RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MICHAEL SCHENKE

Analoga des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie in der Gruppentheorie. II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 78 (1987), p. 175-225

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1987__78__175_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 78 (1987)

Analoga des Fundamentalsatzes der Projektiven Geometrie in der Gruppentheorie. II.

MICHAEL SCHENKE (*)

Bzeichnungen und wichtige Definitionen.

Während der ganzen Arbeit bezeichne

$\Phi(G)$	die Frattinigruppe der Gruppe G, den Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von G,
$N_G(U)$	den Normalisator der Untergruppe U von G,
$C_G(U)$	den Zentralisator der Untergruppe U von G,
$Z(G)$	das Zentrum der Gruppe G,
$Z_2(G)$	das zweite Zentrum der Gruppe G, also die Untergruppe Z von G mit $Z(G) \leqq Z$ und $Z(G/Z(G)) = Z/Z(G)$,
$\lvert G\rvert$	die Ordnung der Gruppe G,
$o(x)$	die Ordnung des Elementes x,
$\exp G$	den Exponenten der Gruppe G, also die minimale natürliche Zahl n, so daß für alle $g \in G$ gilt $g^n = 1$,
$d(G)$	die minimale Erzeugendenzahl der Gruppe G.

Es bedeuten

$N \trianglelefteq G$	N ist normal in G,
$M \lessdot G$	M ist eine maximale Untergruppe von G.

Ein Automorphismus σ der Gruppe G heißt

Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, Olshausenstrasse 40-60, 2300 Kiel 1, (West Germany).

innerer Automorphismus, wenn es ein $x \in G$ gibt, so daß für alle $g \in G$ gilt $g^\sigma = g^x$,

Potenzautomorphismus, wenn für alle $U \leqq G$ gilt $U^\sigma = U$,

universeller Potenzautomorphismus, wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß für alle $g \in G$ gilt $g^\sigma = g^z$.

Es seien

$\mathfrak{V}(G)$	der Verband der Untergruppen von G,
$U \cap V$	der Durchschnitt von U und V,
$U \cup V$	die verbandstheoretische Vereinigung von U und V, in Untergruppenverbänden also die von U und V erzeugte Untergruppe,
$\langle \mathfrak{M} \rangle$	das gruppentheoretische Erzeugnis der Teilmenge $\mathfrak{M}$ der Gruppe G.

Eine

Projektivität der Gruppe ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{V}(G)$, eine

Autoprojektivität der Gruppe G ist eine Projektivität der Gruppe G auf ihren eigenen Untergruppenverband.

Eine Projektivität φ der Gruppe G heißt

normalisatorerhaltend, wenn für alle $U \leqq G$ gilt $(N_G(U))^\varphi = N_{G^\varphi}(U^\varphi)$,

zentralisatorerhaltend, wenn für alle $U \leqq G$ gilt $(C_G(U))^\varphi = C_{G^\varphi}(U^\varphi)$,

indexerhaltend, wenn für alle zyklischen Untergruppen U von G und alle $V \leqq U$ gilt $|U:V| = |U^\varphi : V^\varphi|$. Nach [13], Seite 41, folgt bei endlichen Gruppen daraus, daß $|U:V| = |U^\varphi : V^\varphi|$ für alle $V \leqq U \leqq G$ gilt.

Seien x, y, $x_i \in G$. Dann seien

$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$,
$[x_1, \ldots, x_n]$	$= [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$,
$[x, ny]$	$= [[x, (n-1)y], y]$ mit $[x, 1y] = [x, y]$,
$[U, V]$	$= \langle [u, v] \mid u \in U, v \in V \rangle$,
$K_1(G)$	$= G$,

$K_{i+1}(G)$ $= [K_i(G), G]$,

$\mathrm{cl}\, G$ die Klasse von G, also das minimale n mit $K_n(G) = 1$, falls dieses existiert,

Maximale Klasse hat eine Gruppe G der Ordnung p^n, wenn $\mathrm{cl}\, G = n - 1$ gilt.

In Gruppen maximaler Klasse gelten die folgenden Standardbezeichnungen:

G_i $= K_i(G)$ für alle $i \geqq 2$ und $G_1 = C_G(G_2/G_4)$.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen bezeichne auch

$L_i(G)$ die Untergruppen G_i.

Ferner seien

$GF(p)$ der Körper mit p Elementen,

$p^n\mathbb{Z}$ das Ideal $\{p^n z : z \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z}_{p^n}$ $= \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, der Faktorring modulo p^n.

Einleitung.

Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie besagt, daß jeder Isomorphismus des Teilraumverbandes eines n-dimensionalen Vektorraumes mit $n \geqq 3$ auf einen anderen Vektorraum durch eine semilineare Abbildung induziert ist. Insbesondere sind also die zugrunde liegenden Skalarenkörper isomorph. Da n-dimensionale Räume als Vektorräume isomorph zum n-fachen direkten Produkt des Körpers sind, liegt die folgende Fragestellung nahe:

Gegeben sei eine algebraische Struktur S. Eine Projektivität ist dann ein Isomorphismus des Verbandes gewisser Teilstrukturen. Gibt es ein n, so daß jedes Element von S oder großer Teilklassen von S durch den Verband dieser Teilstrukturen seines n-fachen direkten Produktes gekennzeichnet ist?

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit (vol. 76) wurden vor allem zweifache Produkte von Gruppen vom Exponenten p untersucht. Dessen Kenntnis wird in den Zitaten vorausgesetzt.

2. Mehrfache Produkte von Gruppen vom Exponenten p.

Eine Schwierigkeit bei der Behandlung mehrfacher direkter Produkte ist die Tatsache, daß es keine 1.12 entsprechende Beschreibung des Untergruppenverbandes solcher Gruppen gibt. Aber selbst dort, wo der Untergruppenverband einigermaßen überschaubar ist, führt die Betrachtung mehrfacher Produkte von Gruppen zu umfangreichen und komplizierten Rechnungen. Wir werden uns in diesem Abschnitt auf metabelsche Gruppen beschränken.

2.1. *Metabelsche Gruppen.*

Die Aussage von Lemma 1.45.a) läßt die Frage aufkommen, ob sich eine solche Umkehrung von 1.40 auch für andere Fälle als $r = 2$ beweisen läßt, also die Frage, ob ein Fastisomorphismus auch in mehrfachen direkten Produkten auf die in 1.45 angegebene Weise eine Projektivität induziert. Daß dies nicht der Fall ist, wird Satz 4 zeigen. Da unser Beispiel 1.47 zu den Gruppen gehört, über die Satz 4 aussagt, daß jede Projektivität ihres dreifachen direkten Produktes durch einen Isomorphismus induziert ist, wir dort aber einen nichttrivialen Fastisomorphismus konstruiert haben, widerlegt der Satz unsere Vermutung.

Bevor wir zum Beweis von Satz 4 kommen, benötigen wir noch

2.1 Lemma. Seien $G = G_1 \times G_2 \times G_3$ mit $G_1 \simeq G_2 \simeq G_3$,

$$G_1 = \langle g_1, h_1 \colon r_1(g_1, h_1) = \ldots = r_n(g_1, h_1) = 1 \rangle ,$$

g_i, h_i beliebige Elemente von G_i für $i = 2$ und $i = 3$,

$$U = \langle g_1 g_2 g_3 ,\, h_1 h_2 h_3 \rangle$$

und π die Projektion von U auf G_1. Dann ist

$$\operatorname{Ker} \pi = \langle r_1(g_2 g_3 ,\, h_2 h_3), \ldots, r_n(g_2 g_3 ,\, h_2 h_3) \rangle^U .$$

Beweis. Sei $F = \langle x, y\rangle$ eine freie Gruppe. Sei $\sigma\colon F \to G_1$ der Epimorphismus mit $x^\sigma = g_1$ und $y^\sigma = h_1$, also mit $F/\operatorname{Ker}\sigma \simeq G_1$ und $\operatorname{Ker}\sigma = \langle r_1(x, y), \dots, r_n(x, y)\rangle^F$. Sei weiter $\tau\colon F \to U$ der Epimorphismus mit $x^\tau = g_1 g_2 g_3$ und $y^\tau = h_1 h_2 h_3$. Dann ist $\sigma = \tau\pi$. Wir behaupten, daß $\operatorname{Ker}\pi = (\operatorname{Ker}\sigma)^\tau$ ist:

Es ist $(\operatorname{Ker}\sigma)^{\tau\pi} = (\operatorname{Ker}\sigma)^\sigma = 1$, also ist $(\operatorname{Ker}\sigma)^\tau \leqq \operatorname{Ker}\pi$. Sei $z = w^\tau \in \operatorname{Ker}\pi$, also $z^\pi = 1$, daher $1 = w^{\tau\pi} = w^\sigma$, dann $w \in \operatorname{Ker}\sigma$ und somit $z \in (\operatorname{Ker}\sigma)^\tau$. Damit gilt die behauptete Gleichheit und insgesamt folgt

$$\operatorname{Ker}\pi = (\operatorname{Ker}\sigma)^\tau = \left(\langle r_1(x, y), \dots, r_n(x, y)\rangle^F\right)^\tau =$$

$$= \langle r_1(g_1 g_2 g_3, h_1 h_2 h_3), \dots, r_n(g_1 g_2 g_3, h_1 h_2 h_3)\rangle^U$$

Daraus folgt wegen $r_i(g_1, h_1) = 1$ die Aussage des Lemmas.

Sei in diesem gesamten Teilabschnitt $K := GF(p)$, der Polynomring über K werde mit $K[x]$ bezeichnet.

Wir kommen jetzt zu

Satz 4. *Sei G_1 eine metabelsche Gruppe maximaler Klasse vom Exponenten p. Es sei die Klasse von $C_{G_1}(K_2(G_1)/K_4(G_1))$ kleiner oder gleich zwei, und seien $G = G_1 \times G_2 \times G_3$ mit $G_i \simeq G_1$ und φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times G_2^\varphi \times G_3^\varphi$. Dann ist φ durch einen Isomorphismus induziert.*

Beweis. Wir erinnern den Leser zunächst an die aus der Liste der verwandten Abkürzungen zu entnehmende Vereinbarung, daß wir, um Mißverständnissen vorzubeugen, die in Gruppen G maximaler Klasse üblicherweise mit G_i bezeichneten charakteristichen Untergruppen auch mit $L_i(G)$ bezeichnen werden.

Sei $G = G_1 \times G_2 \times G_3$ ein minimales Gegenbeispiel mit der nicht durch einen Isomorphismus induzierten Projektivität φ. Für jedes i ist $\Phi(G_i) = G_i'$ maximal in jeder maximalen Untergruppe von G_i. Also ist jede maximale Untergruppe von G_i eine MA-Gruppe. Dort ist also nach 1.42 jede Projektivität durch einen Isomorphismus induziert. Da sich die Voraussetzungen für φ auf $G_i/Z(G_i)$ übertragen, sofern $|G_i| \geqq p^3$ ist, sind die Voraussetzungen von 1.40 erfüllt. Sei α eine danach existierende Baersche Abbildung, deren Einschränkungen auf die G_i Fastisomorphismen sind, und seien dazu a und c wie in Teilabschnitt 1.2. Falls G_1 eine MA-Gruppe ist, ist α nach 1.42 sogar für das zweifache Produkt schon als Isomorphismus erkannt. Sei also G_1 von maximaler Klasse vom Exponenten p mit $G_1'' = 1$ und $\mathrm{cl}\, L_1(G_1) = 2$. Für $\mathrm{cl}\, L_1(G_1) = 1$ wäre ja G_1 eine MA-Gruppe. Sei $G_1 = \langle s, s_1 \rangle$ mit $L_1(G_1) = L_2(G_1)\langle s_1 \rangle$. Entsprechend 1.31 seien s und s_1 so gewählt, daß $a(s, s_1) \neq 1$ oder $c(s, s_1) \neq 1$ gilt. Seien $s_{i+1} := := [s_i, s]$, und sei $\mathrm{cl}\, G_1 = n$. Wegen [7] ist dann

$$\text{(i)} \qquad n \leqq p - 1 \,.$$

Sei $[s_2, s_1] = s_k^{m_k} \cdot \ldots \cdot s_n^{m_n}$ mit $m_k \neq 0$ und $k \geqq 4$. Ein solches m_k gibt es wegen $\mathrm{cl}\, L_1(G_1) = 2$. Mit 1.43.$d$) folgt

$$[s_i, s_1] = [[s_{i-1}, s], s_1] = [[s_{i-1}, s_1], s]$$

und mittels vollständiger Induktion dann

$$\text{(ii)} \qquad [s_i, s_1] = s_{k+i-2}^{m_k} \cdot \ldots \cdot s_{n+i-2}^{m_n} \,.$$

Wegen $\mathrm{cl}\, L_1(G_1) = 2$ folgt aus

$$1 = [s_2, s_1, s_1] = [s_k^{m_k} \cdot \ldots \cdot s_n^{m_n}, s_1] = [s_k, s_1]^{m_k} \cdot \ldots \cdot [s_n, s_1]^{m_n} = s_{2k-2}^{m_k^2} g_{2k-1}$$

mit einem geeigneten $g_{2k-1} \in L_{2k-1}(G_1)$, daß

$$\text{(iii)} \qquad [s_k, s_1] = 1 \text{ und daher } [g, s_1, s_1] = 1 \text{ für alle } g \in L_1(G_1)$$

gelten. Daher ist $s_{2k-2} = 1$ und somit $k \geqq (n + 3)/2$.

Seien ι, $\varkappa$ Isomorphismen von G_1 nach G_2 und G_3. Es seien

$t := s^\iota$, $u := s^\varkappa$, $t_i := s_i^\iota$, $u_i := s_i^\varkappa$. Wegen 1.19.c) gilt

$$\text{(iv)} \qquad a(x^\iota, y^\iota) = a(x, y)^\iota \text{ und } a(x^\varkappa, y^\varkappa) = a(x, y)^\varkappa \text{ für alle } x, y \in G_1 \,.$$

Für alle $i, j \in K$ gilt weiter

$$\text{(v)} \qquad [s_1^i, s^j, s_1^i, (n - k) s^j] = [s_1, s, s_1, (n - k) s]^{i^2 j^{n-k+1}} \,.$$

Es gibt nämlich $x \in L_3(G_1)$, $y \in L_{k+1}(G_1)$, so daß

$$[s_1^i, s^j, s_1^i, (n-k)s^j] = [[s_1, s]^{ij}x, s_1^i, (n-k)s^j] =$$
$$= [[s_1, s, s_1]^{i^2j}y, (n-k)s^j] = [[s_1, s, s_1]^{i^2j}, (n-k)s^j][y, (n-k)s^j] =$$
$$= [s_1, s, s_1, (n-k)s]^{i^2j^{n-k+1}} \quad \text{ist}.$$

Wir benutzen dabei wiederholt 1.43 und [5], Hilfssatz 6.8, S.292.

Sei $V := V(j_1, j_2, i_1, i_2) = \langle v, w\rangle$ mit $v = st^{j_1}u^{j_2}$ und $w = s_1 t_1^{i_1} u_1^{i_2}$. Es seien $\bar{s} := s^j$, $\bar{s}_1 := s_1^i$, $\bar{s}_{i+1} := [\bar{s}_i, \bar{s}]$ und

$$g(s^j, s_1^i) := [\bar{s}_s, \bar{s}_1]\bar{s}_k^{-m_k} \cdot \ldots \cdot \bar{s}_n^{-m_n}.$$

Wegen (iii) ist dann $[g(s^j, s_1^i), \bar{s}_1] = 1$. Sei π die Projektion von V auf G_1. Seien $g_1 := g(t^{j_1}, t_1^{i_1})$ und $g_2 := g(u^{j_2}, u_1^{i_2})$. Mit 2.1 gilt dann

$$M := \operatorname{Ker}\pi = \langle g_1 g_2\rangle^V = \langle [g_1 g_2, iv] \colon i \in \mathbf{N}_0\rangle .$$

Die Elemente $[g_1 g_2, iv]$, die ungleich 1 sind, bilden eine Basis von M. Wegen 1.43.c) ist die Abbildung $[\cdot, v]$ auf M ein Homomorphismus, dessen Kern offenbar die Ordnung p hat, also ist $|C_M(V)| = p$ und, da $V/M \simeq G_1$ ist, ist $|Z(V/M)| = p$, also $|Z(V)| \leqq p^2$. Deshalb ist $Z(V) = \langle z, y\rangle$

$$\text{mit } z = s_n t_n^{i_1 j_1^{n-1}} u_n^{i_2 j_2^{n-1}} \quad \text{und} \quad y = s_n t_n^{i_1^2 j_1^{n-k+1}} u_n^{i_2^2 j_2^{n-k+1}}$$

oder, falls z und y linear abhängig sind, $i_1 = j_1^{k-2}$ und $i_2 = j_2^{k-2}$, denn nach (v) ist $y = [w, v, w, (n-k)v] \in V$, und nach [5], Hilfssatz 6.8, S.292, ist $z = [w, (n-1)v] \in V$. Sei $c(s, s_1) = s_n^d$, und seien i_1, i_2, j_1, j_2 alle ungleich null so gewählt, daß $i_1 \neq j_1^{k-2}$ gilt und die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 - j_1^{n-2} \\ 1 - j_2^{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 - i_1 j_1^{n-k} \\ 1 - i_2 j_2^{n-k} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Mit 1.18 folgt, daß für die zugehörigen v, w gilt $c(v, w) \in V \cap Z(G)$, und somit gibt es $\lambda, \mu \in GF(p)$ mit

$$s_n^{\lambda+\mu} t_n^{\lambda i_1 j_1^{n-1} + \mu i_1^2 j_1^{n-k+1}} u_n^{\lambda i_2 j_2^{n-1} + \mu i_2^2 j_2^{n-k+1}} = z^\lambda y^\mu =$$
$$= c(v, w) = c(s, s_1)\, c(t^{j_1}, t_1^{i_1})\, c(u^{j_2}, u_1^{i_2}) = s_n^d t_n^{d j_1 i_1} u_n^{d j_2 i_2}.$$

Durch Exponentenvergleich sieht man mit Hilfe der Gleichung $\lambda + \mu = d$ ein, daß

$$\lambda i_1 j_1^{n-1} + \mu i_1^2 j_1^{n-k+1} = \lambda j_1 i_1 + \mu j_1 i_1$$

und

$$\lambda i_2 j_2^{n-1} + \mu i_2^2 j_2^{n-k+1} = \lambda j_2 i_2 + \mu j_2 i_2 ,$$

also

$$\mu(i_1 j_1^{n-k} - 1) = \lambda(1 - j_1^{n-2}) \qquad \text{und} \qquad \mu(i_2 j_2^{n-k} - 1) = \lambda(1 - j_2^{n-2}) \text{ gelten .}$$

Wegen obiger linearer Unabhängigkeit ist folglich $\lambda = \mu = 0$, aus 1.27 folgt dann

$$\text{(vi)} \qquad c = 1 .$$

Sei nun $a(s, s_1) = s_n^j$. Sei $i_2 \in K$ so gewählt, daß $0 \neq i_2 \neq i_2^{k-2}$ gilt, was wegen $k \leqq n$ und (i) möglich ist. Dann werde $i_1 \neq 0$ so gewählt, daß es nicht Nullstelle des Polynoms

$$\det \begin{pmatrix} x^{n-1} - 1 & x^{n-k+2} - 1 \\ i_2^{n-1} - 1 & i_2^{n-k+2} - 1 \end{pmatrix}$$

aus $K[x]$ ist, was wieder wegen (i) möglich ist. Also sind

$$\begin{pmatrix} i_1^{n-1} - 1 \\ i_2^{n-1} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} i_1^{n-k+2} - 1 \\ i_2^{n-k+2} - 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig. Für $V = V(i_1, i_2, i_1, i_2)$, also mit $v = st^{i_1}u^{i_2}$ und $w = s_1 t_1^{i_1} u_1^{i_2}$, haben die zugehörigen z und y die Form $z = s_n t_n^{i_1^n} u_n^{i_2^n}$ und, wieder durch Einsetzen, $y = s_n t_n^{i_1^{n-k+3}} u_n^{i_2^{n-k+3}}$. Da nach 1.18 gilt $a(v, w) \in V \cap Z(G)$, gibt es $\lambda, \mu \in K$ mit

$$s_n^{\lambda+\mu} t_n^{\lambda i_1^n + \mu i_1^{n-k+3}} u_n^{\lambda i_2^n + \mu i_2^{n-k+3}} = z^\lambda y^\mu = a(v, w) =$$
$$= a(s, s_1) a(t^{i_1}, t_1^{i_1}) a(u^{i_2}, u_1^{i_2}) = s_n^j t_n^{j i_1} u_n^{j i_2} .$$

Die letzte Gleichheit folgt aus (vi) und 1.29. Durch Exponentenvergleich sieht man mit Hilfe der Gleichung $\lambda + \mu = j$ ein, daß

$$\lambda i_1^n + \mu i_1^{n-k+3} = \lambda i_1 + \mu i_1 \qquad \text{und} \qquad \lambda i_2^n + \mu i_2^{n-k+3} = \lambda i_2 + \mu i_2 ,$$

also

$$\lambda(i_1^{n-1}-1)=\mu(1-i_1^{n-k+2}) \quad \text{und} \quad \lambda(i_2^{n-1}-1)=\mu(1-i_2^{n-k+2})$$

gelten. Folglich ist $\lambda=\mu=0$, also $a(s, s_1)=1$ entgegen der Wahl von s und s_1.

Daß in Satz 4 die Voraussetzung über die Klasse der Untergruppe $C_{G_1}(K_2(G_1)/K_4(G_1))$, die ja scheinbar sehr technisch ist, nicht ersatzlos gestrichen werden kann, werden wir noch später, in Teilabschnitt 2.2, sehen.

Um das zweite Ziel dieses Teilabschnittes, den Beweis von Satz 5, zu erreichen, benötigen wir noch zwei Hilfssätze:

2.2 Lemma. Sei G eine metabelsche Gruppe. Seien $k, r \in \mathbb{N}$ mit $r \geqq 2$ und $g_1, \ldots, g_r \in G$. Dann ist

$$[g_1^k, g_2^k, \ldots, g_r^k]=\prod_{k\geqq e_1,\ldots,e_r\geqq 1}[g_1, g_2, (e_1-1)g_1, (e_2-1)g_2, e_3g_3, \ldots, e_rg_r]^{\prod_{j=1}^{r}\binom{k}{e_j}} .$$

Beweis. Mit 1.43 gilt

$$\begin{aligned}[g^k, h^k] &= [g, h^k]^{\binom{k}{1}}[g, h^k, g]^{\binom{k}{2}}[g, h^k, g, g]^{\binom{k}{3}}\cdot\ldots = \\ &= [g, h]^{\binom{k}{1}\binom{k}{1}}[g, h, h]^{\binom{k}{1}\binom{k}{2}}[g, h, h, h]^{\binom{k}{1}\binom{k}{3}}\cdot\ldots \\ &\quad \ldots[g, h, g]^{\binom{k}{2}\binom{k}{1}}[g, h, g, h]^{\binom{k}{2}\binom{k}{2}}\cdot\ldots[g, h, g, g]^{\binom{k}{3}\binom{k}{1}}\cdot\ldots \text{ usw}.\end{aligned}$$

Das ist Behauptung für $r=2$. Wir führen den Rest des Beweises durch Induktion über r. Also ist

$$\begin{aligned}&[g_1^k, \ldots, g_{r+1}^k]= \\ &=\prod_{k\geqq e_1,\ldots,e_r\geqq 1}[g_1, g_2, (e_1-1)g_1, (e_2-1)g_2, e_3g_3, \ldots, e_rg_r, g_{r+1}^k]^{\prod_{j=1}^{r}\binom{k}{e_j}}= \\ &=\prod_{k\geqq e_1,\ldots,e_r\geqq 1}\Big(\prod_{k\geqq e_{r+1}\geqq 1}[g_1, g_2, (e_1-1)g_1, (e_2-1)g_2, e_3g_3, \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots, r_rg_r, e_{r+1}g_{r+1}]^{\binom{k}{e_{r+1}}}\Big)^{\prod_{j=1}^{r}\binom{k}{e_j}}= \\ &\qquad =\prod_{k\geqq e_1,\ldots e_{r+1}\geqq 1}[g_1, g_2, (e_1-1)g_1, (e_2-1)g_2, \ldots, e_rg_r, e_{r+1}g_{r+1}]^{\prod_{j=1}^{r+1}\binom{k}{e_j}} .\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt aus 1.43.c), die zweite gilt wegen 1.43.e), und der Hilfssatz ist bewiesen.

Wir brauchen noch die folgende einfache

2.3 Bemerkung. Sei $g \in K[x]$ mit

$$g(x) = \prod_{k \in K \setminus \{-1\}} (x - k) , \qquad \text{also } g(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i .$$

Dann gilt $a_1 \neq 0 \neq a_2$.

Beweis. Bekanntlich ist $g(x) \cdot (x + 1) = x^p - x$. Andererseits ist auch $x^{p-1} - x^{p-2} + - \ldots - + x^2 - x) \cdot (x + 1) = x^p - x$. Da $K[x]$ ein Integritätsbereich ist, ist also $g(x) = x^{p-1} - x^{p-2} + - \ldots - + x^2 - x$, und die Bemerkung ist bewiesen.

Satz 5. Es seien $p \geqq 5$ eine Primzahl, $r \geqq p - 2$ und $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine endliche Gruppe vom Exponenten p mit $G'' = 1$. Alle G_i seien isomorph und nichtabelsch. Dann ist jede Projektivität von G durch einen Isomorphismus induziert.

Beweis. Wir wollen 1.40 anwenden. Sei also X eine minimale Gruppe vom Exponenten p mit $X'' = 1$ und der Eigenschaft, daß es $G = G_1 \times \ldots \times G_{p-2}$, Isomorphismen η_i: $X \to G_i$ und eine Projektivität φ von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_{p-2}^\varphi$ gibt, die nicht durch einen Isomorphismus induziert ist. Sei α die dann nach 1.40 existierende Baersche Abbildung von G zu φ, deren Einschränkung auf jedes G_i ein Fastisomorphismus ist, seien a die Amorphie bezüglich α and c wie im Teilabschnitt 1.2 definiert. Dann ist X von zwei Elementen erzeugt, also $X = \langle x, y \rangle$. Weiter sei

$$U := \langle u, v \rangle \quad \text{mit} \quad u = \prod_{i=1}^{p-2} (x^i)^{\eta_i} \quad \text{und} \quad v = \prod_{i=1}^{p-2} (y^i)^{\eta_i} .$$

Es sei $a(x, y) := a(x^{\eta_1}, y^{\eta_1})^{\eta_1^{-1}}$. Wegen 1.19.$c$) ist dann $a(x, y) = a(x^{\eta_i}, y^{\eta_i})^{\eta_i^{-1}}$ für alle i. Entsprechendes gilt für $c(x, y)$, was analog definiert werde. Gemäß 1.31 wählen wir x und y so, daß $a(x, y) \neq 1$ oder $c(x, y) \neq 1$ ist.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis von U', die der absteigenden Zentralreihe von U angepaßt ist und aus Elementen der Form $u_{ij} := [u, v, iu, jv]$ besteht. Eine solche Basis gibt es nach [5], Hilfssatz 1.11.b), S.258. Es bilden nämlich die Kommutatoren der Länge i ein Erzeugendensystem von $K_i(U)$ modulo $K_{i+1}(U)$, und wir brauchen nur eine linear unabhängige Teilmenge auszuwählen. Nach Teil $c.$) desselben Hilfssatzes in [5] ist $K_2(U) = \langle [u, v], K_3(U)\rangle$, insbesondere also $[u, v] = u_{00} \in \mathfrak{B}$, und alle u_{ij} mit $i \neq 0$ oder $j \neq 0$ sind in $K_3(U)$ enthalten. Insgesamt gibt es also $s_{ij} \in K$, so daß gilt:

(i) $$c(u, v) = \prod_{u_{ij}\in\mathfrak{B}} u_{ij}^{s_{ij}}$$

oder, komponentenweise betrachtet,

$$\prod_{k=1}^{p-2} c(x^k, y^k)^{\eta_k} = \prod_{k=1}^{p-2} \Big(\prod_{u_{ij}\in\mathfrak{B}} [x^k, y^k, ix^k, jy^k]^{s_{ij}} \Big)^{\eta_k} .$$

Diese Gleichung ist auch für $k = 0$ wahr, und mit 1.19.c) folgt

(ii) Für alle $k \in K \setminus \{-1\}$ ist $c(x^k, y^k) = \prod [x^k, y^k, ix^k, jy^k]^{s_{ij}}$, wobei das Produkt über alle (i, j) mit $u_{ij} \in \mathfrak{B}$ läuft.

Wäre $U' = Z(U)K_3(U)$, dann wäre

$$K_3(U) = [U', U] = [Z(U)K_3(U), U] = K_4(U) ,$$

also $K_3(U) = K_4(U) = 1$ und daher $\mathrm{cl}\, U \leqq 2$. Da die Projektion von U auf G_1 ein Epimorphismus ist, ist dann $\mathrm{cl}\, X = \mathrm{cl}\, G_1 \leqq 2$, was einen Widerspruch zu Satz 1 bedeutet, weil wir uns in einem minimalen Gegenbeispiel befinden. Da $U'/K_3(U)$ zyklisch ist, ist somit $Z(U) \leqq$ $\leqq K_3(U)$. Da $\alpha|_{G_i}$ ein Fastisomorphismus ist, bildet c in $Z(G)$ ab. Wegen 1.18 und 1.26.a) ist $c(u, v) \in U$ und daher sogar

$$c(u, v) \in Z(G) \cap U \leqq Z(U) \leqq K_3(U) .$$

Durch Betrachtung der Gleichung (i) modulo $K_3(U)$ sieht man also ein, daß

(iii) $$s_{00} = 0$$

gilt. Für alle $m, b \in \mathbb{N}$ sei

$$I_m^b := \{f \in K[t]\colon \mathrm{Grad}\, f \leqq b,\ t^m \text{ teilt } f\} .$$

Die I_m^b sind dann K-Teilräume von $K[t]$.

Seien nun $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqq e_i \leqq p-1$ und $b := \sum_{i=1}^{m} e_i$. Dann ist das Polynom $\prod_{i=1}^{m} \binom{t}{e_i^\varepsilon}$ in I_m^b; dabei sei $\varepsilon\colon \mathbb{Z} \to K$ der natürliche Epimorphismus.

In Lemma 2.2 seien nun $r = i + j + 2$, $g_i = x$ oder y. Dann folgt: Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ gibt es $w_1, \ldots, w_q \in K_{i+j+2}(X)$, $d_1, \ldots, d_q \in \mathbb{N}$, $h_1 \in I_{i+j+2}^{d_1}, \ldots, h_q \in I_{i+j+2}^{d_q}$, so daß für alle $k \in K$ gilt

$$[x^k, y^k, ix^k, jy^k] = \prod_{n=1}^{q} w_n^{h_n(k)}.$$

Die Grade der Polynome h_n sind gleich der Länge der Kommutatoren w_n. Da X von zwei Elementen erzeugt wird, ist mit [7] die Klasse von X kleiner oder gleich $p-1$. Daher können alle $d_n \leqq p-1$ angenommen werden.

Sei $\{b_1, \ldots, b_e\}$ eine der absteigenden Zentralreihe von X angepaßte Basis von X'. Wir stellen die w_n in dieser Basis dar, und da alle h_n in dem Teilraum I_{i+j+2}^{p-1} enthalten sind, haben wir bewiesen

(iv) Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ gibt es $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_e \in I_{i+j+2}^{p-1}$, so daß für alle $k \in K$ gilt: $[x^k, y^k, ix^k, jy^k] = \prod_{n=1}^{e} b_n^{\bar{h}_n(k)}$.

Da X einen Fastisomorphismus besitzt, ist $Z(X)$ zyklisch, also gibt es ein $b \in \{b_1, \ldots, b_e\}$ mit $Z(X) = \langle b \rangle$.

Wegen (iii) sind die Polynome $\bar{h}_n$, die wir gemäß (iv) in der Darstellung (ii) für $c(x^k, y^k)$ erhalten, Elemente von I_3^{p-1}. Sei nun $c(x, y) = b^m$. Indem wir nur die Exponenten von b betrachten und wieder benutzen, daß I_3^{p-1} ein Teilraum ist, sehen wir aus (ii) mit (iv), daß ein $h \in I_3^{p-1}$ existiert, so daß für alle $k \in K \setminus \{-1\}$ gilt

$$b^{mk^2} = c(x, y)^{k^2} = c(x^k, y^k) = b^{h(k)}.$$

Seien nun $g \in K[t]$ mit $g(t) = \prod_{i \in K \setminus \{-1\}} (t - i)$ und I das von $t^p - t$ erzeugte Hauptideal. Dann folgt: Es gibt ein $e \in K$, so daß

$$mt^2 \equiv h + eg (I)$$

ist. Da die Polynome h und g kleineren Grad als p haben, gilt sogar Gleichheit. Da in 2.3 nun $a_1 \neq 0$ ist, ist $e = 0$, wegen $h \in I_3^{p-1}$ steht auf beiden Seiten das Nullpolynom, insbesondere ist $m = 0$ und daher $c = 1$.

Dieselben Überlegungen wie für $c(x, y)$ können wir auch für $a(x, y) =: b^w$ anstellen. Wir erhalten dann ein Polynom $h \in I_3^{p-1}$, so daß für alle $k \in K \setminus \{-1\}$ gilt:

$$b^{wk} = a(x, y)^k = a(x^k, y^k) = b^{h(k)}.$$

Die mittlere Gleichheit folgt wegen $c = 1$ aus 1.29. Wie oben folgt nun mit 2.3, diesmal aus der Tatsache, daß $a_2 \neq 0$ ist, daß $w = 0$, also $a(x, y) = 1$ gilt, im Widerspruch zur Wahl von x und y. Mit 1.35 ist der Satz bewiesen.

Der Beweis legt die Vermutung nahe, daß $p - 2$ nicht die bestmögliche Schranke ist. In der Tat liefert 1.44 für $p = 5$ einen besseren Wert. Daß sich die Zahl der nötigen direkten Faktoren andererseits nicht sehr viel verbessern läßt, werden wir im nächsten Teilabschnitt sehen.

2.2. *Ein Beispiel für metabelsche Gruppen.*

In diesem Teilabschnitt soll einmal gezeigt werden, daß sich die Voraussetzung $\mathrm{cl}\, L_1(G_i) \leqq 2$ in Satz 4 nicht ersatzlos streichen läßt. Weiterhin soll auch eingesehen werden, daß zwar wahrscheinlich die Schranke $p - 2$ für die Wahl von r in Satz 5 nicht bestmöglich ist, sie sich aber andererseits nicht wesentlich, genauer: durch einen von der Primzahl unabhängigen, für alle metabelschen Gruppen von Primzahlexponenten gleichzeitig gültigen Wert, verbessern läßt. Wir werden eine Menge $\mathfrak{M}$ von metabelschen Gruppen von Primzahlexponenten, und übrigens auch maximaler Klasse, angeben, so daß für jedes $r \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ ein $G \in \mathfrak{M}$ existiert mit der Eigenschaft, daß das r-fache direkte Produkt von G eine Projektivität besitzt, die nicht durch einen Isomorphismus induziert ist. Da dies andererseits nach Satz 5 jedoch für das $p - 2$-fache Produkt von G gilt, folgt daraus:

Es gibt unendlich viele Zahlen $m \in \mathbf{N}$, so daß eine Gruppe existiert, deren m-faches Produkt eine nicht durch einen Isomorphismus induzierte Projektivität besitzt, bei deren $m + 1$-fachem Produkt aber sehr wohl jede Projektivität induziert ist.

Die von uns angegebenen Gruppen scheinen uns die einzigen bekannten mit dieser Eigenschaft zu sein.

2.4 Beispiel. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge der metabelschen Gruppen X von Primzahlexponenten und maximaler Klasse, die durch folgende Relationen gekennzeichnet sind:

$$X = X(n, p) = \langle t, t_1, \ldots, t_n \colon t^p = t_1^p = \ldots = t_n^p = 1 = [t_i, t_j]$$

$$\text{für alle } i, j \geqq 2,\ [t_i, t] = t_{i+1} \text{ für alle } i \geqq 1,$$

$$[t_i, t_1] = t_{i+2} t_{i+3}^{-1} \text{ für alle } i \geqq 2\rangle\ .$$

Dabei seien $t_j = 1$ für alle $j > n$. Es ist dann $\operatorname{cl} X = n$, und nach 1.38 gibt es eine solche Gruppe vom Exponenten p für $p > n$.

Sei nun $r \geqq 2$ vorgegeben. Dann wählen wir

$$p > n \geqq 6r^4 + 10r^3 - 6r^2$$

und definieren eine Abbildung $\beta\colon X \to Z(X)$ folgendermaßen: Es sei

$$(tt_1^i)^\beta := t_n^{\delta(i)}\ , \qquad (t_1^i)^\beta := 1\ , \qquad (t^j t_1^i)^\beta := \big((tt_1^{i/j})^\beta\big)^j$$

für alle $i \in GF(p)$, $j \in GF(p) \setminus \{0\}$, dabei seien $\delta(i) \in GF(p)$, aber nicht alle gleich null. Ferner werde β konstant auf Restklassen nach X' fortgesetzt. Seien $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ und $\eta_1, \ldots, \eta_r$ Isomorphismen von X auf $G_1, \ldots, G_r$. Seien ${}_it := t^{\eta_i}$ und ${}_it_j := t_j^{\eta_i}$. Seien $x_1, \ldots, x_r \in X$ und $g_i := x_i^{\eta_i}$. Zu $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ sei dann

$$g^\alpha := (x_1 x_1^\beta)^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot (x_r x_r^\beta)^{\eta_r}\ .$$

Wir behaupten, daß α eine Autoprojektivität φ von G induziert und daß φ durch keinen Automorphismus von G induziert ist.

Beweis. Wir berechnen zunächst die Amorphie bezüglich der Abbildung α:

Sei $s \in \{1, \ldots, r\}$ und $u := {}_st$, $u_i := {}_st_i$. Dann ist

$$a(u^i u_1^j, u^k u_1^m)^\alpha = (u^k u_1^m)^{-\alpha} (u^i u_1^j)^{-\alpha} (u^i u_1^j u^k u_1^m)^\alpha =$$

$$= (u^k u_1^m)^{-1} (t^k t_1^m)^{-\beta\eta_s} (u^i u_1^j)^{-1} (t^i t_1^j)^{-\beta\eta_s} u^i u_1^j u^k u_1^m (t^i t_1^j t^k t_1^m)^{\beta\eta_s} =$$

$$= (t^{-k} t_1^{-m})^{\beta\eta_s} (t^{-i} t_1^{-j})^{\beta\eta_s} (t^{i+k} t_1^{j+m})^{\beta\eta_s}.$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, daß β ins Zentrum abbildet und konstant auf Restklassen nach $\Phi(X)$ ist. Sei nun $f(i,j) := 0$, falls $i = 0$ ist, sonst sei $f(i,j) := i \cdot \delta(j/i)$. Da die Amorphie in $Z(G)$ liegt und α dort die Identität bewirkt, ist dann

$$a(u^i u_1^j,\, u^k u_1^m) = u_n^{f(i+k,\, j+m) - f(i,j) - f(k,m)} . \tag{1}$$

Dadurch ist die Amorphie völlig bestimmt.

Sei $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r \in G$. Ist $g_i \neq 1$, so existiert ein $j(i)$ mit

$$g_i \in L_{j(i)}(G_i) \setminus L_{j(i)+1}(G_i) .$$

Dann sei

$$k_i(g) := j(i) .$$

Falls $g_i = 1$ ist, sei $k_i(g) := n + 1$.

Eine Komponente i heiße oberwertig (bezüglich g) genau dann wenn

$$k_i(g) > k_1(g)$$

gilt.

Sei nun M eine maximale Untergruppe in einem der G_i. Wir behaupten, daß $\alpha|_M$ ein Isomorphismus ist. Dazu sei $M = \langle u^i u_1^j \rangle \, \Phi(G_s)$ mit u und s wie oben. Ist $i = 0$, so ist $\alpha|_M = id_M$. Sei $i \neq 0$. Dann ist

$$f(i(k+m), j(k+m)) - f(ik, jk) - f(im, jm) =$$
$$= i(k+m)\,\delta(j/i) - ik\delta(j/i) - im\delta(j/i) = 0 .$$

Also ist

$$a(u^{ik} u_1^{jk},\, u^{im} u_1^{jm}) = 1 .$$

Damit ist $\alpha|_M$ ein Isomorphismus und α insbesondere bijektiv. Sobald wir also gezeigt haben, daß α eine Projektivität φ induziert, wissen wir wegen 1.45.b), daß φ nicht einmal auf $G_1 \times G_2$ durch einen Isomorphismus induziert ist, denn X ist keine MA-Gruppe.

Um nun zu beweisen, daß α eine Projektivität induziert, reicht es, zu zeigen, daß Untergruppen auf Untergruppen abgebildet werden.

Ja, es reicht sogar, dies für von zwei Elementen erzeugte Untergruppen zu tun. Seien nämlich $U \leqq G$, $x, y \in U$, $V := \langle x, y\rangle$. Dann ist $x^\alpha (y^\alpha)^{-1} \in V^\alpha \subseteq U^\alpha$, also auch $U^\alpha \leqq G$. Sei also $U = \langle x, y\rangle$ gegeben mit

$$x = {}_1t^{a_1} \cdot {}_1t_1^{b_1} \cdot {}_2t^{a_2} \cdot {}_2t_1^{b_2} \cdot \ldots \cdot {}_rt^{a_r} \cdot {}_rt_1^{b_r} \cdot g$$

und

$$y = {}_1t^{c_1} \cdot {}_1t_1^{d_1} \cdot {}_2t^{c_2} \cdot {}_2t_1^{d_2} \cdot \ldots \cdot {}_rt^{c_r} \cdot {}_rt_1^{d_r} \cdot h \qquad \text{mit } g, h \in G' .$$

Dann heiße $A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \ldots a_r & b_r \\ c_1 & d_1 \ldots c_r & d_r \end{pmatrix}$ die zu U (bezüglich x und y) gehörige Matrix. Als Komponentenmatrizen A_i zur Komponente i von U seien die 2×2-Untermatrizen der Form $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Wir definieren eine Typfunktion j auf der Menge der 2×2-Matrizen: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann sei

$$\begin{aligned}
j(A) &:= 1\,, && \text{falls } a = d = 1\,,\ c = b = 0\,,\\
j(A) &:= 2\,, && \text{falls } \det A \neq 0\,,\ c = b = 0\,,\ d = a^2\,,\ a \neq 1\,,\\
j(A) &:= 3\,, && \text{falls } \det A \neq 0\,,\ c = 0\,,\ d = a^2\,,\ b \neq 0\,,\\
j(A) &:= 4\,, && \text{falls } \det A \neq 0\,,\ c = 0\,,\ d \neq a^2\,,\\
j(A) &:= 5\,, && \text{falls } \det A \neq 0\,,\ c \neq 0\,,\\
j(A) &:= 6\,, && \text{falls } \det A = 0
\end{aligned}$$

ist. Zwei Matrizen A und B heißen äquivalent, wenn $j(A) = j(B)$ ist. Wir verfeinern die Einteilung in Äquivalenzklassen wie folgt:

Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Ist $j(A) = j(B) = 2$, so

seien A und B genau dann äquivalent, wenn $A = B$ ist. Ist $j(A) = j(B) = 3$, so seien sie genau dann äquivalent, wenn $b_1/d_1 = b_2/d_2$ ist. Ist $j(A) = j(B) = 4$, so seien sie genau dann äquivalent, wenn

$a_1^2/d_1 = a_2^2/d_2$ ist. Ist $j(A) = j(B) = 5$, so seien sie genau dann äquivalent, wenn $a_1/c_1 = a_2/c_2$ ist. Die Matrizen vom Typ 6 mögen weiterhin eine Klasse bilden.

Sei «$\leqq$» eine beliebige Anordnung auf den Äquivalenzklassen mit folgenden Bedingungen:

a.) Seien $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zwei Äquivalenzklassen, $A \in \mathcal{K}_1$, $B \in \mathcal{K}_2$. Ist $j(A) \leqq j(B)$, so sei $\mathcal{K}_1 \leqq \mathcal{K}_2$.

b.) Die Klasse, die nur aus der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ besteht, sei, abgesehen von der Einheitsmatrix, das minimale Element der Ordnung.

Wir werden auch $A \leqq B$ schreiben, falls ihre Äquivalenzklassen in der $\leqq$-Relation stehen.

Wir stellen nun einige Formeln bereit, zu deren Beweis wiederholt 1.43 angewandt wird.

$$(2) \qquad [t_2^i, t^j] = t_3^{ij} t_4^{i\binom{j}{2}} \cdot \ldots \cdot t_n^{i\binom{j}{n}} .$$

$$(3) \qquad [t_2^i, t_1^j] = [t_2, t_1]^{ij} [t_2, t_1, t_1]^{i\binom{j}{2}} g_8 = t_4^{ij} t_5^{-ij} t_6^{i\binom{j}{2}} t_7^{-2i\binom{j}{2}} h_8$$

mit geeigneten $g_8, h_8 \in L_8(X)$.

$$(4) \qquad (t_1^i)^t = (t_1 t_2^{\binom{j}{1}} t_3^{\binom{j}{2}} t_4^{\binom{j}{3}} t_5^{\binom{j}{4}} g_6)^i =$$

$$= t_1^i t_2^{ij} t_3^{i\binom{j}{2}} t_4^{i\binom{j}{3}} t_5^{i\binom{j}{4}} \prod_{k=1}^{i-1} [t_2^j t_3^{\binom{j}{2}}, t_1^k] \cdot h_6 = t_1^i t_2^{ij} t_3^{i\binom{j}{2}} t_4^{i\binom{j}{3}+j\binom{i}{2}} t_5^{i\binom{j}{4}-j\binom{i}{2}+\binom{i}{2}\binom{j}{2}} m_6$$

mit geeigneten $g_6, h_6, m_6 \in L_6(X)$.

Die zweite Gleichheit ist eine Anwendung von 1.28. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leqq m \leqq n$ und $i, j, k, e \in GF(p)$ ergibt sich daher

$$(5) \qquad [t_m, t^i t_1^j] = [t_m, t^i][t_m, t_1^j][t_m, t^i, t_1^j] = t_{m+1}^i t_{m+2}^{\binom{i}{2}+j} g_{m+3}$$

mit geeignetem $g_{m+3} \in L_{m+3}(X)$.

$$(6) \qquad [t_m, 2t^i t_1^j] = [t_{m+1}^i t_{m+2}^{\binom{i}{2}+j} g_{m+3}, t^i t_1^j] = t_{m+2}^{i^2} t_{m+3}^{2(i\binom{i}{2}+ij)} g_{m+4}$$

mit geeignetem $g_{m+4} \in L_{m+4}(X)$.

$$(7)\qquad [t_m,\, 2t^i t_1^j]^{\frac{1}{2}}\, [t_m,\, t_1^{i^2}]^{-\frac{1}{2}}\, [t_m,\, t^i t_1^j,\, t_1^{i^2}]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= t_{m+2}^{\frac{1}{2}i^2}\, t_{m+3}^{i\binom{i}{2}+ij}\, t_{m+2}^{-\frac{1}{2}i^2}\, t_{m+3}^{\frac{1}{2}i^2}\, t_{m+3}^{-\frac{1}{2}i^3}\, h_{m+4} = t_{m+3}^{ij}\, k_{m+4}$$

mit geeigneten h_{m+4}, $k_{m+4} \in L_{m+4}(X)$.

$$(8)\qquad [t_m,\, 2t^i t_1^j][t_m,\, t_i^k]^{-1} = t_{m+2}^{i^2-k}\, g_{m+3}$$

mit geeignetem $g_{m+3} \in L_{m+3}(X)$.

$$(9)\qquad [t_m,\, t^i t_1^j][t_m,\, t^k t_1^e] = t_{m+1}^{i+k}\, g_{m+2}$$

mit geeignetem $g_{m+2} \in L_{m+2}(X)$.

$$(10)\qquad [t_m,\, 2t^j] = [t_{m+1}^j\, t_{m+2}^{\binom{j}{2}}\, t_{m+3}^{\binom{j}{3}}\, t_{m+4}^{\binom{j}{4}}\, g_{m+5},\, t^j] =$$

$$= t_{m+2}^{j^2}\, t_{m+3}^{j\binom{j}{2}}\, t_{m+4}^{j\binom{j}{3}}\, t_{m+5}^{j\binom{j}{4}}\, t_{m+3}^{j\binom{j}{2}}\, t_{m+4}^{\binom{j}{2}\binom{j}{2}}\, t_{m+5}^{\binom{j}{2}\binom{j}{3}}\, t_{m+4}^{\binom{j}{3}j}\, t_{m+5}^{\binom{j}{3}\binom{j}{2}}\, t_{m+5}^{j\binom{j}{4}}\, g_{m+6} =$$

$$= t_{m+2}^{j^2}\, t_{m+3}^{2j\binom{j}{2}}\, t_{m+4}^{2j\binom{j}{3}+\binom{j}{2}^2}\, t_{m+5}^{2j\binom{j}{4}+2\binom{j}{2}\binom{j}{3}}\, h_{m+6}$$

mit geeigneten g_{m+6}, $h_{m+6} \in L_{m+6}(X)$.

$$(11)\qquad [t_m,\, 3t^j] = t_{m+3}^{j^3}\, t_{m+4}^{3j^2\binom{j}{2}}\, t_{m+5}^{a(j)}\, g_{m+6}$$

mit $a(j) = 3j^2\dbinom{j}{3} + 3j\dbinom{j}{2}^2$ und geeignetem $g_{m+6} \in L_{m+6}(X)$.

$$(12)\qquad [t_m,\, t_1^{j^2}][t_m,\, 2t^j]^{-1}[t_m,\, 3t^j] =$$

$$= t_{m+2}^{j^2}\, t_{m+3}^{-j^2}\, t_{m+4}^{\binom{j^2}{2}}\, t_{m+2}^{-j^2}\, t_{m+3}^{-2j\binom{j}{2}}\, t_{m+4}^{-\binom{j}{2}^2-2j\binom{j}{3}}\, t_{m+3}^{j^3}\, t_{m+4}^{3j^2\binom{j}{2}}\, h_{m+5} = t_{m+4}^{b}\, g_{m+5}$$

mit geeigneten g_{m+5}, $h_{m+5} \in L_{m+5}(X)$ und

$$b = \binom{j^2}{2} - \binom{j}{2}^2 - 2j\binom{j}{3} + 3j^2\binom{j}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}j^4 - \frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{4}j^4 + \frac{1}{2}j^3 - \frac{1}{4}j^2 - \frac{1}{3}j^4 + j^3 - \frac{2}{3}j^2 + \frac{3}{2}j^4 - \frac{3}{2}j^3 =$$

$$= \frac{17}{12}j^4 - \frac{17}{12}j^2 .$$

Für den Fall $j = -1$ berechnen wir den Ausdruck von (12) modulo $L_{m+6}(X)$ neu, brauchen also nach (12) nur den Exponenten von t_{m+5}

neu zu bestimmen. Dann ist

(13) $$[t_m, t_1][t_m, 2t^{-1}]^{-1}[t_m, 3t^{-1}] = t^c_{m+5}\, g_{m+6}$$

mit $g_{m+6} \in L_{m+6}(X)$ und $c = 4 + a(-1) = -2$.

Unsere wichtigste Zwischenbehauptung ist

(14) Sei $U = \langle x, y\rangle$. Für die Komponentenmatrizen gelte:

$j(A_1) = 1$, und aus $i \leqq m$ folge $A_i \leqq A_m$.

Sei $e := \max\{i: j(A_i) = 1\}$.

Dann ist $\prod_{i=1}^{e} {}_it_n \in U$.

Wir konstruieren zum Beweis eine Folge $w_1, \ldots, w_s$ von Elementen von U' und eine Funktion f: $\{1, \ldots, s\} \to \{e+1, \ldots, r+1\}$ mit

$$w_1 = [x, y], \qquad \langle w_s\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{e} {}_it_n \right\rangle, \qquad f(1) = e+1, \qquad f(s) = r+1,$$

so daß für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$ gilt:

(i) Ist $i < s$, so ist $w_{i+1} = w_i$, oder es gibt $g_{jm} \in U$ und $k(j) \in GF(p)$ mit $u \in \mathbf{N}$ und

$$w_{i+1} = \prod_{j=1}^{u} [w_i, g_{j1}, \ldots, g_{jr(j)}]^{k(j)}.$$

(ii) Die Funktion f ist monoton, das heißt $f(i+1) \geqq f(i)$.

(iii) Für $i \geqq 2$ sind alle j mit $e+1 \leqq j < f(i)$ oberwertig bezüglich w_i.

(iv) Falls $f(i) = f(i+1) \neq r+1$ ist, so ist

$$k_1(w_{j+1}) - k_1(w_j) < k_{f(j+1)}(w_{j+1}) - k_{f(j)}(w_j).$$

Ein Index i heiße Sprungindex, falls

$$j(A_{f(i)}) < j(A_{f(i+1)})$$

st. Sei i ein Sprungidex und $j(A_{f(i)}) = m$, so heiße i Sprungindex zum Wert m. Da für $j \leqq k$ gilt $A_j \leqq A_k$, kann es, sobald wir gezeigt haben, daß f monoton ist, offenbar zu jedem Wert m höchstens einen Sprungindex geben. Dieser werde mit i_m bezeichnet.

Wir geben zunächst eine Skizze des Konstruktionsprozesses an: Ausgehend von w_1, geben wir Umformungen des Typs (i) an, so daß alle j mit $e + 1 \leqq j < f(i)$ oberwertig bleiben bezüglich w_{i+1}; gemäß Konstruktion sollen sie es schon bezüglich w_i sein. Die Komponente $f(i)$ soll entweder oberwertig werden, in dem Falle werden wir $f(i + 1)$ so definieren, daß $f(i + 1) > f(i)$ ist, oder es sei $f(i + 1) :=$ $:= f(i)$, und der $k_{f(i)}$-Wert von w_{i+1} soll gegenüber dem $k_{f(i)}$-Wert von w_i schneller steigen, als es $k_1(w_{i+1})$ gegenüber $k_1(w_i)$ tut, genau wie es in Eigenschaft (iv) beschrieben ist. Nach endlich vielen Schritten ist dann also der $k_{f(i)}$-Wert größer als der k_1-Wert und damit auch $f(i)$ oberwertig.

Jeweils an Sprungindizes i_m werden wir Abschätzungen nach oben für den Wert von $k_1(w_{i_m})$ angeben, die $k_1(w_{i_m}) < n$ zeigen.

Sei also schon w_i konstruiert und $f(i) = u$.

Fall 1: $u \neq r + 1$ und $j(A_u) = 2$.

In diesem Falle sei

$$w_{i+1} := [w_i, y^{1/a_u^2}][w_i, 2x^{1/a_u}]^{-1}[w_i, 3x^{1/a_u}] .$$

Für die Projektion π_u auf die u-te Komponente G_u gilt dann

$$\pi_u(w_{i+1}) = [\pi_u(w_i), {}_ut_1][\pi_u(w_i), 2\,{}_ut]^{-1}[\pi_u(w_i), 3\,{}_ut] = 1 ,$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, daß die definierende Relation $[t_m, t_1] = t_{m+2}t_{m+3} = [t_m, 2t][t_m, 3t]^{-1}$ in X gilt. Insbesondere gilt also

(15) Komponenten mit $j(A_u) = 2$ und $u < f(i)$ bleiben immer oberwertig,

vorausgesetzt, wir zeigen am Ende $k_1(w_s) = n$.

Falls $a_u = -1$ ist, ist

$$\pi_1(w_{i+1}) = [\pi_1(w_i), {}_1t_1][\pi_1(w_i), 2\,{}_1t^{-1}]^{-1}[\pi_1(w_i), 3\,{}_1t^{-1}] .$$

Nach (13) und 1.43 ist dann

$$(16) \qquad k_1(w_{i+1}) = k_1(w_i) + 5 .$$

Falls $a_u \neq -1$ ist, also $a_u \notin \{0, 1, -1\}$, ist b in (12) ungleich null, da wegen der Voraussetzung $p > 6r^4 + 10r^3 - 6r^2$ insbesondere $p > 17$ gilt. Dann ist

$$(17) \qquad k_1(w_{i+1}) = k_1(w_i) + 4 .$$

Für alle c ist

$$(18) \qquad k_c(w_{i+1}) \geqq k_c(w_i) + 1 .$$

Sei

$$f(i+1) := \min\left(\{v\colon\ v \geqq e + 1,\ v \text{ ist nicht oberwertig bezüglich } w_{i+1}\} \cup \{r+1\}\right) .$$

Wegen (15) ist dann $f(i+1) > f(i)$.

Falls Komponenten c mit $j(A_c) = 2$ überhaupt existieren, gilt folgende Abschätzung:

Sei $\delta := 1$, falls $A_{e+1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist, sonst sei $\delta := 0$ Es war $k_1(w_1) = 2$. Damit alle c mit $j(A_c) = 2$ oberwertig geworden sind, muß das Verfahren nach Fall 1 höchstens $r - 1$-mal angewandt worden sein, also gilt

$$(19) \qquad k_1(w_{i_2}) \leqq 4(r-1) + 2 + \delta \leqq 4r - 1 .$$

Für alle Komponenten c mit $j(A_c) > 2$ gilt wegen (16), (17) und (18), daß die Differenz zwischen $k_1(w_i) - k_c(w_i)$ und $k_1(w_{i+1}) - k_c(w_{i+1})$ höchstens $3 + \delta$ beträgt. Wegen $k_1(w_1) - k_c(w_1) \leqq 0$ gilt also

$$(20) \qquad k_1(w_{i_2}) - k_c(w_{i_2}) \leqq 3(r-1) + \delta \leqq 3r - 2 .$$

Falls keine c mit $j(A_c) = 2$ existieren, sei $i_2 := 1$.

Fall 2: $u \neq r + 1$ und $j(A_u) = 3$.

In diesem Falle seien $\bar{x} := xy^{-b_u/a_u^2}$ und

$$w_{i+1} := [w_i, 2\bar{x}]^{\frac{1}{2}} [w_i, y]^{-\frac{1}{2}} [w_i, \bar{x}, y]^{-\frac{1}{2}} .$$

Für die Komponenten v mit $j(A_v) \leqq 2$ ist nach (7) für $i = a_v$ und $j = -b_u a_v^2/a_u^2$ klar, daß

$$k_v(w_{i+1}) = k_v(w_i) + 3 \tag{21}$$

gilt. Dasselbe gilt für die Komponenten v mit $j(A_v) = 3$ und $b_v/a_v^2 \neq \neq b_u/a_u^2$, insbesondere für alle v mit $A_v \leqq A_u$, wobei A_v nicht äquivalent zu A_u ist. Sei hingegen v so gewählt, daß $A_u \sim A_v$ gilt, also $b_v/a_v^2 = b_u/a_u^2$. Nach (7) ist dann

$$k_v(w_{i+1}) \geqq k_v(w_i) + 4\,. \tag{22}$$

Durch das Verfahren nach Fall 2 bleibt also jede Komponente v mit $e + 1 \leqq v < u$, die bezüglich w_i oberwertig war, auch bezüglich w_{i+1} oberwertig.

Ist nun u nicht oberwertig bezüglich w_{i+1}, so sei $f(i+1) := := f(i) = u$. In diesem Falle ist

$$k_1(w_{i+1}) - k_1(w_i) = 3 < 4 \leqq k_u(w_{i+1}) - k_u(w_i)\,, \tag{23}$$

also Bedingung (iv) erfüllt.

Ist u oberwertig bezüglich w_{i+1}, so sei wieder

$$f(i+1) := \min\big(\{v\colon\ v \geqq e+1,\ v \text{ ist nicht oberwertig bezüglich } w_{i+1}\} \cup \{r+1\}\big)\,.$$

Wegen (21) und (22) ist daher $f(i+1) > f(i)$.

Wir kommen zu den Anzahlabschätzungen an dem Sprungindex i_3.

Falls keine c mit $j(A_c) = 3$ existieren, sei $i_3 := i_2$.

Nach (23) gilt sonst für die feste Komponente u mit $j(A_u) = 3$, daß ihr k_u-Wert schneller wächst als der k_1-Wert. Gemäß (20) ist also spätestens nach $3r - 1$ Schritten die Komponente u oberwertig. Da es höchstens $r - 1$ Komponenten c mit $j(A_c) = 3$ gibt, sind nach spätestens $(r-1)(3r-1)$ weiteren Schritten auch alle Komponenten c mit $j(A_c) = 3$ oberwertig. In jedem Schritt wächst nach (21) der k_1-Wert um 3, also ist

$$k_1(w_{i_3}) \leqq 4r - 1 + 3(r-1)(3r-1) \leqq (3r-1)^2\,, \tag{24}$$

wobei der der erste Summand des mittleren Ausdrucks auf (19) zurückgeht.

Für alle c mit $j(A_c) > 3$ gilt wegen (21), daß die Differenz zwischen $k_1(w_i) - k_c(w_i)$ und $k_1(w_{i+1}) - k_c(w_{i+1})$ bei der Durchführung eines Schrittes gemäß Fall 2 höchstens 2 beträgt. Für solche c ist also

$$\text{(25)} \qquad k_1(w_{i_3}) - k_c(w_{i_3}) \leqq$$
$$\leqq k_1(w_{i_2}) - k_c(w_{i_2}) + 2(r-1)(3r-1) \leqq (2r-1)(3r-1)\,,$$

wobei die zweite Ungleichung aus (20) folgt.

Fall 3: $u \neq r+1$ und $j(A_u) = 4$.

In diesem Falle seien

$$\bar{y} := y^{a_u^2/d_u} \qquad \text{und} \qquad w_{i+1} := [w_i, 2x][w_i, \bar{y}]^{-1}\,.$$

Für die Komponenten v mit $j(A_v) \leqq 3$ ist nach (8) mit $i = a_v$ und $k = a_v^2 a_u^2/d_u \neq a_v^2$ dann

$$\text{(26)} \qquad k_v(w_{i+1}) = k_v(w_i) + 2\,.$$

Dasselbe gilt für die Komponenten v mit $j(A_v) = 4$ aber $a_v^2/d_v \neq a_u^2/d_u$. Hingegen gilt für v mit $A_v \sim A_u$ nach (8) wieder

$$\text{(27)} \qquad k_v(w_{i+1}) \geqq k_v(w_i) + 3\,.$$

Wie im Fall 2 bleibt also jede Komponente v mit $e+1 \leqq v < u$, die bezüglich w_i oberwertig war, auch bezüglich w_{i+1} oberwertig.

Ist nun u nicht oberwertig bezüglich w_{i+1}, so sei $f(i+1) := := f(i) = u$. In diesem Falle ist

$$\text{(28)} \qquad k_1(w_{i+1}) - k_1(w_i) = 2 < 3 \leqq k_u(w_{i+1}) - k_u(w_i)\,,$$

also Bedingung (iv) erfüllt.

Ist u oberwertig bezüglich w_{i+1}, so sei $f(i+1)$ wie in Fall 1 oder 2 definiert.

Für den Sprungindex i_4 gilt:

Falls es keine c mit $j(A_c) = 4$ gibt, sei $i_4 := i_3$.

Nach (28) gilt sonst für die feste Komponente u mit $j(A_u) = 4$, daß ihr k_u-Wert schneller als der k_1-Wert wächst. Gemäß (25) ist also spätestens nach $(2r-1)(3r-1)+1$ Schritten die Komponente u oberwertig. Da es höchstens $r-1$ Komponenten c mit $j(A_c) = 4$ gibt, sind nach spätestens

$$(r-1)\big((2r-1)(3r-1)+1\big) \leqq (r-1)(6r^2-4r)$$

weiteren Schritten auch alle Komponenten c mit $j(A_c) = 4$ oberwertig. Bei jedem Schritt wächst nach (26) der k_1-Wert um 2, also ist

$$\begin{aligned}(29)\qquad k_1(w_{i_4}) &\leqq (3r-1)^2 + 2(r-1)(6r^2-4r) = \\ &= 18r^3 - 11r^2 + 2r + 1 \leqq 9r^2(2r-1)\,.\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Ungleichung aus (24).

Für alle Komponenten c mit $j(A_c) > 4$ gilt wegen (26), daß die Differenz zwischen $k_1(w_i) - k_c(w_i)$ und andererseits $k_1(w_{i+1}) - k_c(w_{i+1})$ bei der Durchführung eines Schrittes gemäß Fall 3 höchstens 1 beträgt. Für diese Komponenten ist also

$$\begin{aligned}(30)\qquad k_1(w_{i_4}) - k_c(w_{i_4}) &\leqq k_1(w_{i_3}) - k_c(w_{i_3}) + (r-1)(6r^2-4r) \leqq \\ &\leqq (2r-1)(3r-1) + (r-1)2r(3r-1) = (2r^2-1)(3r-1)\,.\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt dabei aus (25).

Fall 4: $u \neq r+1$ und $j(A_u) = 5$.

In diesem Falle seien

$$\bar{x} := x^{-a_u/c_u} \qquad \text{und} \qquad w_{i+1} := [w_i, \bar{x}]\,.$$

Für alle v mit $j(A_v) \leqq 4$ ist $c_v = 0$. Da die Determinante der Komponentenmatrix zu v ungleich null ist, ist $a_v \neq 0$. Mit $i = a_v$ ist nach (5) dann für diese Komponenten

$$(31)\qquad k_v(w_{i+1}) = k_v(w_i) + 1\,.$$

Dasselbe gilt für die Komponenten v mit $j(A_v) = 5$ aber $a_v/c_v \neq a_u/c_u$. Für die mit $A_v \sim A_u$ gilt andererseits

$$k_v(w_{i+1}) \geqq k_v(w_i) + 2 . \tag{32}$$

Wieder bleibt also jede Komponente v mit $e+1 \leqq v < u$, die bezüglich w_i oberwertig war, auch bezüglich w_{i+1} oberwertig.

Ist u nicht oberwertig bezüglich w_{i+1}, so sei $f(i+1) := f(i) = u$. Ist zwar u oberwertig bezüglich w_{i+1} aber noch nicht $k_u(w_{i+1}) \geqq$ $\geqq k_1(w_{i+1}) + r$, so sei ebenfalls $f(i+1) := f(i) = u$. Dann ist

$$k_1(w_{i+1}) - k_1(w_i) = 1 < 2 \leqq k_u(w_{i+1}) - k_u(w_i) , \tag{33}$$

also wieder Bedingung (iv) erfüllt.

Gilt hingegen

$$k_u(w_{i+1}) \geqq k_1(w_{i+1}) + r , \tag{34}$$

sei $f(i+1)$ wie in den übrigen Fällen definiert durch

$$f(i+1) := \min\left(\{v\colon\ v \geqq e+1,\ v \text{ ist nicht oberwertig bezüglich } w_{i+1}\} \cup \{r+1\}\right) .$$

Wegen (31) und (32) ist dann $f(i+1) > f(i)$.

Für den Sprungindex i_5 gilt:

Falls keine c mit $j(A_c) = 5$ existieren, so sei $i_5 := i_4$.

Nach (33) wächst für die feste Komponente u mit $j(A_u) = 5$ der k_u-Wert schneller als der k_1-Wert. Gemäß (30) ist nach spätestens $(2r^2 - 1)(3r - 1) + r \leqq 2r^2(3r - 1)$ Schritten die Gleichung (34) erfüllt. Da es höchstens $r - 1$ solcher Komponenten gibt, ist nach spätestens $(r-1)2r^2(3r-1)$ Schritten die Gleichung (34) für alle u mit $j(A_u) = 5$ erfüllt. Bei jedem Schritt wächst nach (31) der k_1-Wert um 1, also ist

$$k_1(w_{i_5}) \leqq 9r^2(2r-1) + 2r^2(r-1)(3r-1) = 6r^4 + 10r^3 - 7r^2 . \tag{35}$$

Bei der Ungleichung geht (29) ein.

Fall 5: $u \neq r + 1$ und $j(A_u) = 6$.

Die Voraussetzung besagt, daß $\pi_u(U)^{\eta_u^{-1}}$ in einer maximalen Untergruppe M von X enthalten ist.

Fall 5*a*: $g := \pi_u(y)^{\eta_u^{-1}} \notin X'$.

Sei $\pi_u(x)^{\eta_u^{-1}} = g^\lambda h$ mit $\lambda \in GF(p)$ und $h \in X'$. Falls $\lambda = 0$ ist, sei $\bar{x} := x$, sonst sei $\bar{x} := x^{1/\lambda} y^{-1}$. In jedem Falle ist dann $\pi_u(\bar{x})^{\eta_u^{-1}} \in X'$. Es sei $w_{i+1} := [w_i, \bar{x}]$.

Dann ist

$$k_1(w_{i+1}) = k_1(w_i) + 1 \, . \tag{36}$$

Da für alle Komponenten c gilt $k_c(w_{i+1}) \geqq k_c(w_i) + 1$, bleiben sowohl bezüglich w_i oberwertige Komponenten oberwertig bezüglich w_{i+1} als auch Gleichung (34) für Komponenten c mit $j(A_c) = 5$ gültig. Da X' abelsch ist, ist für unsere feste Komponente u jedoch $k_u(w_{i+1}) = n + 1$, also u oberwertig. Es sei wieder

$$f(i+1) := \max\left(\{v\colon\ v \geqq e + 1,\right.$$
$$\left. v \text{ ist nicht oberwertig bezüglich } w_{i+1}\} \cup \{r + 1\}\right).$$

Offenbar ist dann $f(i+1) > f(i)$.

Fall 5*b*: $g := \pi_u(y)^{\eta_u^{-1}} \in X'$.

Dann sei $w_{i+1} := [w_i, y]$. Damit wird

$$k_c(w_{i+1}) = k_c(w_i) + 2 \tag{37}$$

für alle Komponenten c mit $j(A_c) \leqq 4$. Für die Komponenten c mit $j(A_c) = 5$ gilt

$$k_c(w_{i+1}) = k_c(w_i) + 1 \, , \tag{38}$$

und für die Komponente u ist $k_u(w_{i+1}) = n + 1$.

Wegen (37) bleiben die Komponenten c mit $j(A_c) \leqq 4$ oberwertig. Sei c eine Komponente mit $j(A_c) = 5$. Dann wächst wegen (37) und (38) bei jeder Anwendung des Verfahrens nach 5*b* der k_1-Wert um genau 1 schneller als der k_c-Wert. Um alle Komponenten c mit $j(A_c) = 6$ und $\pi_c(y)^{\eta_u^{-1}} \in X'$ oberwertig zu machen, werden höchstens $r - 1$ Schritte benötigt. Sind also alle diese Komponenten oberwertig, so ist nach (34) für jedes c mit $j(A_c) = 5$ immer noch

$$k_c(w_i) \geqq k_1(w_i) + r - (r - 1) = k_1(w_i) + 1 ,$$

also auch c noch oberwertig.

Bei jedem Schritt wächst nach (36) oder (37) der k_1-Wert höchstens um 2, also ist

(39) $$k_1(w_{i_6}) \leqq 6r^4 + 10r^3 - 7r^2 + 2r - 2 \leqq 6r^4 + 10r^3 - 6r^2 \leqq n .$$

Fall 6: $u = r + 1, \ k_1(w_i) < n.$

Die Voraussetzung $f(i) = u = r + 1$ besagt, daß alle Komponenten v mit $j(A_v) \neq 1$ oberwertig bezüglich w_i sind. In diesem Falle seien $f(i + 1) := f(i) = r + 1$ und $w_{i+1} := [w_i, x]$. Dadurch bleiben alle Komponenten auch bezüglich w_{i+1} oberwertig, und es gelten die Bedingungen (i)-(iv).

Fall 7: $u = r + 1, \ k_1(w_i) \geqq n.$

Gemäß (39) ist $k_1(w_i) \leqq n$, insgesamt also $k_1(w_i) = n$. Für beliebige Komponenten u, v mit $1 \leqq u$, $v \leqq e$ und $g \in U$ gilt ganz allgemein $\pi_u(g)^{\eta_u^{-1}} = \pi_v(g)^{\eta_v^{-1}}$. Da alle übrigen Komponenten bezüglich w_i oberwertig, die Projektionen von w_i dort also gleich 1 sind, bedeutet dies, daß w_i die Form

$$w_i = {}_1t_n^c \cdot \ldots \cdot {}_et_n^c$$

hat. Wegen $k_1(w_i) < n + 1$ ist $c \neq 0$, also $w_s := w_i$ ein erzeugendes Element von $\left\langle \prod_{i=1}^{e} {}_it_n \right\rangle$.

Damit haben wir (14) bewiesen.

Wir behaupten nun etwas allgemeiner:

(40) Seien $U = \langle x, y \rangle$ und A die zu U bezüglich x und y gehörige Matrix. Seien B eine der Komponentenmatrizen mit $\det B \neq 0$ und $\mathfrak{M}(B) := \{i\colon 1 \leqq i \leqq r \text{ mit } B = A_i\}$.

Dann ist $\prod_{j\in\mathfrak{M}(B)} {}_jt_n \in U$.

Beweis. Da det $B \neq 0$ ist, gibt es eine Folge

$$B = B_1, \dots, B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so daß B_{i+1} die Form $B_{i+1} = E_i B_i$ mit

$$E_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\lambda, \mu \in GF(p) \setminus \{0\}$ hat.

Wir konstruieren Folgen

Ist $E_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so seien $x_{i+1} := y_i$ und $y_{i+1} := x_i$.

Ist $E_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, so seien $x_{i+1} := x_i^\lambda$ und $y_{i+1} := y_i^\mu$.

Ist $E_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so seien $x_{i+1} := x_i y_i$ und $y_{i+1} := y_i$.

Ist $E_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, so seien $x_{i+1} := x_i$ und $y_{i+1} := x_i y_i$.

In jedem Falle ist $\langle x_i, y_i \rangle = \langle x_{i+1}, y_{i+1} \rangle$, insbesondere also $U = \langle x', y' \rangle$.

Sei A' die zu U bezüglich x' und y' gehörige Matrix. Ist dann $i \in \mathfrak{M}(B)$, so ist die Komponentenmatrix

$$A_i' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Ist } i \notin \mathfrak{M}(B), \text{ so ist } A_i' \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei σ ein Element der symmetrischen Gruppe γ_r auf den Symbolen $1, \dots, r$ mit der Eigenschaft, daß aus $i \leqq j$ folgt $A'_{j\sigma} \leqq A'_{i\sigma}$. Sei $\eta(\sigma)$ definiert durch

$$\left(\prod_{i=1}^r g_i \right)^{\eta(\sigma)} := \prod_{i=1}^r g_i^{\eta_i^{-1}\eta_{\sigma(i)}}$$

für alle $g_i \in G_i$. Dann ist $\eta(\sigma) \in \operatorname{Aut} G$. Sei $\bar{A}$ die zu $U^{\eta(\sigma)}$ bezüglich $x'^{\eta(\sigma)}$ unf $y'^{\eta(\sigma)}$ gehörige Matrix, $\bar{A}_i$ seien die zugehörigen Komponentenmatrizen. Aus $i \leqq j$ folgt gemäß Konstruktion $\bar{A}_i \leqq \bar{A}_r$. Die Komponenten k mit $j(\bar{A}_k) = 1$ sind genau die, für die ein $i \in \mathfrak{M}(B)$ existiert mit $i^\sigma = k$. Da $\mathfrak{M}(B) \neq \emptyset$ ist, ist insbesondere $j(\bar{A}_1) = 1$, und daher sind die Voraussetzungen von (14) für $U^{\eta(\sigma)}$ erfüllt. Daher enthält $U^{\eta(\sigma)}$ das Element $\prod_{i \in \mathfrak{M}(B)^\sigma} {}_it_n$, also ist

$$\prod_{i \in \mathfrak{M}(B)} {}_it_n \in U ,$$

was die Aussage von (40) ist.

Seien jetzt $B_1, \ldots, B_m$ die Matrizen, die als Komponentenmatrizen von U zu x und y vorkommen. Dann haben x und y die Form

$$x = \prod_{i=1}^{m} \Bigl(\prod_{j \in \mathfrak{M}(B_i)} {}_jt^{a_j} {}_jt_1^{b_j} \Bigr)$$

sowie

$$y = \prod_{i=1}^{m} \Bigl(\prod_{j \in \mathfrak{M}(B_i)} {}_jt^{c_j} {}_jt_1^{d_j} \Bigr) .$$

Nach (1), wo wir die Amorphie berechnet haben, ist daher

$$a(x, y) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \in \mathfrak{M}(B_i)} a({}_jt^{a_j} {}_jt_1^{b_j}, {}_jt^{c_j} {}_jt_1^{d_j}) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \in \mathfrak{M}(B_i)} {}_jt_n^{f(a_j+c_j,\, b_j+d_j) - f(a_j,\, b_j) - f(c_j,\, d_j)} .$$

Für alle j, k, die im gleichen $\mathfrak{M}(B_i)$ liegen, sind aber

$$a_j = a_k =: \bar{a}_i , \quad b_j = b_k =: \bar{b}_i , \quad c_j = c_k =: \bar{c}_i , \quad d_j = d_k =: \bar{d}_i ,$$

also ist

$$a(x, y) = \prod_{i=1}^{m} \Bigl(\prod_{j \in \mathfrak{M}(B_i)} {}_jt_n \Bigr)^{f(i)}$$

mit $f(i) := f(\bar{a}_i + \bar{c}_i, \bar{b}_i + \bar{d}_i) - f(\bar{a}_i, \bar{b}_i) - f(\bar{c}_i, \bar{d}_i)$ wegen (40) ein Element von U.

Wegen 1.18 folgt daraus $U^\alpha \leqq G$. Genau das war zu zeigen.

3. Analoga in anderen Gruppenklassen.

In diesem Abschnitt soll die Frage, wann Projektivitäten mehrfacher direkter Produkte durch Isomorphismen induziert sind, vor allem in p-Gruppen der Klasse 2 untersucht werden. Das Hauptziel ist der Beweis von Satz 6.

Zwar lassen sich unsere Ergebnisse mit Hilfe von [13], Theorem 4, S.5, sofort auf nilpotente Gruppen erweitern, jedoch sind Sätze der Form, daß gegebene Projektivitäten eines mehrfachen direkten Produktes durch Isomorphismen induziert sind, in anderen als nilpotenten Gruppenklassen kaum zu erwarten. Eine der naheliegendsten Vermutungen wäre die folgende Verallgemeinerung unserer Ergebnisse:

(*) Sei X eine Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ von quadratfreiem Exponenten. Haben die Sylowgruppen eine geeignete Struktur, oder hat G eine geeignete Struktur, etwa $G'' = 1$, so existiert ein r, so daß jede Projektivität φ von $G_1 \times \ldots \times G_r$ mit $G_1 \simeq \ldots \simeq G_r$ und $(G_1 \times \ldots \times G_r)^\varphi = G_r^\varphi \times \ldots \times G_1^\varphi$ durch einen Isomorphismus induziert ist.

Selbst diese Vermutung ist falsch für nicht-nilpotente Gruppen, so dicht sie auch an unseren Ergebnissen liegen mag. In der Tat wird auch bei den in der Einleitung zu der vorliegenden Arbeit zitierten Sätzen von Suzuki, Zacher und Schmidt lediglich bewiesen, daß die Urbild- und die Bildgruppe isomorph sind, nicht aber, daß die gegebene Projektivität durch einen Isomorphismus induziert ist. Daß nun (*) falsch ist, zeigt

3.1 Beispiel. Sei $A = \langle a, b\rangle$ eine nichtabelsche Gruppe vom Exponenten p, so daß $\sigma \in \operatorname{Aut} A$ und $i \in GF(p) \setminus \{0, 1\}$ existieren mit $a^\sigma = a^i$, $b^\sigma \in \langle b\rangle\, \Phi(A)$. Solche Gruppen A und ein solches σ gibt es. Sei etwa $A \simeq G(p)$. Dann läßt sich mit 1.32 ein entsprechendes σ konstruieren.

Sei E eine elementarabelsche q-Gruppe, die einen fixpunktfreien Automorphismus τ der Ordnung p zuläßt.

Sei X die zerfallende Erweiterung $X = AE$ mit $C_A(E) = \langle b\rangle\, \Phi(A)$ und $e^a = e^\tau$ für alle $e \in E$. Sei $ge \in X$ mit $g \in A$, $e \in E$. Dann sei

$$(ge)^\beta := g^{\sigma\varrho_i^{-1}} e\,.$$

Dabei sei ϱ_i eine universelle Potenzabbildung, wie in 1.7.a) definiert. Dann ist $\langle b\rangle \Phi(A)$ invariant unter β, das auf $A/\langle b\rangle \Phi(A)$ die Identität induziert. Das heißt, zu allen $g \in A$ gibt es ein $f(g) \in \langle b\rangle \Phi(A)$ mit $g^\beta = f(g)g$. Dann ist $(ge)^\beta = f(g)ge$ und folglich

$$(\Delta) \qquad [\beta, X] \leqq \langle b\rangle \Phi(A) = C_A(E)\,.$$

Seien $\eta_1, \ldots, \eta_r$ Isomorphismen von X auf Gruppen $G_1, \ldots, G_r$ und $G = G_1 \times \ldots \times G_r$. Für alle $g \in G$ mit $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ und $g_j \in G_j$ für alle j sei

$$g^\alpha = (g_1 \cdot \ldots \cdot g_r)^\alpha := g_1^{\eta_1^{-1}\beta\eta_1} \cdot \ldots \cdot g_r^{\eta_r^{-1}\beta\eta_r}\,.$$

Wir behaupten, daß α eine Projektivität φ von G induziert, die durch keinen Isomorphismus induziert ist.

Beweis. Seien

$$N := E^{\eta_1} \times \ldots \times E^{\eta_r}\,, \qquad H := A^{\eta_1} \times \ldots \times A^{\eta_r}$$

und

$$\bar\sigma := \eta_1^{-1}\sigma\eta_1 \times \ldots \times \eta_r^{-1}\sigma\eta_r\,.$$

Dann ist $\bar\sigma \in \operatorname{Aut} H$. Sei

$$h = h_1^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{\eta_r} \in H \qquad \text{mit } h_j \in A\,.$$

Dann ist

$$h^\alpha = h_1^{\beta\eta_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{\beta\eta_r} = h_1^{\sigma(\varrho_i)^{-1}\eta_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{\sigma(\varrho_i)^{-1}\eta_r} = (h_1^{\sigma\eta_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{\sigma\eta_r})^{(\varrho_i)^{-1}} = h^{\bar\sigma(\varrho_i)^{-1}}\,.$$

Die dritte Gleichheit gilt, da universelle Potenzabbildungen mit Homomorphismen vertauschbar sind. Insgesamt ist also $\alpha|_H$ die Nacheinanderausführung eines Automorphismus und einer universellen Potenzabbildung, induziert also eine Autoprojektivität ψ von H. Ferner ist $\alpha|_N$ dort die Identität. Wegen (Δ) gilt ferner

$$[\alpha, G] \leqq C_H(N)\,.$$

Seien nun $P \leqq N$ und $Q \leqq N$. Sei $n \in C_N(Q)$. Dann ist

$$[n, Q^\alpha] \leqq [n, QC_H(N)] = [n, Q] = 1\,.$$

Also ist $C_N(Q) \leqq C_N(Q^\alpha)$ und dann natürlich $C_N(Q) = C_N(Q^\alpha)$, also

$$C_N(Q)^\alpha = C_N(Q) = C_N(Q^\alpha) = C_N(Q^\psi) .$$

Sei $P^Q = P$. Dann ist

$$(P^\alpha)^{Q^\psi} = P^{Q^\alpha} = P^Q = P = P^\alpha .$$

Die zweite Gleichheit gilt, da $Q^\alpha \leqq C_H(N)Q$ ist. Umgekehrt folgt aus $(P^\alpha)^{Q^\psi} = P^\alpha$ natürlich $P^Q = P$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.1 aus [10] erfüllt, und die Abbildung φ: $\mathfrak{V}(G) \to \mathfrak{V}(G)$ mit

$$(PQ^x)^\varphi := P^\alpha (Q^\psi)^{x^\alpha} = P(Q^\alpha)^x$$

ist eine Projektivität. Dabei seien $x \in N$, $P \leqq N$ und $Q \leqq H$ mit $P^Q = P$.

Sei $n \in N$, $h \in H$. Dann ist $[n, h]^\alpha = [n, h] = [n^\alpha, h^\alpha]$. Also ist

$$(PQ^x)^\alpha = P(Q^x)^\alpha = P(Q^\alpha)^x = (PQ^x)^\varphi ,$$

und φ ist daher durch α induziert.

Sei nun λ ein φ induzierender Isomorphismus. Seien

$$M := (E\langle a\rangle)^{\eta_1} \times \ldots \times (E\langle a\rangle)^{\eta_r} \quad \text{und} \quad \bar{a} := a^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot a^{\eta_r} .$$

Da α auf M die Identität bewirkt, ist $\alpha\lambda^{-1}|_M$ ein Potenzautomorphismus von M. Da τ fixpunktfrei ist, ist $Z(M) = 1$. Nach [3] ist also $\alpha|_M = \lambda|_M$ und insbesondere $\bar{a}^\lambda = \bar{a}^\alpha$.

Nach Definition ist $\bar{\sigma}$ ein ψ also auch φ auf H induzierender Isomorphismus. Nach 1.34.d) ist $\lambda|_H = \bar{\sigma}|_H$, da H nichtabelsch ist. Insbesondere ist $\bar{a}^\lambda = \bar{a}^{\bar{\sigma}} = \bar{a}^{\alpha\varrho_i}$, wegen $i \neq 1$ ein Widerspruch.

Die hier angegebenen Gruppen G scheinen uns die ersten bekannten zu sein mit der Eigenschaft, daß für alle $r \in \mathrm{N}$ eine Projektivität φ ihres r-fachen direkten Produktes $G_1 \times \ldots \times G_r$ existiert, für die

$$(G_1 \times \ldots \times G_r)^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$$

gilt, die aber nicht durch einen Isomorphismus induziert ist. Mit Hilfe des angegebenen Lemmas aus [10] und auch mit den in [11] entwickelten Methoden lassen sich jedoch weitere solcher Beispiele konstruieren.

3.1. *Baersche Abbildungen* 2.

In diesem Teilabschnitt sollen Baersche Abbildungen endlicher p-Gruppen mit beliebigem Exponenten untersucht werden. Wir werden dabei voraussetzen, daß ein mindstens dreifaches Produkt isomorpher Gruppen vorliegt. Die Überlegungen dieses Teilabschnittes ähneln denen des Teilabschnittes 1.1 zwar, können aber nicht simultan gemacht werden, da die Hauptschwierigkeiten anders liegen. Lag das Problem dort besonders darin, daß wir nur ein zweifaches Produkt vor uns hatten, was hier von vorneherein ausgeschlossen ist, so ergab sich andererseits öfter die Gelegenheit, Baers Sätze anzuwenden, da alle Elemente außer der 1 maximale Ordnung hatten.

Wie in 1.1 vereinbaren wir eine Generalvoraussetzung:

(GV) Sei $G = X \times Y$ eine endliche p-Gruppe mit $X = G_1 \times \ldots \times G_{r-1}$, $Y = G_r$ und $r \geqq 3$. Für alle i, j mit $1 \leqq i, j \leqq r$ sei $G_i \simeq G_j$. Sei φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$, und sei schließlich α eine Baersche Abbildung zu φ, X, Y und den Elementen $x \in X$ und $y \in Y$. Dabei sei x in einem der G_i enthalten.

3.2 Lemma. Es gelte (GV). Seien $g \in G_k$ und $h \in G_m$ mit $m \neq k$. Es seien $o(g) \leqq o(h)$ und $\bar{h}$ ein Erzeugendes von $\langle h \rangle^\varphi$. Für alle $i \in \mathbf{Z}$ mit $o(h^i) \geqq o(g)$ ist dann

$$f(\cdot\,; h, \bar{h})|_{\langle g \rangle} = f(\cdot\,; h^i, \bar{h}^i)|_{\langle g \rangle}\,.$$

Die Abbildung $f(\cdot\,; h, \bar{h})|_{\langle g \rangle}$ ist ein Isomorphismus.

Zur Erinnerung des Lesers erwähnen wir, daß die Abbildung f in 1.1.a) definiert worden ist.

Beweis. Seien zunächst $o(h^i) = o(g)$ und $t, w \in G$ so gewählt, daß $o(t) = o(w) = o(h)$ gilt und $\langle t, w, h \rangle = \langle t \rangle \times \langle w \rangle \times \langle h \rangle =: A$ ist. Ferner gelte $[t, g] = 1$. Dies geht, da $r \geqq 3$ ist und $t \in G_n$ mit $k \neq n \neq m$ gewählt werden kann. Es gilt jedoch nicht unbedingt $[w, g] = 1$.

Nach 0.5 gibt es einen φ auf A induzierenden Isomorphismus λ mit $h^\lambda = \bar{h}$. Ebenfalls nach 0.5 ist $(t^i)^\lambda = f(t^i; h, \bar{h})$. Nach 0.6, angewandt auf $K := \langle g, t^i \rangle$ und h, $\bar{h}$ statt x, $\bar{x}$ beziehungsweise h^i, $\bar{h}^i$ statt x, $\bar{x}$, sind $f(\cdot; h, \bar{h})$ und $f(\cdot; h^i, \bar{h}^i)$ auf K Isomorphismen, die φ

dort induzieren. Dabei sind die jeweiligen Bildgruppen wieder abelsch, da nach 1.3.*d*) die Projektivität φ zentralisatorerhaltend ist. Nach 0.4 ist nun

$$t^{i\lambda} = f(t^i;\, h^i, h^{i\lambda}) = f(t^i;\, h^i, \bar{h}^i)\,,$$

also

$$f(t^i;\, h^i, \bar{h}^i) = t^{i\lambda} = f(t^i;\, h, \bar{h})\,.$$

Da sie Isomorphismen sind, die dieselbe Projektivität induzieren und ein Element maximaler Ordnung gleich abbilden, stimmen $f(\cdot\,;\, h, \bar{h})$ und $f(\cdot\,;\, h^i, \bar{h}^i)$ auf K überein, insbesondere auf $\langle g\rangle$.

Sei nun $o(h^i) > o(g)$. Sei dann j so gewählt, daß $o(h^{ij}) = o(g)$ ist. Dann sind die Voraussetzungen des Lemmas auch für h^{ij} statt h^i und für h^i statt h erfüllt, und nach bereits Bewiesenem gilt

$$f(\cdot\,;\, h, \bar{h})|_{\langle g\rangle} = f(\cdot\,;\, h^{ij}, \bar{h}^{ij})|_{\langle g\rangle} = f(\cdot\,;\, h^i, \bar{h}^i)|_{\langle g\rangle}\,.$$

3.3 Lemma Es gelte (GV).

a.) Seien $g, h \in G$ mit $[g, h] = 1$. Dann ist $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha$.

b.) Für alle $i \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ ist $(g^i)^\alpha = (g^\alpha)^i$.

Beweis: *a.*) Fall 1: Es seien $g, h \in G_i$ für ein i. Ist $i < r$, so sei k aus einem von G_i und G_r verschiedenen Faktor gewählt mit $o(k) = \max\{o(g), o(h)\}$. Nach 0.6 ist dann $\alpha|_{\langle g,h,k\rangle} = f(\cdot\,;\, y, y^\alpha)|_{\langle g,h,k\rangle}$ ein φ auf $\langle g, h, k\rangle$ induzierender Isomorphismus, also $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha$.

Ist $i = r$, so führen wir den gleichen Schluß mit $f(\cdot\,;\, x, x^\alpha)$ statt $f(\cdot\,;\, y, y^\alpha)$ durch.

Fall 2: Seien $g \in G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_m}$ und $h \in G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$ mit

$$\{i_1, \ldots, i_m\} \cap \{j_1, \ldots, j_n\} = \emptyset \qquad \text{und} \qquad r \notin \{i_1, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, \ldots, j_n\}\,.$$

Dann sind für $\langle g, h, y\rangle$ die Voraussetzungen von 0.7 erfüllt, da $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = 1$ ist. Es folgt

$$(gh)^\alpha = f(gh;\, y, y^\alpha) = f(g;\, y, y^\alpha)\, f(h;\, y, y^\alpha) = g^\alpha h^\alpha\,.$$

Seien nun $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ und $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_r$ beliebig aus G mit $g_i, h_i \in G_i$ für alle i. Dann ist

$$(gh)^\alpha = \left(\prod_{i=1}^{r} g_i \cdot \prod_{i=1}^{r} h_i\right)^\alpha = \left(\prod_{i=1}^{r} (g_i h_i)\right)^\alpha =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{r-1} (g_i h_i)\right)^\alpha (g_r h_r)^\alpha = \prod_{i=1}^{r-1} (g_i h_i)^\alpha (g_r h_r)^\alpha = \prod_{i=1}^{r} (g_i^\alpha h_i^\alpha) =$$

$$= \prod_{i=1}^{r} g_i^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{r} h_i^\alpha = \left(\prod_{i=1}^{r-1} g_i\right)^\alpha g_r^\alpha \left(\prod_{i=1}^{r-1} h_i\right)^\alpha h_r^\alpha = g^\alpha h^\alpha .$$

Dabei folgen die dritte und die vorletzte Gleichheit aus der Definition von α, die vierte und die vorletzte mittels einfacher Induktion aus Fall 2 und schließlich die fünfte aus Fall 1.

b.) Folgt durch Induktion aus Teil *a.*).

3.4 Lemma. Es gelte (GV). Sei A eine abelsche Gruppe mit $A = A_1 \times \ldots \times A_r$, wobei $A_i = A \cap G_i$ sei. Für mindestens drei der Untergruppen A_i gelte $\exp A_i = \exp A$. Sei $a \in A$ mit $o(a) = \exp A$. Dann ist $g^\alpha = f(g; a, a^\alpha)$ für alle $g \in A$ mit $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = 1$.

Beweis. Seien $v = x^n$ und $w = y^n$ gewählt mit $n \in \mathbb{Z}$ und $o(v) = o(w) = \exp A$. Nach 3.3.*b*) sind $(x^n)^\alpha = (x^\alpha)^n$ und $(y^n)^\alpha = (y^\alpha)^n$. Nach 3.2 ist daher

$$\alpha|_{A_r} = f(\cdot\,; x, x^\alpha)|_{A_r} = f(\cdot\,; x^n, (x^\alpha)^n)|_{A_r} = f(\cdot\,; x^n, (x^n)^\alpha)|_{A_r} = f(\cdot\,; v, v^\alpha)|_{A_r}$$

und genauso $\alpha|_{A \cap X} = f(\cdot\,; w, w^\alpha)|_{A \cap X}$. Beide Aussagen werden mit (*) zitiert werden.

Sei $x \in G_s$. Dann sei $u \in A$ mit $o(u) = \exp A$ gewählt, so daß u in einer der Untergruppen A_i mit $i \notin \{s, r\}$ liegt. Das ist möglich, da A drei Untergruppen A_i von maximalem Exponenten enthält. Sei $B := A_1 \times \ldots \times A_{s-1} \times A_{s+1} \times \ldots \times A_r$. Dann seien

$$B_1 := \langle u, v, w \rangle \ , \ B_2 := (X \cap A) \times \langle w \rangle \ , \ B_3 := B \times \langle v \rangle \ , \ B_4 := A \ .$$

Dann sind die B_i abelsche Gruppen, deren jede drei unabhängige Elemente maximaler Ordnung aus verschiedenen Komponenten G_i enthält, und es ist $u \in B_i$ für alle i.

Nach 0.5 gibt es für jedes i genau einen φ auf B_i induzierenden Isomorphismus λ_i mit $u^\alpha = u^{\lambda_i}$, so daß für alle $m \in B_i$ mit $\langle m \rangle \cap \cap \langle u \rangle = 1$ gilt $m^{\lambda_i} = f(m; u, u^\alpha)$. Insbesondere ist

$$(**) \qquad m^{\lambda_i} = m^{\lambda_j} \text{ für alle } m \in B_i \cap B_j \text{ mit } \langle m \rangle \cap \langle u \rangle = 1 .$$

Wir betrachten B_1: Nach (*) ist $u^\alpha = f(u; w, w^\alpha)$, also ist $\langle u^\alpha w^\alpha \rangle = = \langle uw \rangle^\varphi$. Wegen $w \in B_1$ ist $w^{\lambda_1} = f(w; u, u^\alpha)$, also $\langle u^\alpha w^{\lambda_1} \rangle = \langle uw \rangle^\varphi$. Ferner ist $\langle w^\alpha \rangle = \langle w \rangle^\varphi = \langle w^{\lambda_1} \rangle$. Nach 0.2 ist also $w^\alpha = w^{\lambda_1}$. Nach 0.4 ist auch

$$v^{\lambda_1} = f(v; w, w^{\lambda_1}) = f(v; w, w^\alpha) = v^\alpha .$$

Die erste Gleichheit folgt aus 0.4, die letzte aus (*).

Wir betrachten B_2: Sei $g \in A \cap X$. Dann ist

$$g^{\lambda_2} = f(g; w, w^{\lambda_2}) = f(g; w, w^{\lambda_1}) = f(g; w, w^\alpha) = g^\alpha .$$

Die erste Gleichheit folgt aus 0.4, die zweite aus (**) und die letzte aus (*).

Wir betrachten B_3: Sei $h \in A_r$. Dann ist

$$h^{\lambda_3} = f(h; v, v^{\lambda_3}) = f(h; v, v^{\lambda_1}) = f(h; v, v^\alpha) = h^\alpha ,$$

wobei die erste Gleichheit aus 0.4, die zweite aus (**) und die letzte aus (*) folgen.

Wir betrachten B_4: Sei $gh \in B_4 = A$ mit $g \in A \cap X$ und $h \in A_r$. Dann ist

$$(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha = g^{\lambda_2} h^{\lambda_3} = g^{\lambda_4} h^{\lambda_4} = (gh)^{\lambda_4} .$$

Also ist $\alpha|_A = \lambda_4$ ein φ auf A induzierender Isomorphismus. Seien nun $a \in A$ beliebig mit $o(a) = \exp A$ und $g \in A$ mit $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Dann ist

$$g^\alpha = g^{\lambda_4} = f(g; a, a^{\lambda_4}) = f(g; a, a^\alpha) .$$

Die mittlere Gleichheit ist wieder 0.4, und der Hilfssatz ist bewiesen.

3.5 Lemma. Es gelte (GV). Seien $g \in X$, $h \in Y$.

a.) Ist $o(g) \leqq o(h)$, so ist $g^\alpha = f(g; h, h^\alpha)$.

b.) Ist $o(g) \geqq o(h)$, so ist $h^\alpha = f(h; g, g^\alpha)$.

c.) Sei $1 \neq U \leqq G$ mit $U = U_1 \times \ldots \times U_r$, $U_i = U \cap G_i$, $U_i \simeq U_j$ für alle $1 \leqq i, j \leqq r$. Dann ist $\alpha|_U$ eine Baersche Abbildung zu der von φ auf U induzierten Projektivität, zu $U \cap X$, U_r und geeigneten Elementen $u, v \in U$.

Beweis. *a.*) Sei $h^n \in \langle h \rangle$ mit $o(h^n) = o(g)$. Sei zunächst $g \in G_i$ für ein $i \leqq r-1$. Wir wählen dann $k \in G_m$ mit $i \neq m \leqq r-1$ und $o(k) = o(g)$. Nach 3.4 mit $A := \langle g, h^n, k \rangle$ ist dann

$$\alpha|_{\langle g \rangle} = f(\cdot; h^n, (h^n)^\alpha)|_{\langle g \rangle},$$

und es gilt

$$\alpha|_{\langle g \rangle} = f(\cdot; h^n, (h^\alpha)^n)|_{\langle g \rangle} = f(\cdot; h, h^\alpha)|_{\langle g \rangle}.$$

Bei der ersten Gleichheit wird 3.3.*b*) benutzt, bei der zweiten 3.2.

Sei nun $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_{r-1}$ mit $g_i \in G_i$. Induktiv folgt aus 0.7 nun $f\left(\prod_{i=1}^{r-1} g_i; h, h^\alpha\right) = \prod_{i=1}^{r-1} f(g_i; h, h^\alpha)$, also

$$f(g; h, h^\alpha) = \prod_{i=1}^{r-1} f(g_i; h, h^\alpha) = \prod_{i=1}^{r-1} g_i^\alpha = g^\alpha.$$

b.) Seien nun $o(h) \leqq o(g)$ und $g^n \in \langle g \rangle$ mit $o(g^n) = o(h)$. Nach Teil *a.*) ist dann $f(g^n; h, h^\alpha) = (g^n)^\alpha$, also $\langle hg^n \rangle^\varphi = \langle h^\alpha (g^n)^\alpha \rangle$. Da auch $\langle h \rangle^\varphi = \langle h^\alpha \rangle$ gilt, ist somit

$$h^\alpha = f(h; g^n, (g^n)^\alpha) = f(h; g^n, (g^\alpha)^n) = f(h; g, g^\alpha).$$

Die zweite Gleichheit ist wieder 3.3.*b*), die letzte 3.2.

c.) Seien $u \in U_m$, $v \in U_r$ mit $1 \leqq m \leqq r-1$ und $o(u) = o(v) = \exp U$. Nach 3.5.*b*) ist dann

$$\alpha|_{U \cap X} = f(\cdot; v, v^\alpha)|_{U \cap X} \quad \text{und} \quad \alpha|_{U_r} = f(\cdot; u, u^\alpha)|_{U_r}.$$

Das aber heißt, daß $\alpha|_U$ eine Baersche Abbildung von U zu der von φ auf U induzierten Projektivität, zu $U \cap X$, $U_r = U \cap Y$, u und v ist.

Lemma 3.5 besagt, ähnlich wie 1.5, insbesondere, daß die Baersche Abbildung unabhängig von der Auswahl der Elemente x, y in (GV) ist, vorausgesetzt, sie haben maximale Ordnung. Denn sind $\bar{x} \in X$ und $\bar{y} \in Y$ mit $o(\bar{x}) = o(\bar{y}) = \exp G$, so gilt für alle $g \in X$ und $h \in Y$:

$$f(g; y, y^\alpha) = g^\alpha = f(g; \bar{y}, \bar{y}^\alpha) \text{ und } f(h; x, x^\alpha) = h^\alpha = f(h; \bar{x}, \bar{x}^\alpha).$$

Auch der nächste Hilfssatz ist ein Analogon zu einem Hilfssatz aus dem ersten Abschnitt:

3.6 Lemma. Ist (GV) erfüllt, so gilt:

$$\alpha \text{ induziert } \varphi .$$

Beweis. Sei $c \in G$ mit $c = gh$, $g \in X$, $h \in Y$.

Fall 1: $o(h) \geqq o(g)$. Nach 3.5.*a*) ist dann $g^\alpha = f(g; h, h^\alpha)$, also

$$\langle c\rangle^\varphi = \langle gh\rangle^\varphi = \langle g^\alpha h^\alpha\rangle = \langle (gh)^\alpha\rangle = \langle c^\alpha\rangle = \\ = \{(c^\alpha)^i\colon i \in \mathbb{Z}\} = \{(c^i)^\alpha\colon i \in \mathbb{Z}\} = \langle c\rangle^\alpha .$$

Fall 2: $o(g) \geqq o(h)$. Dann erschließen wir mit 3.5.*b*) und $h^\alpha = f(h; g, g^\alpha)$ ganz entsprechend $\langle c\rangle^\varphi = \langle c\rangle^\alpha$.

Sei nun $U \leqq G$. Dann ist, zunächst verbandstheoretisch,

$$U^\varphi = \bigcup_{u \in U} \langle u\rangle^\varphi = \bigcup_{u \in U} \langle u\rangle^\alpha .$$

Daraus folgt $U^\varphi = U^\alpha$ als Menge.

3.7 Lemma. Es gelte (GV).

a.) Für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit $(i, p) = 1$ ist $\varrho_i \circ \alpha$ eine Baersche Abbildung, wobei wieder ϱ_i eine universelle Potenzabbildung sei.

b.) Ist β eine weitere Baersche Abbildung zu φ und Untergruppen $\bar{X}$ und $\bar{Y}$, so daß (GV) erfüllt ist, so existiert ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $(i, p) = 1$ und $\beta = \varrho_i \circ \alpha$.

Beweis. Wegen 3.3 und 3.6 gilt für alle $g \in X$, $h \in Y$:

$$\langle g^{\varrho_i \circ \alpha}\rangle = \langle g^\alpha\rangle = \langle g\rangle^\varphi , \qquad \langle h^{\varrho_i \circ \alpha}\rangle = \langle h^\alpha\rangle = \langle h\rangle^\varphi ,$$
$$\langle g^{\varrho_i \circ \alpha} y^{\varrho_i \circ \alpha}\rangle = \langle (gy)^{\varrho_i \circ \alpha}\rangle = \langle (gy)^\alpha\rangle = \langle gy\rangle^\varphi ,$$
$$\langle x^{\varrho_i \circ \alpha} h^{\varrho_i \circ \alpha}\rangle = \langle (xh)^{\varrho_i \circ \alpha}\rangle = \langle (xh)^\alpha\rangle = \langle xh\rangle^\varphi \quad \text{und} \quad (gh)^{\varrho_i \circ \alpha} = g^{\varrho_i \circ \alpha} h^{\varrho_i \circ \alpha} .$$

Dies sind die Bedingungen dafür, daß $\varrho_i \circ \alpha$ eine Baersche Abbildung ist.

b.) Baersche Abbildungen sind bijektiv. Also existiert $\beta \circ \alpha^{-1}$ und induziert nach 3.6 auf G die triviale Projektivität. Seien $g \in X$ und $h \in Y$. Es seien $\gamma := \beta \circ \alpha^{-1}$, $g^\gamma = g^j$ und $h^\gamma = h^k$. Da $\langle g, h\rangle$ abelsch, γ dort also wegen 3.3.*a*) ein Potenzautomorphismus ist, sind j und k kongruent modulo dem Minimum von $o(v)$ und $o(h)$. Sei $x^\gamma = x^i$, so folgt $h^\gamma = h^i$ für alle $h \in Y$. Entsprechend werden alle Elemente von X auf die gleiche Potenz i abgebildet. Damit ist γ eine universelle Potenzabbildung, also $\gamma = \varrho_i$ und somit $\beta = \varrho_i \circ \alpha$. Da auch x^i ein Erzeugendes von $\langle x\rangle$ ist, muß $(i, p) = 1$ sein, was *b.*) beweist.

3.8 Lemma. Es gelte (GV). Seien $\eta_1, \ldots, \eta_r$ Isomorphismen von G_1 nach $G_1, \ldots, G_r$ und $\eta_1 = \mathrm{id}\, G_1$. Sei $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N := N_1^{\eta_1} \times \ldots \times N_1^{\eta_r}$. Ferner sei $N < G$. Die von φ auf G/N induzierte Projektivität werde mit $\bar{\varphi}$ bezeichnet.

a.) α induziert auf G/N eine Baersche Abbildung zu $\bar{\varphi}$.

b.) Ist $\beta = \varrho_i \circ \alpha$ eine weitere Baersche Abbildung von G zu φ, so ist die von β auf G/N induzierte Baersche Abbildung genau dann gleich der von α induzierten, wenn $i \equiv 1 (\exp G/N)$ gilt.

Beweis. *a.*) Sei $c \in G$ beliebig und zunächst $N_1 \leqq \Omega(Z(G_1))$. Dann ist

$$(cN)^\alpha = \{cn\colon\ n \in N\}^\alpha = \{(cn)^\alpha\colon\ n \in N\} =$$
$$= \{c^\alpha n^\alpha\colon\ n \in N\} = \{c^\alpha n^\alpha\colon\ n^\alpha \in N^\alpha\} = c^\alpha N^\alpha\,.$$

Also werden Nebenklassen nach N auf Nebenklassen nach N^α abgebildet. Nach 1.3.*d*) ist $N^\varphi \trianglelefteq G^\varphi$. Sei die von α induzierte Abbildung von G/N auf G^φ/N^φ mit $\bar{\alpha}$ bezeichnet.

Sei $\bar{x} \in G_1$ so gewählt, daß $o(\bar{x}) = \exp G_1$ und $o(\bar{x}N_1) = \exp G_1/N_1$ gilt. Wegen $\exp N_1 = p$ existiert ein solches $\bar{x}$. Falls nämlich $g \in G_1$ existiert mit $o(g) = \exp G_1$ und $\langle g\rangle \cap N_1 = 1$, so sei dieses gewählt. Falls für alle $g \in G_1$ mit $o(g) = \exp G_1$ gilt $\langle g\rangle \cap N_1 \neq 1$, dann ist $\exp G_1 > \exp G_1/N_1$ und alle derartigen g haben auch in G_1/N_1 maximale Ordnung.

Sei nun $\bar{y} := \bar{x}^{\eta_r}$.

— Nach 3.5.a) ist dann $\alpha|_X = f(\cdot\,; \bar{y}, \bar{y}^\alpha)|_X$.

— Nach 3.5.b) ist $\alpha|_Y = f(\cdot\,; \bar{x}, \bar{x}^\alpha)|_Y$.

Das heißt, daß α auch Baersche Abbildung zu $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ist. Für alle $g \in X$ und $h \in Y$ gilt daher

$$\langle \bar{x}h \rangle^\varphi = \langle \bar{x}^\alpha h^\alpha \rangle\,, \qquad \langle g\bar{y} \rangle^\varphi = \langle g^\alpha \bar{y}^\alpha \rangle\,,$$

$$\langle g^\alpha \rangle = \langle g \rangle^\varphi\,, \quad \langle h^\alpha \rangle = \langle h \rangle^\varphi \quad \text{und} \quad (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha\,.$$

Wegen $N^\alpha = N^\varphi$ und der Tatsache, daß die Einschränkung von α auf jede abelsche Untergruppe ein Isomorphismus ist, gilt

$$\begin{aligned}\langle \bar{x}NhN \rangle^\varphi &= \big(\langle \bar{x}h \rangle N\big)^\varphi = \langle \bar{x}h \rangle^\varphi N^\varphi = \langle \bar{x}^\alpha h^\alpha \rangle N^\alpha = \langle (\bar{x}h)^\alpha \rangle N^\alpha = \\ &= \langle \bar{x}h \rangle^\alpha N^\alpha = \langle (\bar{x}h) N \rangle^\alpha = \langle \bar{x}N \cdot hN \rangle^\alpha = \langle (\bar{x}N)^\alpha (hN)^\alpha \rangle\end{aligned}$$

und somit

$$\langle (\bar{x}N)(hN) \rangle^{\bar{\varphi}} = \langle (\bar{x}N)^{\bar{\alpha}} (hN)^{\bar{\alpha}} \rangle\,.$$

Entsprechend wird

$$\langle (gN)(\bar{y}N) \rangle^{\bar{\varphi}} = \langle (gN)^{\bar{\alpha}} (\bar{y}N)^{\bar{\alpha}} \rangle$$

bewiesen. Weiter gilt

$$\langle (gN)^\alpha \rangle = \langle gN \rangle^\varphi\,,\ \langle (hN)^\alpha \rangle = \langle hN \rangle^\varphi \text{ und } (gNhN)^\alpha = (gN)^\alpha (hN)^\alpha\,.$$

Das aber heißt, daß $\bar{\alpha}$ eine Baersche Abbildung von G/N zu $\bar{\varphi}$, $\bar{x}N$ und $\bar{y}N$ ist.

Sei nun N beliebig. Dann beweisen wir den Hilfssatz durch Induktion. Der Induktionsanfang ist durch den Fall, daß $N \leqq \Omega(Z(G))$ ist, gelegt. Sei $N \nleqq \Omega(Z(G))$. Dann sei $1 \neq Z_1 := N_1 \cap \Omega(Z(G_1))$, und es werde $Z \leqq N$ mit $Z := Z_1^{\eta_1} \times \ldots \times Z_1^{\eta_r}$ gesetzt. Sei $\bar{\bar{\varphi}}$ die von φ auf G/Z induzierte Projektivität und $\bar{\bar{\alpha}}$ die von α auf G/Z induzierte Baersche Abbildung zu $\bar{\bar{\varphi}}$. Gemäß Induktionsvoraussetzung induziert dann $\bar{\bar{\alpha}}$ eine Baersche Abbildung $\bar{\alpha}$ zu der von φ auf $(G/Z)/(N/Z)$ induzierten Projektivität. Diese stimmt aber mit der von φ auf G/N induzierten Projektivität überein, und $\bar{\alpha}$ definiert eine Baersche Abbildung von G/N zu dieser Projektivität. Da die Induktion von Abbildungen transitiv ist, induziert α diese Baersche Abbildung von G/N.

b.) Es ist $N^\alpha = N^\varphi = N^\beta$. Seien $g \in G \setminus N$ und i die nach 3.7.*b*) existierende ganze Zahl mit $\beta = \varrho_i \circ \alpha$. Ist $g^\alpha N^\alpha = g^\beta N^\beta$, so enthält $N^\beta = N^\alpha$ das Element $g^{-\alpha} g^\beta = (g^{-1})^\alpha (g^i)^\alpha = (g^{i-1})^\alpha$. Es folgt $g^{i-1} \in N$. Die letzte Aussage ist aber genau dann für alle $g \in G \setminus N$ wahr, wenn $i \equiv 1(\exp G/N)$ gilt.

3.9 Lemma. Sei $1 \neq G = G_1 \times \ldots \times G_r$ mit $r \geqq 3$. Die G_i seien paarweise isomorphe p-Gruppen. Sei φ eine Projektivität von G mit $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$. Dann hat G genau $((p-1)/p) \exp G$ Baersche Abbildungen zu φ.

Beweis. Seien $x \in G_1 \times \ldots \times G_{r-1} =: X$ und $y \in G_r =: Y$ mit $o(x) = o(y) = \exp G$. Sei $\bar{x} \in G^\varphi$ mit $\langle x \rangle^\varphi = \langle \bar{x} \rangle$. Für alle $g \in X$, $h \in Y$ sei dann

$$h^\alpha := f(h;\, x, \bar{x})\,, \qquad g^\alpha := f(g;\, y, y^\alpha)\,, \qquad (gh)^\alpha := g^\alpha h^\alpha\,.$$

Es ist $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle^\varphi = \langle x^\alpha \rangle$, und es gilt

$$\langle \bar{x} y^\alpha \rangle = \langle xy \rangle^\varphi \text{ nach Definition von } f(\cdot\,;\, x, \bar{x})|_Y = \alpha|_Y\,.$$

$$\langle x^\alpha y^\alpha \rangle = \langle xy \rangle^\alpha \text{ nach Definition von } f(\cdot\,;\, y, y^\alpha)|_X = \alpha|_X\,.$$

Nach 0.3 ist daher $\bar{x} = x^\alpha$. Für alle $h \in Y$ ist also $h^\alpha = f(h;\, x, x^\alpha)$ und daher α eine Baersche Abbildung. Die Anzahlbehauptung folgt aus 3.7.

Zur Erinnerung wiederholen wir, diesmal für beliebige Endomorphismen, die folgende

3.10 Bemerkung. Es gelte (GV). Seien τ ein Endomorphismus einer der Untergruppen G_i, $x, y \in G_i$ und a die Amorphie bezüglich α. Dann ist $a(x, y)^\tau = a(x^\tau, y^\tau)$.

Beweis. Die Bemerkung folgt aus 1.13.*b* und 1.19.*a*).

3.2. *Gruppen der Klasse* 2.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Bestimmung der Potenzautomorphismen von p-Gruppen der Klasse 2. Sei in ganz 3.2 immer $p \geqq 3$ vorausgesetzt.

3.11 Lemma. Sei G eine p-Gruppe der Klasse c mit $c \leqq 2$.

a.) Ist G abelsch, so ist $\varrho_n \in \operatorname{Aut} G$, genau dann wenn p nicht n teilt.

b.) Ist G nichtabelsch, so ist $\varrho_n \in \operatorname{Aut} G$, genau dann wenn $n \equiv 1(\exp G')$ gilt.

In jedem Falle sind diese ϱ_n die einzigen Potenzautomorphismen.

Beweis. Da die Klasse von G kleiner oder gleich zwei ist, ist nach [5], Satz 10.2.*a*), S.322, die Gruppe regulär, also nach [3] jeder Potenzautomorphismus universell. Seien nun $x, y \in G$. Mit [5], Hilfssatz 1.3.*b*), S.253, ist dann

$$(xy)^{\varrho_n} = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}} = x^{\varrho_n} x^{\varrho_n} [x, y]^{-\binom{n}{2}}.$$

Das heißt, ϱ_n ist ein Automorphismus, genau dann wenn p nicht n teilt aber $\exp G'$ ein Teiler von $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)$ ist. Da $p \geqq 3$ ist, ist dies äquivalent zu:

a.) p teilt nicht n, und

b.) $\exp G'$ teilt $n-1$.

In abelschen Gruppen ist *b.*) banal, in nichtabelschen folgt *a.*) aus *b.*)' was 3.11 beweist.

3.12 Lemma. Sei R ein kommutativer Ring mit 1, in dem $1+1$ eine Einheit ist. Seien M ein freier R-Modul, der $\{x, y\}$ als Basis besitzt, und A die Menge aller bilinearen alternierenden Abbildungen von $M \times M$ in R. Dann ist A ein freier R-Modul, und es ist $\{f\}$ eine Basis von A mit $f(\lambda x + \mu y, \nu x + \eta y) = \lambda\eta - \eta\nu$ für alle $\lambda, \mu, \nu, \eta \in R$.

Eine Abbildung heiße alternierend, falls $f(m, n) = -f(n, m)$ für alle $m, n \in M$ ist. Da $1+1$ eine Einheit ist, ist dies äquivalent zur Forderung $f(m, m) = 0$ für alle $m \in M$.

Der Beweis ist trivial.

Wir benötigen weiter den folgenden Struktursatz:

3.13 Lemma. Sei X eine Gruppe der Klasse c mit $c \leqq 2$. Es sei $Z(X)$ zyklisch. Dann gibt es Untergruppen $H_1, \ldots, H_n$ und V von X, so daß gilt:

$$X = H_1 \cdot \ldots \cdot H_n V\,, \quad H_i' \geqq H_{i+1}' \neq 1\,, \quad [H_i, H_j] = 1\,, \quad H_i \cap H_j \leqq Z(X)$$

für alle $i \neq j$, $H_i = \langle a_i, b_i \rangle$ mit $o(b_i) = |H_i'|$ und $H_i' = \langle [a_i, b_i] \rangle$ sowie $V = 1$ oder $V = Z(X)$.

Beweis. Wir gehen mit Induktion vor. Falls X zyklisch ist, sind wir fertig. Sei also $c = 2$. Da $Z(X)$ zyklisch ist, ist auch X' zyklisch. Seien $a_1, b_1' \in X$, so daß $X' = \langle [a_1, b_1'] \rangle$ ist. Seien $H_1 := \langle a_1, b_1' \rangle$, $L_1 := C_X(H_1)$. Mit [1] folgt, daß $X = H_1 L_1$ ist und daß es ein $b_1 \in H_1$ gibt mit $H_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$, $X' = \langle [a_1, b_1] \rangle$ und $o(b_1) = |H_1'|$. Nach Definition von L_1 ist $C_X(H_1 \cap L_1) \geqq H_1 \cup L_1 = X$, also $H_1 \cap L_1 \leqq Z(X)$. Weiter ist $Z(L_1) \leqq Z(X)$, also zyklisch. Wir können daher auf L_1 die Induktionsvoraussetzung anwenden, woraus 3.13 folgt.

3.14 Lemma. *a.*) Seien $G = G_1 \times \ldots \times G_r$, $G_1 \simeq \ldots \simeq G_r$ p-Gruppen der Klasse c mit $c \leqq 2$, $p \geqq 3$, $d(G_i) \leqq 2$, $Z(G_i)$ zyklisch, $r \geqq 3$, φ eine Projektivität von G, so daß $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$ gilt. Dann ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

b.) Ist α eine beliebige Baersche Abbildung von G zu φ, so ist die Amorphie eine Potenz der Kommutatorfunktion.

Beweis. Sind die G_i zyklisch, so folgt die Behauptung aus 0.1. Sind sie nicht zyklisch, so ist $Z(G_i) \leqq \Phi(G_i)$. Die G_i haben daher die Struktur von H_1 aus 3.13. Sei $|G_i'| = p^e$. Dann hat G_1 die Form

$$G_1 = \langle a, b, c \colon [a, b] = c,\ [a, c] = [b, c] = 1 = b^{p^e} = c^{p^e},\ a^{p^i} = c^j \rangle$$

mit geeigneten i, j. Dabei ist $i \geqq e$ wegen $|G_1'| = p^e$. Seien $k, n \in \mathbf{Z}$, $\bar{a} := a^k b^n$, $\bar{c} := c^k$. Dann werden alle Relationen von G_1 auch mit $\bar{a}, b, \bar{c}$ statt a, b, c erfüllt:

Für die ersten ist dies klar. Schließlich gilt

$$\bar{a}^{p^i} = (a^k b^n)^{p^i} = a^{kp^i} b^{np^i} [b^n, a^k]^{\binom{p^i}{2}} = a^{kp^i} = c^{kj} = \bar{c}^j .$$

Die dritte Gleichheit gilt wegen $p \geqq 3$ und $i \geqq e$. Folglich gibt es wegen 1.32 einen Endomorphismus τ von G_1 mit

(i) $$a^\tau = a^k b^n , \qquad b^\tau = b , \qquad c^\tau = c^k .$$

Im Unterschied zu sonstigen derartigen Betrachtungen in dieser Arbeit ist τ aber nicht notwendigerweise ein Automorphismus von G_1.

Sei nun α eine Baersche Abbildung von G zu φ. Wegen 3.8.a) induziert α eine Baersche Abbildung auf G/G', die wegen 3.3.a) ein Isomorphismus ist. Das heißt, es ist $A(\alpha) \leqq G'$. Für die Definition von A erinnern wir an 1.17. Da φ zentralisotorerhaltend ist und von α induziert wird, ist $A(\alpha)^\alpha \leqq Z(G^\varphi)$. Zusammen mit 3.3.$a$) bedeutet das, daß die Voraussetzungen von 1.20 und 1.21 erfüllt sind. Wegen 3.3.a) ist $Z(G) \leqq \operatorname{Reg} \alpha$. Wegen 1.21 ist die Amorphie bezüglich α also konstant auf Restklassen nach zentralen Untergruppen. Wegen 3.10 gilt für die mit (i) bezeichneten Endomorphismen

$$a(a^k b^n, b) = a(a^\tau, b^\tau) = a(a, b)^\tau = a(a, b)^k .$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, daß $A(\alpha) \leqq G' \leqq \langle c \rangle$ ist. Entsprechend gilt natürlich $a(b, a^k b^n) = a(b, a)^k$. Wir behaupten nun:

Für alle $k, m, n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a(a^k b^n, b^m) = a(a, b)^{km} \qquad \text{und} \qquad a(b^m, a^k b^n) = a(b, a)^{mk} .$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über m: Der Induktionsanfang ist bereits gelegt, und es gilt

$$a(a^k b^n, b^{m+1}) = a(a^k b^{n+m}, b)\, a(a^k b^n, b^m) = a(a, b)^k a(a, b)^{km} = a(a, b)^{k(m+1)} .$$

Die erste Gleichheit folgt aus 1.20.a) mit $a^k b^n$, b^m, b statt x, y, z, die zweite aus der Induktionsvoraussetzung, angewandt auf beide Faktoren. Die andere Behauptung wird ebenfalls durch Induktion bewiesen, wobei die Gleichung $a(b^m, a^k b^n) = a(b^m, b^n a^k)$ benutzt wird, die wegen der Konstanz der Amorphie auf Restklassen nach zentralen Untergruppen gilt.

Ferner gilt.

$$\begin{aligned} b^{2\alpha} a^{2\alpha} [a, b]^\alpha a(b, a)^{4\alpha} &= b^{2\alpha} a^{2\alpha} a(b^2, a^2)^\alpha [a, b]^\alpha = \big(b^2 a^2 [a, b]\big)^\alpha = \\ &= (ba)^{2\alpha} = (ba)^\alpha (ba)^\alpha = b^\alpha a^\alpha b^\alpha a^\alpha a(b, a)^{2\alpha} = b^{2\alpha} a^{2\alpha} [a^\alpha, b^\alpha] a(b, a)^{2\alpha} . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

(ii) $$a(b, a)^{2\alpha} = [a^\alpha, b^\alpha][a, b]^{-\alpha} .$$

Durch die gleiche Rechnung, wobei a und b vertauscht sind, folgt auch $a(a, b)^{2\alpha} = [b^\alpha, a^\alpha][b, a]^{-\alpha}$. Insbesondere ist

$$a(b, a) = a(a, b)^{-1} ,$$

da die rechten Seiten der beiden Gleichungen invers zueinander sind und 2 eine Einheit im Ring $\mathbb{Z}_{p^e}$ ist. Seien nun $i, j, k, m \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a^{i\alpha}b^{j\alpha}a^{k\alpha}b^{m\alpha}a(a^i, b^j)^\alpha a(a^ib^j, a^kb^m)^\alpha a(a^k, b^m)^\alpha &= (a^ib^ja^kb^m)^\alpha = \\ &= (a^ib^ja^k)^\alpha b^{m\alpha} a(a^{i+k}b^j, b^m)^\alpha = (a^{i+k}b^j[b, a]^{jk})^\alpha b^{m\alpha} a(a, b)^{(i+k)m\alpha} = \\ &= a^{(i+k)\alpha}b^{j\alpha}a(a^{i+k}, b^j)^\alpha [b, a]^{jk\alpha} b^{m\alpha} a(a, b)^{(i+k)m\alpha} = \\ &= a^{i\alpha}b^{j\alpha}a^{k\alpha}b^{m\alpha}[a^\alpha, b^\alpha]^{jk}[a, b]^{-jk\alpha}a(a, b)^{(i+k)(j+m)\alpha} = \\ &= a^{j\alpha}b^{i\alpha}a^{k\alpha}b^{m\alpha}a(a, b)^{-2jk\alpha}a(a, b)^{(i+k)(j+m)\alpha}. \end{aligned}$$

Für alle $i, j, k, m \in \mathbb{Z}$ ist daher

$$a(a^ib^j, a^kb^m) = a(a, b)^{im-jk}.$$

Wieder wegen der Konstanz der Amorphie auf Restklassen nach zentralen Untergruppen heißt das, daß die Amorphie, wie man sofort nachrechnet, eine bilineare, alternierende Form auf dem zweidimensionalen freien $\mathbb{Z}_{p^e}$-Modul $G_1/Z(G_1)$ definiert. Sei $a(a, b) = [a, b]^s$. Nach Lemma 3.12 ist dann

$$a(\cdot, \cdot\cdot)|_{G_1} = [\cdot, \cdot\cdot]^s|_{G_1}$$

als Abbildung, woraus mit 1.13.*a*) und 1.19.*c*) folgt, daß Teil *b*.) unseres Lemmas bewiesen ist.

Aus (ii) folgt nun

$$[a^\alpha, b^\alpha] = [a, b]^{(1-2s)\alpha}.$$

Da φ^{-1} zentralisatorerhaltend ist, ist

$$1 \neq [(a^{p^{e-1}})^\alpha, b^\alpha] = [a^\alpha, b^\alpha]^{p^{e-1}} = [a, b]^{(1-2s)p^{e-1}\alpha}.$$

Also ist $1 - 2s \not\equiv 0(p)$. Das heißt, daß $1 - 2s$ eine Einheit im Ring $\mathbb{Z}_{p^e}$ ist. Sei dann u so gewählt, daß $0 \leq u < p^e$ ist und daß $(1 - 2s)\cdot u \equiv \equiv 1(p^e)$ gilt. Dann ist

$$2\left(su^2 - \binom{u}{2}\right) \equiv 2su^2 - u^2 + u \equiv u^2(2s - 1) + u \equiv -u + u \equiv 0$$

modulo p^e. Da 2 wegen $p \geqq 3$ eine Einheit in $\mathbb{Z}_{p^e}$ ist, ist

$$su^2 - \binom{u}{2} \equiv 0(p^e) .$$

Für alle $x, y \in G_1$ gilt dann

$$(xy)^{u\alpha} = \left(x^u y^u [x, y]^{-\binom{u}{2}}\right)^\alpha = x^{u\alpha} y^{u\alpha} a(x^u, y^u)^\alpha [x, y]^{-\binom{u}{2}\alpha} =$$
$$= x^{u\alpha} y^{u\alpha}\left([x, y]^{su^2-\binom{u}{2}}\right)^\alpha = x^{u\alpha} y^{u\alpha} .$$

Also ist $\varrho_u \circ \alpha|_{G_1}$ und wegen 1.19.c) dann auch $\varrho_u \circ \alpha$ ein Isomorphismus, der φ wegen 3.6 induziert.

Wir kommen nun zu

Satz 6. Seien $G = G_1 \times \ldots \times G_r$, $G_1 \simeq \ldots \simeq G_r$ p-Gruppen der Klasse c mit $r \geqslant 3$, $c \leqslant 2$ und $p \geqq 3$. Sei φ eine Projektivität von G, so daß $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$ gilt. Dann ist φ durch einen Isomorphismus induziert.

Beweis. Seien $\eta_1, \ldots, \eta_r$ Isomorphismen von G_1 auf $G_1, \ldots, G_r$ mit $\eta_1 = id_{G_1}$. Zunächst habe G_1 zyklisches Zentrum und die Form $G_1 = H_1 H_2$ in den Bezeichnungen von 3.13. Seien $H := H_1^{\eta_1} \times \ldots \times H_1^{\eta_r}$ und β eine Baersche Abbildung von G zu φ. Dann ist $\beta|_H$ nach 3.5.c) eine Baersche Abbildung von H, und nach 3.7 sind die $\varrho_i \circ \beta|_H$ mit $(i, p) = 1$ genau alle Baerschen Abbildungen von H zu der von φ auf H induzierten Projektivität Nach 3.14.a) und 1.2.c) gibt es daher eine Baersche Abbildung α von G, so daß $\alpha|_H$ ein Isomorphismus ist. Wir zeigen

(*) Sei α eine Baersche Abbildung von G, deren Einschränkung auf H ein Isomorphismus ist. Dann ist α ein Isomorphismus.

Falls $o(a_2) \geqq o(a_1)$ ist, sei $a := a_2$. Sonst sei $a := a_1$. Sei $U := \langle x, y \rangle$ mit $x := a_2 a^{\eta_2} a_1^{\eta_r}$ und $y := b_2 b_1^{\eta_r}$. Dann ist

$$a(x, y) = a(a_2, b_2) a(a^{\eta_2}, 1) a(a_1^{\eta_r}, b_1^{\eta_r}) = a(a_2, b_2) \in Z(G_1) .$$

Dabei ist die Amorphie bezüglich α gemeint, und, da $\alpha|_H$ ein Isomorphismus, das heißt $a(a_1, b_1) = 1$, ist, ist wegen 1.19.c) auch $a(a_1^{\eta_r}, b_1^{\eta_r}) = 1$.

Nach 1.18 ist $a(x, y) \in U$. Wir behaupten

$$(**) \qquad U \cap Z(G_1) = 1 .$$

Beweis von (**):

Sei $z := [x, y]$. Nach [5], Hilfssatz 1.11.c), S.258, ist $U' = \langle z \rangle$, und jedes $u \in U$ hat die nicht notwendig eindeutige Darstellung $u = x^i y^j z^k$. Ist $y^j \neq 1$, so ist $[x, u] = [x, y^j] = z^j \neq 1$, da $o(b_i) = o([a_i, b_i])$ ist. Also ist $u \notin Z(G)$. Sei nun $u \in U \cap \Omega(Z(G_1))$. Dann hat u eine Darstellung $u = x^i z^k$. Da $\langle x, z \rangle$ abelsch ist, ist

$$u \in \Omega(\langle x \rangle) \times \Omega(\langle z \rangle) .$$

Es ist $z = [a_2, b_2][a_1^{\eta_r}, b_1^{\eta_r}]$, also

$$\Omega(\langle z \rangle) \leqq \Omega(Z(G_1 \times G_r)) .$$

Wegen $o([a_1, b_1]) \geqq o([a_2, b_2])$, was aus dem Struktursatz 3.13 ersichtlich ist, gilt $\Omega(\langle z \rangle) \neq \Omega(Z(G_1))$. Es ist $o(a)$ maximal, also ist $\Omega(\langle x \rangle) \nleqq G_1 \times G_r$. Diese drei Aussagen bedeuten, daß die Projektion $\pi\colon \Omega(\langle x \rangle) \times \Omega(\langle z \rangle) \to \Omega(Z(G_2 \times G_r))$ surjektiv, als Homomorphismus zwischen zweidimensionalen Vektorräumen somit ein Isomorphismus ist. Aus $u \in \Omega(Z(G_1))$ folgt nun $\pi(u) = 1$, also $u = 1$, womit (**) bewiesen ist.

Daraus folgt nun, daß

$$a(a_2, b_2) = a(x, y) \in U \cap Z(G_1) = 1$$

ist. Nach 3.14.b) ist die Amorphie auf $H_2^{\eta_1} \times \ldots \times H_2^{\eta_r}$ eine Potenz der Kommutatorfunktion. Wegen $H_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$ und $1 = a(a_2, b_2)$ folgt daraus $a(\cdot, \cdot\cdot) = 1$, und (*) ist bewiesen.

Sei jetzt G_1 wie in den Voraussetzungen des Satzes aber noch mit zyklischem Zentrum gewählt, also von der Form $G_1 = H_1 \cdot \ldots \cdot H_n V$ wie in 3.13. Sei β eine Baersche Abbildung von G. Dann sind die $\varrho_i \circ \beta$ mit $i \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ genau alle Baerschen Abbildungen von G. Sei $H := H_1^{\eta_1} \times \ldots \times H_1^{\eta_r}$. Nach 3.5.c) und 3.7 sind die $\varrho_i \circ \beta|_H$ genau alle Baerschen Abbildungen von H. Sei nun α so gewählt, daß $\alpha|_H$ ein Isomorphismus ist. Mit (*) folgt durch Betrachtung der Untergruppen $(H_1 H_i)^{\eta_1} \times \ldots \times (H_1 H_i)^{\eta_r}$, daß $\alpha|_{H_i}$ für alle i ein Isomorphismus ist. Da $[H_i, H_j] = 1$ und $V \leqq Z(G_1)$ gilt, folgt mit 3.3.a), daß $\alpha|_{G_1}$ also wegen 1.19.c) ganz α ein Isomorphismus ist.

Sei nun $Z(G_1)$ nicht zyklisch. Seien dann $Z \leqq \Omega(Z(G_1))$ mit $|Z| = p^2$ und $Z_1, \ldots, Z_{p+1} \leqq Z$ die Untergruppen der Ordnung p. Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_i$ die Mengen aller Baerschen Abbildungen von G, die auf G_1/Z beziehungsweise auf G_1/Z_i einen Isomorphismus induzieren. Dann ist $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$ für alle i. Seien $e := \exp(G_1/Z)'$ und $e_i := \exp(G_1/Z_i)'$. Mit $\alpha \in \mathfrak{M}$ sind nach 3.11 für den Fall $e \neq 1$ genau die $\varrho_{1+me} \circ \alpha$ mit beliebigem $m \in \mathbb{Z}$ die Elemente von $\mathfrak{M}$. Falls $e = 1$ ist, ist

$$\mathfrak{M} = \{\varrho_m \circ \alpha \colon m \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\}.$$

Ganz allgemein folgt aus [5], Hilfssatz 8.4, S.38: Sei $N \trianglelefteq G$ mit $\exp N = p$. Dann ist $1/p \exp G' \leqq \exp(G/N)' \leqq \exp G'$. Wir wenden dies an auf die Gruppen G_1/Z_i und G_1/Z. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{p} \exp(G_1/Z_i)' \leqq \exp(G_1/Z)' \leqq \exp(G_1/Z_i)'.$$

Also ist $e_i \in \{e, pe\}$. Ist $\alpha \in \mathfrak{M}_i$, dann sind auch die $\varrho_{1+me_i} \circ \alpha \in \mathfrak{M}_i$, wobei wieder m beliebig aus $\mathbb{Z}$ mit $0 \not\equiv 1 + me_i$ zu nehmen ist, modulo p.

Ist $e = e_i$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$.

Ist $e_i = pe$ und $e \neq 1$, so ist $|\mathfrak{M}| = p|\mathfrak{M}_i|$.

Ist $e = 1$ und $e_i = p$, so sei $\alpha \in \mathfrak{M}_i$. Dann besteht $\mathfrak{M}_i$ genau aus den $\varrho_n \circ \alpha$ mit $n \equiv 1(p)$. Da $\alpha \in \mathfrak{M}$ und G/Z abelsch ist, besteht $\mathfrak{M}$ genau aus den $\varrho_n \circ \alpha$ mit $n \not\equiv 0(P)$. Daher ist in diesem Falle $|\mathfrak{M}| = (p-1)|\mathfrak{M}_i|$.

Da wir insgesamt $p+1$ Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ von $\mathfrak{M}$ betrachten, deren jede mindestens die Ordnung $(1/p)|\mathfrak{M}|$ hat, gibt es $i \neq j$, so daß $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j \neq \emptyset$ ist. Ein $\alpha \in \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j$ induziert aber auf G_i einen Isomorphismus und ist deshalb auf G einer. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Die Voraussetzungen von Satz 6 lassen sich noch etwas abschwächen. Das zeigt

3.15 Bemerkung. Seien $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ eine p-Gruppe und φ eine Projektivität von G. Ist $\exp G = \exp G_r$ und gilt $G^\varphi = (G_1 \times \ldots \times G_{r-1})^\varphi \times G_r^\varphi$, so gilt $G^\varphi = G_1^\varphi \times \ldots \times G_r^\varphi$.

Beweis. Seien $g_r \in G_r$ mit $o(g_r) = \exp G$, sowie $g_i \in G_i$ für alle $1 \leqq i \leqq r-1$. Dann ist $\langle g_1, \dots, g_r\rangle$ abelsch, also

$$\langle g_1, \dots, g_r\rangle^\varphi = \langle g_1, \dots, g_{r-1}\rangle^\varphi \times \langle g_r\rangle^\varphi$$

modular. Da diese Gruppe ein Element maximaler Ordnung im Zentrum enthält, ist auch sie nach [6], Lemma 3, abelsch. Somit zentralisieren die G_i^φ einander.

Die Bemerkung zeigt, daß es reicht, in den Voraussetzungen von Satz 6 zu fordern, daß $G^\varphi = (G_1 \times \dots \times G_{r-1})^\varphi \times G_r^\varphi$ gilt.

Mit Blick auf den ähnlich lautenden Satz 1 ergibt sich unter anderem die Frage, ob die Forderung, daß alle G_i zueinander isomorph sind, fallengelassen werden kann. Berücksichtigt man die Ergebnisse von Baers Arbeit und die Art unserer Konstruktion von Baerschen Abbildungen, so liegt die Vermutung nahe, daß wenigstens drei der G_i maximalen Exponenten besitzen müssen. Daß aber nicht einmal die Forderung, alle G_i sollen gleichen Exponenten haben, bei wievielen direkten Faktoren auch immer, ausreicht, zeigt

3.16 Beispiel. Seien

$$G_1 = \langle a, b, c\colon a^{p^3} = b^{p^2} = c^{p^2} = 1 = [a, c] = [b, c], [a, b] = c\rangle$$

und G_2 ein beliebiges direktes Produkt von Gruppen vom Exponenten p^2 mit $\mathrm{cl}\, G_2 = 2$ und $\exp G_2' = p$, beispielsweise ein Produkt nichtabelscher Gruppen der Ordnung p^3 mit Exponent p^2. Da $\langle c^p\rangle$ der einzige minimale Normalteiler von $G_1 = \langle a, b\rangle$ ist und wegen $\exp G_1' > \exp G_2'$ kein Monomorphismus von G_1 in G_2 existiert, sind die Voraussetzungen von 1.37 für G_1 und G_2 erfüllt. Wir definieren für jede maximale Untergruppe M von G_1 eine Abbildung

$$\lambda_M\colon M \to \Omega(Z(G_1))\colon$$

Ist $M = \langle ab\rangle \Phi(G_1)$, so sei

$$((ab)^i g)^{\lambda_M} := c^{ip},$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$, $g \in \Phi(G_1)$. Ist $M \neq \langle ab\rangle \Phi(G_1)$, so sei $m^{\lambda_M} := 1$ für alle $m \in M$. Nach 1.37 induziert die Abbildung λ mit

$$(g_1 g_2)^\lambda = g_1 g_1^{\lambda_M} g_2$$

für alle $g_2 \in G_2$ und $g_1 \in M \lessdot G_1$ eine Autoprojektivität φ von $G = G_1 \times G_2$. Wir zeigen, daß φ durch keinen Automorphismus induziert ist.

Sei τ ein φ induzierender Isomorphismus. Dann läßt τ modulo $G_1' = \langle c \rangle$ alle Untergruppen von G_1 invariant, ist also auf G_1 modulo $\langle c \rangle$ ein universeller Potenzautomorphismus. Seien

$$a^\tau = a^i c^j \quad \text{und} \quad b^\tau = b^i c^k .$$

Wegen $\langle a^\tau \rangle = \langle a \rangle^\varphi = \langle a \rangle$ und $\langle b^\tau \rangle = \langle b \rangle^\varphi = \langle b \rangle$ sind $j \equiv k \equiv O(p^2)$.

Schließlich ist

$$\langle ac \rangle = \langle ac \rangle^\varphi = \langle a[a, b] \rangle^\varphi = \langle (a[a, b])^\tau \rangle = \langle a^\tau [a^\tau, b^\tau] \rangle = \\ = \langle a^i [a^i, b^i] \rangle = \langle a^i c^{i^2} \rangle .$$

Wegen $o(a) = o(c)$ gilt $i \equiv i^2 (p^2)$, und da p nicht i teilt, folgt $i \equiv 1 (p^2)$ Also ist $\tau|_{G_1}$ die Identität, aber φ ist auf G_1 nicht die identische Projektivität. Also ist φ durch keinen Isomorphismus induziert.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ADNEY - YEN, *Automorphisms of a p-group*, Illinois J. Math., **9** (1965). pp. 137-143.

[2] R. BAER, *The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, Amer. J. of Math., **61** (1939), pp. 1-44.

[3] C. D. H. COOPER, *Power automorphisms of a group*, Math. Z., **107** (1968), pp. 335-356.

[4] FUCHS, *Abelian Groups*, Pergamon Press (1960).

[5] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen* I, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1967).

[6] JAKOVLEV, *Lattice isomorphisms of groups*, Algebra and Logic, **9** (1970), pp. 210-222.

[7] MEIER - WUNDERLI, *Metabelsche Gruppen*, Comm. Math. Helv., **25** (1951), pp. 1-10.

[8] MIECH, *The metabelian p-groups of maximal class* II, Trans. Amer. Math. Soc., **272** (1982), pp. 465-474.

[9] L. Redei, *Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie*, Comm. Math. Helv., **20** (1947), pp. 225-267.

[10] R. Schmidt, *Der Untergruppenverband des direkten Produktes zweier Gruppen*, Journal of Algebra, **73** (1981), pp. 264-272.

[11] R. Schmidt, *Untergruppenverbände endlicher Gruppen mit elementarabelschen Hallschen Normalteilern*, J. Reine Angew. Math., **334** (1982), pp. 116-140.

[12] M. Suzuki, *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), pp. 345-371.

[13] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1956).

[14] G. Zacher, *Sul reticolo dei sottogruppi del quadrato cartesiano di un gruppo semplice*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **65** (1981), pp. 1-7.

Pervenuto in redazione il 12 giugno 1986.