No. **382** (1992), pp. 118-132.

[Lor-Mor] P. LORIDAN - J. MORGAN, *ε-Regularized two-level optimization problems: approximation and existence results*, in *Optimization, Fifth French-German Conference*, Lect. Notes in Math., **1405**, Springer-Verlag (1989), pp. 99-113.

[Ran] J. N. RANEY, *A subdirect-union representation for completely distributives lattices*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), pp. 518-522.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 gennaio 1991 e, in forma revisionata il 14 febbraio 1992.