RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CORRADO MARASTONI

Varietà generiche rispetto a sistemi differenziali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 86 (1991), p. 233-237

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1991__86__233_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 86 (1991)

Varietà generiche rispetto a sistemi differenziali

CORRADO MARASTONI (*)

SUNTO - Si introduce la nozione di sottovarietà generica $S \subseteq X \simeq \mathbf{C}^n$ rispetto ad un sistema differenziale $\mathcal{M}$ e si dà la relazione tra le microfunzioni soluzioni di $\mathcal{M}$ e di $\mathcal{M}^b$ (= sistema indotto su $S^{\mathbf{C}}$). Si espone infine il caso $\mathcal{M} = \bar{\partial}$ ottenendo come applicazione i risultati di [D'A-D'A-Z].

1. Varietà generiche rispetto ad un sistema differenziale.

Sia ϕ: $S \to M$ una mappa tra varietà reali, e siano Y ed X complessificati di S ed M rispettivamente.

Consideriamo il diagramma

(1.1)
$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & M \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ Y & \xrightarrow[\phi^{\mathbf{C}}]{} & X \end{array}$$

ove i, j sono le mappe di inclusione e $\phi^{\mathbf{C}}$ la complessificata di ϕ.

Osserviamo che $S \underset{Y}{\times} TY \simeq TS \underset{S}{\oplus} iTS$, $M \underset{X}{\times} TX \simeq TM \underset{M}{\oplus} iTM$; ne segue che sussiste un diagramma canonico commutativo

(1.2)
$$\begin{array}{ccc} TS & \xrightarrow{\phi'} & TM \\ {\scriptstyle q}\uparrow & \overset{\tilde{\phi}'}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle q} \\ S \underset{Y}{\times} TY & \xrightarrow[\phi^{\mathbf{C}'}]{} & M \underset{X}{\times} TX \end{array}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Università di Padova, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italy.

ove le mappe q sono definite dai diagrammi

$$\begin{tikzcd} S \underset{Y}{\times} TY \arrow[r, "q"] \arrow[d] & TS \\ TS \underset{S}{\oplus} iTS \arrow[r, equal] & TS \underset{S}{\oplus} iTS \arrow[u, "1^{\text{a}}\,\text{proiez.}"'] \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} M \underset{X}{\times} TX \arrow[r, "q"] \arrow[d] & TM \\ TM \underset{M}{\oplus} iTM \arrow[r, equal] & TM \underset{M}{\oplus} iTM \arrow[u, "1^{\text{a}}\,\text{proiez.}"'] \end{tikzcd}.$$

In particolare, come si ricava dall'osservazione di (1.2), resta individuata una mappa lineare

$$\tilde{\phi}' = q \circ \phi^{\mathrm{C}\prime} \tag{1.3}$$

che però, nonostante la notazione ambigua, non è necessariamente la derivata di una mappa $\tilde{\phi}\colon Y \to M$.

Supponiamo ora che ϕ sia un'immersione, e sia $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-modulo coerente. Ricordiamo che la mappa ϕ^{C} è detta non caratteristica rispetto ad $\mathcal{M}$ se e solo se ${}^t\phi^{\mathrm{C}\prime}$ è propria su $\operatorname{char}\mathcal{M}$.

DEFINIZIONE 1.1. *S è generica in M rispetto ad $\mathcal{M}$ se e solo se ϕ^{C} è non caratteristica rispetto ad $\mathcal{M}$.*

DEFINIZIONE 1.2. $\mathcal{M}^b = (\phi^{\mathrm{C}})^* \mathcal{M}$.

OSSERVAZIONE. Se S è generica in M rispetto ad $\mathcal{M}$ è classico che $\mathcal{M}^b$ è ancora un $\mathcal{D}_Y$-modulo coerente (cf. [S]).

Il classico teorema di Cauchy-Kowalewski-Kashiwara (cf. [K-S]) dà immediatamente il seguente

TEOREMA 1.3. $(\phi^{\mathrm{C}})^{-1} \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}^b, \mathcal{O}_Y)$.

Sia Ω un aperto di S con bordo $N = \partial\Omega$ analitico. Definiamo i seguenti fasci di microfunzioni:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{\maltese|X} = \mu\ \mathrm{hom}(\mathbf{Z}_{\maltese}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_{S|X}[\operatorname{codim}_X S], \\ \mathcal{C}_{\maltese|Y} = \mu\ \mathrm{hom}(\mathbf{Z}_{\maltese}, \mathcal{O}_Y) \otimes \mathrm{or}_{S|Y}[\dim S], \qquad \maltese = S, \Omega, N. \end{cases} \tag{1.4}$$

Abbiamo:

TEOREMA 1.4. *Sia S generica in M rispetto ad $\mathcal{M}$. Allora*

$${}^t\phi^{\mathrm{C}\prime}_* \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\maltese|X}) \simeq \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}^b, \mathcal{C}_{\maltese|Y})$$

per $\maltese = S, \Omega, N$.

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{F} = \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ e notiamo che $(\phi^{\mathrm{C}})^{-1}(\mathcal{F}) = \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}^b, \mathcal{O}_Y)$.

Consideriamo inoltre il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S & = & S \subseteq M \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[\phi^{\mathrm{C}}]{} & X. \end{array}$$

ϕ^{C} è un'immersione non caratteristica per $\mathcal{F}$ su T^*Y (in particolare su $T_S^*\,Y = SS\,\mathbb{Z}_S$ e su $(\overline{\Omega} \underset{S}{\times} T_S^*\,Y) \oplus N^*\Omega^a = SS\,\mathbb{Z}_\Omega$).

Per [K-S, Teorema 5.4.1], si ha allora che

$$^t\phi_*^{\mathrm{C}\,\prime}\,\mu\,\mathrm{hom}(\mathbb{Z}_{\maltese}, \mathcal{F}) \simeq \mu\,\mathrm{hom}(\mathbb{Z}_{\maltese}, (\phi^{\mathrm{C}})^!\mathcal{F}) \qquad \text{per } \maltese = S, \Omega, N.$$

Inoltre

$$(\phi^{\mathrm{C}})^!\mathcal{F} = (\phi^{\mathrm{C}})^{-1}\mathcal{F} \otimes \mathrm{or}_{Y|X}[\mathrm{codim}_X Y].$$

Perciò

$$^t\phi_*^{\mathrm{C}\,\prime}\,\boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{S|X}) = {}^t\phi_*^{\mathrm{C}\,\prime}\,\mu\,\mathrm{hom}(\mathbb{Z}_S, \mathcal{F}) \otimes \mathrm{or}_{S|X}[\mathrm{codim}_X S] \simeq$$

$$\simeq \mu\,\mathrm{hom}(\mathbb{Z}_S, (\phi^{\mathrm{C}})^{-1}\mathcal{F}) \otimes \mathrm{or}_{S|Y}[\mathrm{codim}_Y S] \simeq \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}^b, \mathcal{C}_{S|Y}).$$

Analogamente si ragiona per $\mathcal{C}_{\Omega|X}, \mathcal{C}_{\Omega|Y}$ e $\mathcal{C}_{N|X}, \mathcal{C}_{N|Y}$. ■

Osservazione. Nelle precedenti ipotesi, se assumiamo che

$$H^{\mathrm{R}}\pi^*(\theta) \notin C_{T_M^*X}(\mathrm{char}\,\mathcal{M}) \qquad \forall \theta \in T_S^*\,M, \tag{1.5}$$

ove

$$T^*M \xrightarrow{\pi^*} T^*T_M^*X \xrightarrow{H^{\mathrm{R}}} T_{T_M^*X}T^*X$$

con $T_M^*X \xrightarrow{\pi} M$ ed H^{R} isomorfismo hamiltoniano reale di $(T^*X)^{\mathrm{R}}$, allora vale

$$^t\phi_*^{\mathrm{C}\,\prime}\,\boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{M|X}) \simeq \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}^b, \mathcal{C}_{S|Y}). \tag{1.6}$$

2. Varietè di Cauchy-Riemann generiche.

Nelle notazioni del § 1, assumiamo ora che $M = Z^{\mathrm{R}}$ ove Z sia una varietà complessa, $X = Z \times \overline{Z}$, $\mathcal{M} = \overline{\partial}$ (sistema di Cauchy-Riemann in X),

$r = \mathrm{codim}_M^{\mathbf{R}} S$, e che $X \xrightarrow{p} M$ sia la prima proiezione. È classica la seguente

DEFINIZIONE 2.1. *S è generica in $M \Leftrightarrow TS \underset{S}{+} iTS \simeq S \underset{M}{\times} TM$.*

Se S è localmente definita in M da $\phi_1 = \ldots = \phi_r = 0$, si osserva che S è generica in $M \Leftrightarrow \partial\phi_1, \ldots, \partial\phi_r$ sono C-indipendenti.

Esaminando il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "j"] \arrow[r, equal] & Z^{\mathbf{R}} \\ Y \arrow[r, "\phi^{\mathbf{C}}"'] \arrow[ur, "\tilde{\phi}'"] & X \arrow[r, equal] & Z \times \overline{Z} \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

si vede come in questo esempio sia definita una mappa

$$\tilde{\phi} = p \circ \phi^{\mathbf{C}} : Y \to M, \tag{2.2}$$

la cui derivata è la mappa $\tilde{\phi}'$ di (1.3).

OSSERVAZIONE. È immediato provare che S è generica in M se e solo se $\tilde{\phi}$ è una sommersione. Ciò permette di ottenere un'immersione $S \underset{M}{\times} T^*M \overset{{}^t\tilde{\phi}'}{\hookrightarrow} T^*Y$, tramite la quale si definisce il « sistema di Cauchy-Riemann tangenziale» $\overline{\partial}^b$ come l'annullatore (nella dualità fra TY e T^*Y) di $S \underset{M}{\times} T^*M$ in T^*Y. Si osserva che $\overline{\partial}^b = (\phi^{\mathbf{C}})^* \overline{\partial}$ e che $\overline{\partial}^b$ è un $\mathcal{D}_Y$-modulo coerente.

LEMMA 2.2. *S è generica in M (nel senso di (2.1)) se e solo se S è generica in M rispetto $\overline{\partial}$ (nel senso di (1.1)).*

DIMOSTRAZIONE. Si ha $\mathrm{char}\,\overline{\partial} = (T^*X) \times \overline{X}$. Perciò S è generica in $M \Leftrightarrow {}^t\tilde{\phi}'$ $(= {}^t\phi^{\mathbf{C}\prime} \circ {}^tp')$ è iniettiva $\Leftrightarrow {}^t\phi^{\mathbf{C}\prime}$ è iniettiva su ${}^tp'(T^*X) = \mathrm{char}\,\overline{\partial}$. Ma una mappa lineare sopra un sottospazio vettoriale è iniettiva se e solo se è ivi propria. ■

OSSERVAZIONE. Ragionando come nel precedente Lemma si ha che, se $W \subseteq S \subseteq M$, allora

$$W \text{ è generica in } M \Leftrightarrow \begin{cases} W^{\mathbf{C}} \hookrightarrow Y \text{ è non caratteristica per } \overline{\partial}^b, \\ Y \hookrightarrow X \quad \text{è non caratteristica per } \overline{\partial}. \end{cases}$$

In tale caso S è generica in M ma W non è generica in senso usuale in S perché S non ha struttura complessa.

Sussiste il seguente

COROLLARIO 2.3 (cf. [D'A-D'A-Z]. *Sia S generica. Allora*

$$\mathcal{C}_{\maltese|M} = \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\bar{\partial}^b, \mathcal{C}_{\maltese|Y}), \qquad \maltese = S, \Omega, N.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.4 abbiamo

$${}^t\phi_*^{C'}\,\boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bar{\partial}, \mathcal{C}_{\maltese|X}) = \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\bar{\partial}^b, \mathcal{C}_{\maltese|Y}).$$

Bisogna pertanto provare che

$$(\mathcal{C}_{\maltese|M} \simeq)\, {}^t\tilde{\phi}'_*\,\mathcal{C}_{\maltese|M} = {}^t\phi_*^{C'}\,\boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bar{\partial}, \mathcal{C}_{\maltese|X}),$$

ossia

$$\boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bar{\partial}, \mathcal{C}_{\maltese|X}) = {}^t p'\,\mathcal{C}_{\maltese|M}.$$

Ma ciò è evidente in quanto

$$\boldsymbol{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bar{\partial}, \mathcal{O}_X) \simeq p^{-1}\mathcal{O}_M. \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

[D'A-D'A-Z] A. D'AGNOLO - P. D'ANCONA - G. ZAMPIERI, *Extension of CR functions to «wedge type» domains*, Rend. Mat. Acc. Lincei, **9** (1) (1990), pp. 35-42.

[K-S] M. KASHIWARA - P. SCHAPIRA, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque de la S.M.F., **128** (1985).

[S] P. SCHAPIRA, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der Math. Wiss., **289**, Springer-Verlag (1985).

[S-K-K] M. SATO - M. KASHIWARA - T. KAWAÏ, *Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations*, Springer Lecture Notes in Math., 287 (1973), pp. 265-529.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1991.