RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO TOFFALORI

Dalle teorie $p - \aleph_0$-categoriche a quelle $\aleph_0$-categoriche : un passo intermedio

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 78 (1987), p. 155-174

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1987__78__155_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 78 (1987)

Dalle teorie $p-\aleph_0$-categoriche a quelle $\aleph_0$-categoriche: un passo intermedio.

CARLO TOFFALORI (*)

SUMMARY - A theory T is said to be $b-\aleph_0$-categorical (Booleanly $\aleph_0$-categorical) if, for every $n \in \omega - \{0\}$ and for every countable M, $N \models T$, $B_n(M)$ is isomorphic to $B_n(N)$. In this paper we study the basic properties of $b-\aleph_0$-categorical theories, in particular we consider the problem of classifying the sequences $(B_n\colon n \in \omega - \{0\})$ of countable atomic Boolean algebras such that there is a $b-\aleph_0$-categorical theory T satisfying $B_n \simeq B_n(M)$ for all $n \in \omega - \{0\}$ (where M is any countable model of T).

1. Introduzione.

Sia T una teoria del 1° ordine (che si sottointende completa, contabile, priva di modelli finiti); per ogni modello M di T e per ogni $n \in \omega - \{0\}$, indichiamo con $B_n(M)$ l'algebra di Boole dei sottoinsiemi definibili di M^n, e con $S_n(M)$ lo spazio duale di $B_n(M)$, ovvero lo spazio di Boole degli n-tipi su M. In [MM] e [MT] è studiato il concetto di teoria $p-\lambda$-categorica (dove λ è un qualunque cardinale infinito): T si dice $p-\lambda$-categorica (pseudo-λ-categorica) se, comunque si scelgano M, $N \models T$ con $|M| = |N| = \lambda$, si ha $B_1(M) \simeq B_1(N)$. Si può notare che, per λ non contabile, T è $p-\lambda$-categorica se e solo se T è λ-categorica [MM], così che, in questo caso, il concetto di $p-\lambda$-categoricità non sembra avere altro interesse se non quello di mettere

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico Università, Viale Morgagni 67/A, Firenze.

in evidenza una nuova caratterizzazione della λ-categoricità. Invece, le teorie $p - \aleph_0$-categoriche formano una classe ben più vasta di quella delle teorie $\aleph_0$-categoriche, e comunque difficile da deliminare [MT].

Obiettivo di questa nota è introdurre e studiare una nozione più forte della $p - \aleph_0$-categoricità. Per ogni cardinale infinito λ, diremo che una teoria T è $b - \lambda$-categorica (booleanamente λ-categorica) se, comunque si scelgano M, $N \models T$ con $|M| = |N| = \lambda$ e $n \in \omega - \{0\}$, si ha $B_n(M) \simeq B_n(N)$.

È ovvio che, anche in questo caso, per λ non contabile, T è $b - \lambda$-categorica se e solo se T è λ-categorica, dunque concentreremo la nostra attenzione sulle teorie $b - \aleph_0$-categoriche.

Il § 2 è dedicato ad uno studio generale di queste teorie. Si proverà dapprima che ogni teoria categorica (in $\aleph_0$ o in $\aleph_1$) è $b - \aleph_0$-categorica; in particolare le teorie fortemente minimali sono $b - \aleph_0$-categoriche. Analogamente, ogni teoria fortemente o-minimale e $p - \aleph_0$-categorica è $b - \aleph_0$-categorica. Si vedrà però che in generale esistono teorie (anche ω-stabili con rango di Morley finito) $p - \aleph_0$-categoriche ma non $b - \aleph_0$-categoriche. Dunque il concetto di teoria $b - \aleph_0$-categorica è più forte di quello di teoria $p - \aleph_0$-categorica (non così forte, comunque, da essere equivalente a quello di teoria categorica).

Il § 3 è dedicato invece al seguente più particolare problema: sia T una teoria $b - \aleph_0$-categorica, allora T induce un'applicazione f_T definita su $\omega - \{0\}$ e tale che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = \text{tipo di isomorfismo di } B_n(M)$$

dove M è un qualunque modello contabile di T. Ci si chiede allora quali siano le possibili funzioni f_T.

Si proverà dapprima che, per ogni algebra di Boole contabile atomica B, esiste una teoria $b - \aleph_0$-categorica T tale che

$$f_T(1) = \text{tipo di isomorfismo di } B\,.$$

Il secondo passo è studiare $\{f_T(n) : n \in \omega - \{0\}\}$ in funzione di $f_T(1)$. Si noti che un problema in qualche modo analogo fu affrontato da Lachlan [L] nel caso ω-stabile. Si vedrà qui come $f_T(n)$ si può descrivere in modo assai semplice a partire da $f_T(1)$ per T $\aleph_1$-categorica oppure $\aleph_0$-categorica ed ω-stabile, ma che in generale la situazione è assai confusa e la classificazione assai difficile anche nel più semplice caso T ω-stabile.

La notazione sarà quella usuale (essenzialmente quella di [MT]). Se B è un'algebra di Boole e $x \in B$, indicheremo con $B[x]$ l'algebra di Boole di dominio $\{y \in B : y \leqslant x\}$ (e struttura definita nel modo ovvio).

Se poi B è un'algebra di Boole contabile superatomica (ad esempio se $B = B_n(M)$ dove $n \in \omega - \{0\}$ e M è un modello contabile di una teoria ω-stabile), allora, per ogni $x \in B$, CB-rango, CB-grado e CB-tipo di x sono definiti nel modo consueto. Più precisamente si pone:

1) CB-rango $x \geqslant 0$ se $x \neq 0$;

2) CB-rango $x \geqslant \lambda$ (con λ ordinale limite) se CB-rango $x \geqslant \nu$ per ogni ordinale $\nu < \lambda$;

3) CB-rango $x \geqslant \lambda$ (con $\lambda = \nu + 1$ ordinale successore) se, per ogni $n \in \omega$,

(*) esistono $x_0, \ldots, x_{n-1} \in B$ tali che $x = \bigvee_{i<n} x_i$, CB-rango $x_i \geqslant \nu$ per ogni $i < n$ e $x_i \wedge x_j = 0$ $\forall i, j$ con $i < j < n$.

Siccome B è superatomica, per ogni $x \in B$, se $x \neq 0$, esiste $\nu < \omega_1$ tale che CB-rango $x \geqslant \nu$ e CB-rango $x \not\geqslant \nu + 1$. Si pone allora

1) CB-rango $x = \nu$,

2) CB-grado $x =$ massimo $n \in \omega$ soddisfacente (*),

3) CB-tipo $x = (CB\text{-rango } x,\ CB\text{-grado } x)$.

Finalmente si definisce CB-rango $B = CB$-rango 1 (e analogamente per CB-grado B e CB-tipo B). È noto che, se B, B' sono algebre contabili superatomiche, allora $B \simeq B'$ se e solo se CB-tipo $B = CB$-tipo B'. Per una generale classificazione dei tipi di isomorfismo delle algebre di Boole contabili atomiche, si veda comunque [K].

2. Teorie $b - \aleph_0$-categoriche.

Definizione. Una teoria T è $b - \aleph_0$-categorica (booleanamente $\aleph_0$-categorica) se, comunque si scelgano M, N modelli contabili di T e $n \in \omega - \{0\}$, si ha $B_n(M) \simeq B_n(N)$.

Proposizione 1. Se T è una teoria categorica (in $\aleph_0$ o in $\aleph_1$), allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

Dimostrazione. 1º *caso*: T è $\aleph_0$-categorica. Siano M, N modelli contabili di T, allora esiste un isomorfismo f di M su N, ed è facile verificare che f induce, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, un isomorfismo f_n di $B_n(M)$ su $B_n(N)$ definito nel modo che segue: per ogni $X \in B_n(M)$,

$$f_n(X) = f(X)\,.$$

2º *caso*: T è $\aleph_1$-categorica. Si è già visto [MT] che, allora, T è $p-\aleph_0$-categorica. Si tratta di provare che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $B_n(M) \simeq B_n(N)$. Sia L il linguaggio di T, consideriamo un nuovo linguaggio $L' = L \cup \{U, Q, p_0, \dots, p_{n-1}\}$ dove U, Q sono relazioni 1-arie, $p_0, \dots, p_{n-1}$ applicazioni 1-arie; sia poi T' la teoria in L' i cui modelli M' sono tali che

1) $Q(M') \models T$;

2) $U(M') \cap Q(M') = \emptyset$, $U(M') \cup Q(M') = M'$;

3) $p_0, \dots, p_{n-1}$ sono applicazioni di $U(M')$ in $Q(M')$ tali che, comunque si scelgano $x_0, \dots, x_{n-1} \in Q(M')$, esiste uno e un solo $x \in U(M')$ tale che, per ogni $i < n$, $p_i(x) = x_i$.

Allora

1) se $M' \models T'$, si ha che $M = Q(M')$ è modello di T e $U(M')$ coincide sostanzialmente con M^n;

2) se $M \models T$, si può costruire in modo ovvio un modello M' di T' ponendo $Q(M') = M$, $U(M') = M^n$.

T' è $\aleph_1$-categorica (infatti, se M', $N' \models T'$ hanno cardinalità $\aleph_1$, allora M, N sono modelli di T di cardinalità $\aleph_1$, dunque M, N sono isomorfi ed è facile prolungare tale isomorfismo ad un isomorfismo di M' su N'); perciò T' è $p-\aleph_0$-categorica, anzi, comunque si scelgano due modelli contabili M', N' di T', si ha

$$B_1(M')[M'-M] \simeq B_1(N')[N'-N]$$

(basta osservare che CB-rango $(M'-M) > CB$-rango M, e dunque CB-tipo $(M'-M) = CB$-tipo M'; analogamente per N). Infine è ovvio che, per ogni modello (contabile) M di T,

$$B_n(M) \simeq B_1(M')[M'-M]\,.$$

Allora, comunque si scelgano due modelli contabili M, N di T, $B_n(M) \simeq \simeq B_n(N)$. $\square$

Val forse la pena di notare che, allora, esistono teorie $b - \aleph_0$-categoriche non $\aleph_0$-categoriche (così come teorie $b - \aleph_0$-categoriche non $\aleph_1$-categoriche). Del resto si vedrà che esistono teorie $b - \aleph_0$-categoriche non categoriche (nè in $\aleph_0$ nè in $\aleph_1$).

COROLLARIO. Se T è una teoria fortemente minimale, allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

Infatti T è $\aleph_1$-categorica.

PROPOSIZIONE 2. Sia T una teoria tale che, per ogni modello contabile M di T, $B_1(M)/(\mathrm{At}\, B_1(M))$, è priva di atomi. Allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

DIMOSTRAZIONE. È ben noto che, se B_0, B_1 sono due algebre di Boole contabili, atomiche e tali che, per ogni $i \leqslant 1$, $B_i/(\mathrm{At}\, B_i)$ è priva di atomi, allora $B_0 \simeq B_1$ (vedi, ad esempio [K]). Basta allora provare che, per ogni modello contabile M di T e per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $B_n(M)/(\mathrm{At}\, B_n(M))$ è priva di atomi, ovvero che ogni elemento infinito di $B_n(M)$ si può decomporre nell'unione di due elementi infiniti disgiunti di $B_n(M)$. Procediamo per induzione su n. $n = 1$: questo caso segue dall'ipotesi.

$n \Rightarrow n + 1$. Sia $X = \varphi(M^{n+1})$ un elemento infinito di $B_{n+1}(M)$ (si omettono per semplicità i parametri di M nella formula $\varphi(v_0, \bar{v}) = = \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ che definisce X).

1° *caso*: $\exists v_0 \varphi(v_0, \bar{v})$ definisce un insieme finito; siano $\bar{a}(0), \ldots, \bar{a}(m)$ le realizzazioni distinte di tale formula in M. Si ha

$$X = \bigcup_{i \leqslant m} X_i$$

dove, per ogni $i \leqslant m$, $X_i = \{(x, \bar{a}(i)) : x \in M,\ M \models \varphi(x, \bar{a}(i))\}$. Allora esiste $i \leqslant m$ tale che X_i è infinito, e dunque $\varphi(M, \bar{a}(i)) = \{x \in M : (x, \bar{a}(i)) \in X_i\}$ è infinito. Segue che $\varphi(M, \bar{a}(i))$ si decompone nella unione di due insiemi definibili infiniti disgiunti di $M \chi_0(M)$ e $\chi_1(M)$. Poniamo per ogni $i \leqslant 1$

$$\psi_i(v_0, \bar{v}) : \chi_i(v_0) \wedge \varphi(v_0, \bar{v}) .$$

Allora $\psi_0(M^{n+1})$, $\psi_1(M^{n+1})$ sono sottoinsiemi definibili di M

1) infiniti (se $x \in \chi_i(M)$, allora $(x, \bar{a}(i)) \in \psi_i(M^{n+1})$),

2) disgiunti (perchè $\chi_0(M)$, $\chi_1(M)$ sono disgiunti),

3) contenuti in X.

2° *caso*: $\exists v_0 \varphi(v_0, \bar{v})$ definisce un insieme Y infinito. Per l'ipotesi induttiva, Y is decompone nella unione di due sottoinsiemi definibili infiniti disgiunti $\chi_0(M^n)$, $\chi_1(M^n)$. Si pone per ogni $i \leqslant 1$

$$\psi_i(v_0, \bar{v}) : \chi_i(\bar{v}) \wedge \varphi(v_0, \bar{v}) .$$

Come sopra si ha che $\psi_0(M^{n+1})$, $\psi_1(M^{n+1})$ sono sottoinsiemi definibili di X, infiniti e disgiunti.

Corollario. Se T è una teoria $p - \aleph_0$-categorica di strutture linearmente ordinate, allora T è $b - \aleph_0$-categorica.

Infatti, per ogni modello M contabile di T, $B_1(M)/(\mathrm{At}\, B_1(M))$ è priva di atomi (vedi [ST]). In particolare, una teoria fortemente o-minimale e $p - \aleph_0$-categorica è $b - \aleph_0$-categorica (le teorie fortemente o-minimali e $p - \aleph_0$-categoriche sono classificate in [ST]).

Si potrebbe essere indotti a sperare a questo punto che ogni teoria $p - \aleph_0$-categorica (magari ω-stabile) sia anche $b - \aleph_0$-categorica. Sfortunatamente questo non è vero. Ecco un esempio di una teoria ω-stabile di rango di Morley 4 che è $p - \aleph_0$-categorica ma non è $b - \aleph_0$-categorica (infatti, comunque si fissano due modelli contabili M, N di T, si ha $B_1(M) \simeq B_1(N)$, ma esistono due modelli contabili M, N di T tali che $B_2(M) \not\simeq B_2(N)$; cfr. [L], § 2).

1) Consideriamo dapprima la struttura $(\mathbb{Z}, s)$ dove s è la operazione di successore tra numeri interi. In modo analogo a quanto fatto nella proposizione 1, costruiamo una nuova struttura M_0 del 1° ordine, avente come dominio $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^3$, e il cui linguaggio contiene due relazioni 1-arie U, V da interpretarsi rispettivamente in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Z}^3$, l'operazione s di successore per $\mathbb{Z}$, le proiezioni p_0, p_1, p_2 di $\mathbb{Z}^3$ su $\mathbb{Z}$, ed una costante per ogni elemento di $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^3$; è facile vedere che la relativa teoria T_0 è ω-stabile con rango di Morley 3 e grado di Morley 1; di più, T_0 è $\aleph_1$-categorica e quindi $b - \aleph_0$-categorica.

Si osservi che in M_0 (come in ogni altro modello di T_0) sono 0-definibili le seguenti biiezioni $f_{h,k,m}$ di $V(M_0)$ su $V(M_0)$: per ogni $(h, k, m) \in$

$\in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$,

$$f_{h,k,m}(v) = w \Leftrightarrow \begin{cases} s^h(p_0(v)) = p_0(w) \\ s^k(p_1(v)) = p_1(w) \\ s^m(p_2(v)) = p_2(w) . \end{cases}$$

Consideriamo poi il seguente sottoinsieme X' di $\mathbf{Z}^\varepsilon = V(M_0)$: $X' = \{x(n) : n \in \omega\}$ dove

$$x(0) = (0, 0, 0) ,$$

$$x(n+1) = \Big(s^{n+1}\big(p_0(x(n))\big), s^{n+2}\big(p_1(x(n))\big), s^{n+3}\big(p_2(x(n))\big)\Big) ,$$

così che, per ogni $n \in \omega$,

$$x(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+3)}{2}, \frac{n(n+5)}{2}\right)$$

o, ancora,

$$x(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, s^n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right), s^{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right).$$

Sia σ una enumerazione di $\omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$ secondo la somma e poi secondo l'ordine lessicografico (così che, ad esempio, $\sigma(0) = (0, 0, 1)$, $\sigma(1) = (0, 1, 0)$, $\sigma(2) = (1, 0, 0)$, $\sigma(3) = (0, 0, 2)$ etc.). Dati h, k, m, $i \in \omega$ con h, k, m non tutti nulli, poniamo

$$\bar{\sigma}(h, k, m, i) = \sum_{j \leqslant q} j + r$$

dove $r = \sigma^{-1}(h, k, m)$, $q = r + i$ $(\geqslant r)$. Chiaramente $\bar{\sigma}$ è una corrispondenza biunivoca di $\omega^4 - \{(0, 0, 0, i) : i \in \omega\}$ su ω. Definiamo allora, $\forall h, k, m, i \in \omega$ con h, k, m non tutti nulli,

$$x_{h,k,m,i} = x(\bar{\sigma}(h, k, m, i))$$

(quindi $x_{0010} = x(0)$, $x_{0011} = x(1)$, $x_{0100} = x(2)$, etc.). Siano infine

$$X'' = \{f_{h,k,m}(x_{h,k,m,i}) : (h, k, m) \in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\},\ i \in \omega\} ,$$
$$X = X' \cup X'' .$$

È facile vedere che, comunque si fissano un modello contabile M di T_0 e un sottoinsieme definibile S di M di CB-rango $\leqslant 2$, $S \cap X$ è finito (infatti i sottoinsiemi definibili $\neq \emptyset$ di CB-rango $\leqslant 2$ contenuti in $V(M)$ sono definiti da formule della forma

$$p_i(v) = a \qquad (\text{con } i \leqslant 2,\ a \in U(M)),$$

$$s^h(p_i(v)) = p_j(v) \qquad (\text{con } i, j \leqslant 2,\ i \neq j,\ h \in \omega)$$

o da loro combinazioni booleane positive).

2) Consideriamo adesso una nuova struttura M del 1° ordine; il relativo linguaggio L contiene anzitutto due relazioni 1-arie P, Q e un'applicazione 1-aria π tali che

a) $P(M) \cup Q(M) = M$, $P(M) \cap Q(M) = \emptyset$;

b) $Q(M)$ è la struttura già descritta al punto 1;

c) π è un'applicazione di $P(M)$ su $V(Q(M))$;

d) per ogni $a \in V(Q(M)) - X$, $\pi^{-1}(a)$ è un insieme infinito (senza ulteriore struttura);

e) per ogni $a \in X$, $\pi^{-1}(a)$ è un insieme con due relazioni di equivalenza $E_{a,0}$, $E_{a,1}$ tali che $E_{a,0} \subseteq E_{a,1}$, ogni classe di $E_{a,1}$ in $\pi^{-1}(a)$ è finita, e, più precisamente, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $E_{a,1}$ ammette esattamente n classi con n^2 elementi, ed $E_{a,0}$ ripartisce tali classi in n sottoclassi con n elementi (è facile vedere che la teoria di $\pi^{-1}(a)$ nel linguaggio contenente $E_{a,0}$, $E_{a,1}$ ed eventualmente le costanti per gli elementi di $\pi^{-1}(a)$ è ω-stabile ed ha CB-spettro $\{(1,1)\} \cup \{(2,n) \colon n \in \omega - \{0\}\} \cup \{(3,1)\}$; assumiamo che L contenga le costanti per gli elementi di $\pi^{-1}(a)$ in M per ogni $a \in X$).

Sia $T = \mathrm{Th}(M)$ la relativa teoria; allora T è ω-stabile; di più T è p-$\aleph_0$-categorica e CB-Spec $T = \{(4,1)\}$; infatti, pur senza addentrarci in dettagli, possiamo osservare che, per ogni modello M' di T, i sottoinsiemi definibili contenuti in $Q(M')$ hanno CB-tipo $\leqslant (3,1)$, mentre quelli contenuti in $P(M')$ sono combinazioni booleane di insiemi della forma

$$\bigcup_{a \in S} T(a)$$

dove S è un definibile di $V(Q(M'))$ e, per ogni $a \in S$, $T(a)$ è un definibile di $\pi^{-1}(a)$ (in M').

È chiaro allora che il modello primo M di T ha CB-tipo $(4, 1)$; sia invece $\bar{M}$ modello contabile saturato di T, allora $\bar{M}$ contiene infinite copie di $\mathbb{Z}$ in $U(Q(\bar{M}))$, ed in più in $\bar{M}$, per ogni $a \in X$, $\pi^{-1}(a)$ ha CB-tipo $(3, 1)$. D'altra parte, per ogni sottoinsieme definibile S di $V(Q(\bar{M}))$ di CB-rango < 3, $X \cap S$ è finito, così che

$$CB\text{-rango} \bigcup_{a \in S} T(a) \leqslant 3 \,.$$

Segue che anche $\bar{M}$ ha CB-tipo $(4, 1)$, così che T è $p - \aleph_0$-categorica.

D'altra parte, T non è $b - \aleph_0$-categorica; infatti, con un po' di pazienza si può osservare che l'algebra di Boole $B_2(M)$ ha CB-tipo $(8, 1)$; consideriamo il modello contabile saturato $\bar{M}$ di T; in $B_2(\bar{M})$, comunque si fissano $(h, k, m) \in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$ e $i \in \omega$,

$$\pi^{-1}(x_{h,k,m,i}) \times \pi^{-1}\big(f_{h,k,m}(x_{h,k,m,i})\big)$$

ha CB-rango 6. Allora, per ogni $(h, k, m) \in \omega^3 - \{(0, 0, 0)\}$,

$$\begin{aligned} S_{h,k,m} = \Big\{(x, y)\colon x, y \in P(\bar{M}),\ s^h\big(p_0(\pi(x))\big) = p_0(\pi(y)), \\ s^k\big(p_1(\pi(x))\big) = p_1(\pi(y)),\ s^m\big(p_2(\pi(x))\big) = p_2(\pi(y))\Big\} \end{aligned}$$

ha CB-rango $\geqslant 7$, poichè contiene infiniti insiemi disgiunti di CB-rango 6

$$\pi^{-1}(x_{h,k,m,i}) \times \pi^{-1}\big(f_{h,k,m}(x_{h,k,m,i})\big)$$

al variare di $i \in \omega$. Analogamente

$$\begin{aligned} S_{h,k} = \Big\{(x, y)\colon x, y \in P(\bar{M}),\ s^h\big(p_0(\pi(x))\big) = p_0(\pi(y)), \\ s^k\big(p_1(\pi(x))\big) = p_1(\pi(y))\Big\} \end{aligned}$$

ha CB-rango $\geqslant 8$ per ogni scelta di h, k, e

$$S_h = \Big\{(x, y)\colon\ x, y \in P(\bar{M}),\ s^h\big(p_0(\pi(x))\big) = p_0(\pi(y))\Big\}$$

ha CB-rango $\geqslant 9$ per ogni h. Segue che CB-rango $B_2(\bar{M}) \geqslant 10$, così che $B_2(M) \not\simeq B_2(\bar{M})$.

3. La funzione f_T.

Sia T una teoria $b - \aleph_0$-categorica, allora possiamo associare a T una applicazione f_T definita in $\omega - \{0\}$ e tale che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = \text{tipo di isomorfismo di } B_n(M)$$

(dove M è un qualunque modello contabile di T).

Il problema che vogliamo affrontare in questo paragrafo è la classificazione delle possibili funzioni f_T.

TEOREMA 1. Per ogni algebra di Boole contabile atomica B, esiste una teoria T $b - \aleph_0$-categorica tale che $f_T(1) =$ tipo di isomorfismo di B.

DIMOSTRAZIONE. Sia B un'algebra di Boole contabile atomica; in un linguaggio L con una relazione 1-aria P_e per ogni $e \in B$ ed una costante a per ogni atomo a di B, consideriamo la teoria T con i seguenti assiomi: per ogni scelta di e, $f \in B$, $a \in \mathrm{At}\, B$,

$$\forall v\big(P_{e \wedge f}(v) \leftrightarrow P_e(v) \wedge P_f(v)\big)$$
$$\forall v\big(P_{e^*}(v) \leftrightarrow \neg P_e(v)\big)$$
$$\forall v\big(P_a(v) \leftrightarrow v = a\big)\,.$$

Si ha che T è completa ed ammette la eliminazione dei quantificatori in L; inoltre T è superstabile, T non è $\aleph_0$-categorica, e, per ogni modello contabile M di T, $B_1(M) \simeq B$ (cfr. [MT]).

Allora basta provare che T è $b - \aleph_0$-categorica (in tal caso, infatti, $f_1(T) =$ tipo di isomorfismo di B). Siano M, N modelli contabili di T, dimostriamo che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $B_n(M) \simeq B_n(N)$. Procediamo per induzione su n.

Si è già visto che la tesi è soddisfatta quando $n = 1$.

Sia allora $n > 1$. Si fissi anzitutto un isomorfismo f di $B_1(M)$ su $B_1(N)$ (un tale f esiste per quanto già osservato). Siccome T ha la eliminazione dei quantificatori in L, ogni elemento di $B_n(M)$ è combinazione booleana di elementi della forma

$$\{x \in M^n \colon x_i \in P_e(M)\}$$
$$\{x \in M^n \colon x_i = m\}$$

$\big($con $e \in B$, $m \in M$, $i < n$ $\big(x = (x_0, \ldots, x_{n-1})\big)\big)$, oppure della forma

$$\{x \in M^n \colon x_i = x_j\}$$

(con $i < j < n$). Altrettanto vale per $B_n(N)$. Si ponga, $\forall i < j < n$,

$$a_{ij} = \{x \in M^n \colon x_i = x_j\} ,$$
$$b_{ij} = \{x \in N^n \colon x_i = x_j\} ;$$

si fissino poi due enumerazioni degli ulteriori generatori di $B_n(M)$, $B_n(N)$

$$a_0, a_1, \ldots, a_h, \ldots$$
$$b_0, b_1, \ldots, b_h, \ldots$$

$(h \in \omega)$ rispettivamente. Definiamo, per ogni $h \in \omega$,

A_h sottoalgebra finita di $B_n(M)$,

B_h sottoalgebra finita di $B_n(N)$,

φ_h isomorfismo di A_h su B_h

in modo tale che:

1) se $h, k \in \omega$ e $h < k$, allora A_h è sottoalgebra di A_k, B_h è sottoalgebra di B_k, $\varphi_h \subseteq \varphi_k$;

2) se $i < j < n$, allora $a_{ij} \in A_0$, $b_{ij} \in B_0$, $\varphi_0(a_{ij}) = b_{ij}$;

3) se $h \in \omega$ e $h = 2m + 1$, allora, per ogni $s \leqslant m$, $a_s \in A_h$;

4) se $h \in \omega$ e $h = 2m + 2$, allora, per ogni $s \leqslant m$, $b_s \in B_h$;

5) se $h \in \omega$ e $a \in A_h$ è della forma $\{x \in M^n \colon x_i \in X\}$ con $X \in B_1(M)$, allora $\varphi_h(a) = \{x \in N^n \colon x_i \in f(X)\}$, e viceversa

$\big($allora $B_n(M) = \bigcup_{h \in \omega} A_h$, $B_n(N) = \bigcup_{h \in \omega} B_h$, e $\varphi = \bigcup_{h \in \omega} \varphi_h$ è un isomorfismo di $B_n(M)$ su $B_n(N)\big)$.

$h = 0$: si pone

$$A_0 = (a_{ij} \colon i < j < n) , \qquad B_0 = (b_{ij} \colon i < j < n) , \qquad \varphi_0(a_{ij}) = b_{ij} .$$

$h = 2m + 1$: se $a_m \in A_{2m}$, si pone

$$A_h = A_{2m}, \qquad B_h = B_{2m}, \qquad \varphi_h = \varphi_{2m};$$

se $a_m \notin A_{2m}$, si procede nel modo che segue. Sia

$$a_m = \{x \in M^n\colon x_i \in X_i\}$$

per un opportuno $X_i \in B_1(M)$, e si ponga

$$b'_m = \{x \in N^n\colon x_i \in f(X_i)\}.$$

Definiamo $A_h = (A_{2m}, a_m)$, $B_h = (B_{2m}, b'_m)$, $\varphi_h(a_m) = b'_m$. Allora A_h è una sottoalgebra finita di $B_n(M)$, e B_h è una sottoalgebra finita di $B_n(N)$. Inoltre la condizione $\varphi_h(a_m) = b'_m$ definisce uno ed un solo isomorfismo φ_h di A_h su B_h che sia estensione di φ_{2m}. A questo proposito, infatti, si ha:

a) $a_m \notin A_{2m}$;

b) $b'_m \notin B_{2m}$ (altrimenti, per 5, $\varphi_{2m}^{-1}(b'_m) = a_m$ appartiene ad A_{2m}).

È dunque sufficiente provare che, per ogni $s \in A_{2m}$,

a) $s \subseteq a_m$ se e solo se $\varphi_{2m}(s) \subseteq b'_m$,

b) $s \subseteq a_m^*$ se e solo se $\varphi_{2m}(s) \subseteq b'^*_m$.

Dimostrazione di *a*). Se $s = 0$, la tesi è ovvia. Sia $s \neq 0$, allora s si può decomporre in A_{2m} nella unione

$$s = \bigcup_{j \leqslant t} s_j$$

dove, per ogni $j \leqslant t$, $s_j \neq 0$ e

$$s_j = s_{j(0)} \cap \ldots \cap s_{j(n-1)} \cap \bigcup_{h<k<n} a_{hk}^{\varepsilon(j,h,k)}$$

e, per ogni $h < n$, $s_{j(h)} = \{x \in M^n\colon x_h \in Y_{j(h)}\}$ per un opportuno elemento $Y_{j(h)}$ di $B_1(M)$, mentre, per ogni scelta di h, k con $h < k < n$, $\varepsilon(j, h, k) \in \in \{0, 1\}$ e

$$a_{hk}^{\varepsilon(j,h,k)} = \begin{cases} a_{hk} & \text{se } \varepsilon(j,h,k) = 1 \\ a_{hk}^* & \text{se } \varepsilon(j,h,k) = 0 \end{cases}$$

(senza perdita di generalità si può assumere che, per ogni scelta di h, k con $h < k < n$, a_{hk} o a^*_{hk} occorra in s_j). Si noti che, di conseguenza

$$\varphi_{2m}(s) = \bigcup_{j \leqslant t} \varphi_{2m}(s_j)$$

$$\varphi_{2m}(s_j) = \varphi_{2m}(s_{j(0)}) \cap \ldots \cap \varphi_{2m}(s_{j(n-1)}) \cap \bigcup_{h<k<n} b_{hk}^{\varepsilon(j,h,k)}$$

dove, per 5, per ogni $h < n$, $\varphi_{2m}(s_{j(h)}) = \{x \in N^n \colon x_h \in f(Y_{j(h)})\}$.

Vogliamo adesso provare che

$$s \subseteq a_m$$

se e solo se, per ogni $j \leqslant t$, X_i contiene

$$Z_{ji} = Y_{j(i)} \cap \bigcap_{h \in H} Y_h \cap$$
$$\cap \bigcap_{p \leqslant d} \bigcap_{\substack{h_{01},\ldots,h_{0q_0} \in \mathcal{O}_{d_0},\ldots,h_{p1},\ldots,h_{pq_p} \in \mathcal{O}_{d_p} \\ d_0 \neq \ldots \neq d_p, \left| \bigcup_{r \leqslant p} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant q_r} Y_{h_{rl}} \right| = p+1}} \Big(M - \bigcup_{r \leqslant p} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant q_r} Y_{h_{rl}}\Big)$$

dove $h \in H$ se e solo se $h < n$ e $h < j(i)$ e $\varepsilon(j, h, j(i)) = 1$ oppure $j(i) < h$ e $\varepsilon(j, j(i), h) = 1$; si considera poi in $n - (H \cup \{j(i)\}$ la relazione di equivalenza $\sim$ così definita: se h, $k \in n - (H \cup \{j(i)\})$

$$h \sim k \quad \text{se e solo se} \quad h = k$$

o

$$h < k \quad \text{e} \quad \varepsilon(j, h, k) = 1$$

o

$$h > k \quad \text{e} \quad \varepsilon(j, k, h) = 1\,;$$

si indicano con $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_d$ le relative classi di equivalenza (orbite).

($\Leftarrow$) Siano $j \leqslant t$, $x \in s_j$, allora $x_i \in Z_{ji}$, dunque $x_i \in X_i$ e $x \in a_m$. Segue $s_j \subseteq a_m$ per ogni $j \leqslant t$, e dunque $s \subseteq a_m$.

($\Rightarrow$) Siano $j \leqslant t$, $z \in Z_{ji}$; costruiamo $y \in s_j$ nel modo che segue. Si pone, per $h < n$,

a) se $h = j(i)$, $y_h = z$;

b) se $h \in H$, $y_h = z$;

c) sia $h \in n - (H \cup \{j(i)\})$. Si noti anzitutto che, per ogni $p \leqslant d$ e per ogni scelta di h, $k \in \mathcal{O}_p$, deve essere $y_h = y_k$. Sia ora $h \in \mathcal{O}_0$. Distinguiamo due casi.

1) Se $|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h| = 1$ e c è l'elemento di $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h$, si pone $y_h = c_0 = c$ (infatti $c \neq z$);

2) se $|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h| > 1$, si pone $y_h = c_0 =$ elemento in $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_0} Y_h - \{z\}$.

Sia ora $h \in n - (H \cup \{j(i)\})$, $h \in \mathcal{O}_r$; se $|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h| = k$ con $1 \leqslant k \leqslant r + 1$, si distinguono i seguenti casi:

1) se esiste $c \in \bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h - \{z, c_0, \ldots, c_{r-1}\}$, si pone $y_h = c_r = c$;

2) se $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \subseteq \{c_0, \ldots, c_{r-1}\}$ (e $k < r + 1$), si può anzitutto supporre $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h = \{c_0, \ldots, c_{k-1}\}$, e cambiare di conseguenza l'elemento scelto in qualche $\mathcal{O}_q$ ($q < k$), come è possibile poichè altrimenti

$$\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h = \{c_0, \ldots, c_{k-1}\}$$

(assurdo perchè $s_j \neq 0$), oppure

$$\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h = \{z, c_0, \ldots, c_{k-1}\}$$

(assurdo per la definizione di Z_{ji});

3) se $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \subseteq \{z, c_0, \ldots, c_{r-1}\}$ e contiene z, ad esempio se $\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h = \{z, c_0, \ldots, c_{k-2}\}$, si cambia l'elemento scelto in qualche $\mathcal{O}_q$ (con $q < k - 1$), come è possibile poichè altrimenti

$$|\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k-1} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h| < k$$

(assurdo perchè $s_j \neq 0$), oppure

$$\bigcap_{h \in \mathcal{O}_r} Y_h \cup \bigcup_{q<k-1} \bigcap_{h \in \mathcal{O}_q} Y_h = \{z, c_0, \ldots, c_{k-2}\}$$

(assurdo per la definizione di Z_{ji}).

Se poi $|\bigcap_{h \in O_r} Y_h| > r + 1$, si sceglie $y_h = c_r \notin \{z, c_0, \ldots, c_{r-1}\}$, come è evidentemente possibile.

Si costruisce in tale modo y; è chiaro dalla definizione di s_j che $y \in s_j$. Siccome $s \subseteq a_m$, segue che $y \in a_m$, e quindi $z \in X_i$. Concludendo, $X_i \supseteq Z_{ji}$.

Terminiamo allora la dimostrazione di a). Si ha che $s \subseteq a_m$ se e solo se, per ogni $j \leqslant t$, $Z_{ji} \subseteq X_i$; ma è facile vedere che questo equivale a chiedere che, per ogni $j \leqslant t$, $f(Z_{ji}) \subseteq f(X_i)$, e cioè che $\varphi_{2m}(s) \subseteq b'_m$.

In modo analogo si prova b).

È relativamente semplice dimostrare, infine, che 1, 2, 3, 4 e 5 sono soddisfatte.

$h = 2m + 2$: si procede allo stesso modo, a partire da B_{2m+1} e da b_m. $\square$

Passiamo ora al secondo passo della nostra analisi, e cioè allo studio dei possibili insiemi

$$\{f_T(n) \colon n \in \omega - \{0\}\}$$

in funzione di $f_T(1)$, al variare di T tra le teorie $b - \aleph_0$-categoriche. Consideriamo da prima il caso T ω-stabile (la situazione ne risulta semplificata poichè, fissato un modello contabile M di T, si ha che l'algebra di Boole $B_n(M)$ è superatomica, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, così che il tipo di isomorfismo di $B_n(M)$ è dato dal CB-tipo di $B_n(M)$; confonderemo d'ora in poi, per semplicità, il tipo di isomorfismo di un'algebra di Boole contabile superatomica con il suo CB-tipo). Si può osservare che, se si fissa un'algebra di Boole contabile superatomica B di CB-tipo (α, d) e si considera la teoria T $b - \aleph_0$-categorica (e ω-stabile) associata a B nel Teorema 1, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = (\alpha n, d^n)\,.$$

È dunque ragionevole chiedersi se, in generale, per ogni teoria T $b - \aleph_0$-categorica ω-stabile soddisfacente $f_T(1) = (\alpha, d)$, si abbia, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = (\alpha n, d^n)\,.$$

PROPOSIZIONE 3. Se T è una teoria $b - \aleph_0$-categorica ω-stabile e $f_T(1) = (\alpha, d)$, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) \geqslant (\alpha n, d^n)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia M modello contabile saturato di T; per ogni $X_0, \dots, X_{n-1} \in B_1(M)$, sia $X = \{x \in M^n : \forall i < n, x_i \in X_i\}$. Allora $X \in B_n(M)$; è facile poi provare che

$$CB\text{-rango } X \geqslant \underset{i<n}{(+)}\, CB\text{-rango } X_i$$

(si procede per induzione su $\underset{i<n}{(+)}$ CB-rango X_i). Siano ora $X_0, \dots, X_{d-1} \in B_1(M)$ a 2 a 2 disgiunti, di CB-rango α (e CB-grado 1). Per ogni $\sigma \in d^n$, posto

$$X_\sigma = \{x \in M^n : \forall i < n, x_i \in X_{\sigma(i)}\},$$

si ha CB-rango $X_\sigma \geqslant \alpha n$. Se esiste $\sigma \in d^n$ tale the CB-rango $X_\sigma > \alpha n$, allora CB-rango $B_n(M) > \alpha n$; se per ogni $\sigma \in d^n$ CB-rango $X_\sigma = \alpha n$, ricordando che

1) se σ, $\tau \in d^n$ e $\sigma \neq \tau$, allora $X_\sigma \cap X_\tau = \emptyset$,

2) $M^n = \bigcup_{\sigma \in d^n} X_\sigma$,

si ha CB-grado $B_n(M) \geqslant d^n$. In ogni caso, $f_T(n) \geqslant (\alpha n, d^n)$. □

La seguente proposizione si prova usando essenzialmente le stesse idee del Lemma 8 in [L]. Tuttavia, mi sembra opportuno darne una dimostrazione completa, considerando che lo sviluppo di tale dimostrazione presenta comunque alcune differenze, se non altro di impostazione, e parzialmente anche di sostanza, rispetto a quello in [L], per evitare dunque una esposizione troppo frammentaria e discontinua.

PROPOSIZIONE 4. Se T è una teoria categorica ω-stabile e $f_T(1) = (\alpha, d)$, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$f_T(n) = (\alpha n, d^n).$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto $\alpha < \omega$ (questo segue da [B] per il caso $\aleph_1$-categorico, da [CHL] per il caso $\aleph_0$-categorico ω-stabile). Sia M modello contabile saturato di T (così che, per i definibili di M, l'analisi di Morley coincide con quella di Cantor-Bendixson); in particolare, per ogni formula $\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ a parametri in M e per ogni $\beta < \omega$, esiste $\theta(\overline{w})$ formula ancora a parametri in M tale che, per ogni $\overline{b} \in M$,

$$CB\text{-rango } \varphi(M^n, \overline{b}) < \beta \quad \text{se e solo se } M \models \theta(\overline{b})$$

(dove n è la lunghezza di $\overline{v}$; questo segue da [B] nel caso $\aleph_1$-categorico, ed è una semplice conseguenza del teorema di Ryll-Nardzewski nel caso $\aleph_0$-categorico ω-stabile).

Si vuole provare che, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, CB-tipo $B_n(M) = (\alpha n, d^n)$. Si procede per induzione su n.

$n = 1$: è l'ipotesi.

$n \Rightarrow n+1$: per ogni formula $\psi(v, \overline{w})$ a parametri in M (e al più $n+1$ variabili libere), sia $\psi'(v)$: $\exists \overline{w} \psi(v, \overline{w})$. Proviamo che, comunque si scelgono β, $\gamma < \omega$ e la formula $\psi(v, \overline{w})$ (con $\psi(M^{n+1}) \neq \emptyset$), se

a) CB-rango $\psi'(M) \leqslant \gamma$,

b) CB-rango $\psi(a, M^n) \leqslant \beta$ per ogni $a \in \psi'(M)$,

allora CB-rango $\psi(M^{n+1}) \leqslant \gamma (+) \beta$. Si procede per induzione su $\gamma(+)\beta$. Il caso $\gamma(+)\beta = 0$ è ovvio; supponiamo la tesi soddisfatta per ogni scelta di γ', β' con $\gamma'(+)\beta' < \gamma(+)\beta$, e proviamola per $\gamma(+)\beta$. Si verifica facilmente che, senza perdita di generalità, si può supporre:

1) CB-rango $\psi'(M) = \gamma$;

2) CB-grado $\psi'(M) = 1$.

Sia $\theta(v)$ tale che, per ogni $a \in \psi'(M)$,

$$CB\text{-rango } \psi(a, M^n) < \beta \quad \text{se e solo se} \quad M \models \theta(a) ,$$

e si ponga

$$\psi_0(v, \overline{w}) : \psi(v, \overline{w}) \wedge \theta(v) , \qquad \psi_1(v, \overline{w}) : \psi(v, \overline{w}) \wedge \neg \theta(v) .$$

1° *caso*: CB-rango $\psi_0'(M) = \gamma$ (così che CB-rango $\psi_1'(M) < \gamma$ per 2). Si ha che, per ogni $a \in \psi_0'(M)$, CB-rango $\psi_0(a, M^n) < \beta$, dunque esiste $\beta' < \beta$ tale che, per ogni $a \in \psi_0'(M)$, CB-rango $\psi_0(a, M^n) \leqslant \beta'$ (si ricordi che $\beta < \omega$); allora $\gamma(+)\beta' < \gamma(+)\beta$ e dunque CB-rango $\psi_0(M^{n+1}) \leqslant \gamma(+)\beta' < \gamma(+)\beta$. D'altra parte, se $\psi_1'(M) \neq \emptyset$ (ovvero se $\psi_1(M^{n+1}) \neq \emptyset$), CB-rango $\psi_1'(M) = \gamma' < \gamma$; come sopra si deduce allora che CB-rango $\psi_1(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$, così che CB-rango $\psi(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$.

2° *caso*: CB-rango $\psi_0'(M) < \gamma$ (così che CB-rango $\psi_1'(M) = \gamma$). Allora, se $\psi_0'(M) \neq \emptyset$, ovvero se $\psi_0(M^{n+1}) \neq \emptyset$, CB-rango $\psi_0(M^{n+1}) < < \gamma(+)\beta$. D'altra parte, per ogni $a \in \psi_1'(M)$, si ha CB-rango $\psi_1(a, M^n) = \beta$. Sia

$$m = \max\{CB\text{-grado } \psi_1(a, M^n) : a \in \psi_1'(M)\}$$

(m esiste per la categoricità di T: si usi [B] o Ryll-Nardzewski). Allora, per ogni partizione $\varphi_0(v, \overline{w}), \ldots, \varphi_m(v, \overline{w})$ di $\psi_1(v, \overline{w})$ con $\varphi_j(M^{n+1}) \neq \emptyset$ per ogni $j \leqslant m$, per ogni $a \in \psi_1'(M)$, esiste $j \leqslant m$ tale che CB-rango $\varphi_j(a, M^n) < \beta$. Sia $j \leqslant m$ tale che

$$\{a \in \psi_1'(M) : CB\text{-rango } \varphi_j(a, M^n) < \beta\}$$

(insieme definibile) ha CB-rango γ. Allora:

A) se CB-rango $\varphi_j'(M) < \gamma$, segue al solito modo che CB-rango $\varphi_j(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$;

B) se CB-rango $\varphi_j'(M) = \gamma$, allora CB-grado $\varphi_j'(M) = 1$, e, per ogni $a \in \varphi_j'(M)$, CB-rango $\varphi_j(a, M^n) \leqslant \beta$. Di più è facile dedurre che $\{a \in \varphi_j'(M) : CB\text{-rango } \varphi_j(a, M^n) < \beta\}$ ha CB-rango γ. Segue da quanto osservato nel 1° caso che CB-rango $\varphi_j(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$. Allora, per ogni partizione $\varphi_0(v, \overline{w}), \ldots, \varphi_m(v, \overline{w})$ di $\psi_1(v, \overline{w})$, esiste $j \leqslant m$ tale che CB-rango $\varphi_j(M^{n+1}) < \gamma(+)\beta$. Ancora ne risulta CB-rango $\psi_1(M^{n+1}) \leqslant \leqslant \gamma(+)\beta$ e dunque CB-rango $\psi(M^{n+1}) \leqslant \gamma(+)\beta$.

Siano ora $\varphi_0(\overline{w}), \ldots, \varphi_{d^n-1}(\overline{w})$, $\theta_0(v), \ldots, \theta_{d-1}(v)$ formule a 2 a 2 disgiunte di CB-tipo $(\alpha n, 1)$ in $B_n(M)$, $(\alpha, 1)$ in $B_1(M)$ rispettivamente. Si ponga, per ogni $i < d^n$ e per ogni $j < d$,

$$\psi_{ij}(v, \overline{w}) : \varphi_i(\overline{w}) \wedge \theta_j(v) ;$$

allora, per ogni $i < d^n$, $j < d$,

$$CB\text{-rango } \psi_{ij}(v, \overline{w}) \leqslant \alpha n(+)\alpha = \alpha(n + 1) .$$

Se vale $=$, siccome $\psi_{ij}'(M) = \theta_j(M)$ ha CB-tipo $(\alpha, 1)$, e, per ogni $a \in \theta_j(M)$, $\psi_{ij}(a, M^n) = \varphi_i(M^n)$ ha CB-tipo $(\alpha n, 1)$, si può procedere come nel 2° caso ($m = 1$), e dedurre che CB-grado $\psi_{ij}(M^{n+1}) = 1$.

Segue

$$CB\text{-tipo } B_{n+1}(M) \leqslant (\alpha(n+1), d^{n+1})$$

il che, unito con la proposizione 3, assicura la verità della tesi. $\square$

Ricapitolando, se T è una teoria $b - \aleph_0$-categorica e ω-stabile e $f_T(1) = (\alpha, d)$, allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$, $f_T(n) \geqslant (\alpha n, d^n)$. Inoltre, $=$ vale per T categorica. Purtroppo però non è detto che $=$ valga in generale. Ecco un controesempio.

Si procede come nel § 2, e si costruisce una struttura M a due piani $P(M)$, $Q(M)$ nel modo che segue.

1) Il piano inferiore $Q(M)$ ha dominio $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^2$, due relazioni 1-arie U, V per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^2$ rispettivamente, l'operazione s di successore in $\mathbb{Z}$, le proiezioni p_0, p_1 di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{Z}$, e le costanti per ogni elemento di $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}^2$; è facile vedere che la relativa teoria è $\aleph_1$-categorica di rango di Morley 2 e grado di Morley 1. Come nel § 2, poi, si definisce un sottoinsieme X di $V(Q(M))$ tale che, per ogni modello N della teoria di $Q(M)$ e per ogni definibile S di N di CB-rango $\leqslant 1$, $S \cap X$ è finito.

2) È data una proiezione π del piano superiore $P(M)$ su $V(Q(M))$.

3) Per ogni $x \in V(Q(M)) - X$, $\pi^{-1}(x)$ è un insieme infinito (senza ulteriore struttura); per ogni $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ è una struttura ω-stabile $\aleph_0$-categorica di CB-tipo $(2, 1)$ (questo si può ottenere aggiungendo al linguaggio, per ogni $x \in X$, una relazione di equivalenza E_x che ha in $\pi^{-1}(x)$ infinite classi, tutte di cardinalità infinita, ed è banale fuor. di $\pi^{-1}(x)$).

Procedendo come nel § 2, si vede che la teoria T di M è ω-stabile e che, inoltre, per ogni modello contabile N di T, CB-tipo $B_1(N) = (3, 1)$, mentre CB-rango $B_2(N) \geqslant 7$. Aggiungiamo al linguaggio di T infinite costanti, e a T gli assiomi per dire che le interpretazioni di tali costanti soddisfano U, e sono indipendenti rispetto a s; siano L', T' il linguaggio e la teoria così ottenuti. Si ha ancora evidentemente che T' è ω-stabile e che, per ogni modello contabile M' di T', CB-tipo $B_1(M') = (3, 1)$ mentre CB-rango $B_2(M') \geqslant 7$ Inoltre T' è $b - \aleph_0$-categorica: siano infatti M', N' modelli contabili di T', allora non c'è da aspettarsi che $M' \simeq N'$ (T' non è certo $\aleph_0$-categorica), tuttavia $M' \restriction_L \simeq N' \restriction_L$ (dimenticando le nuove costanti, $M' \restriction_L$ e $N' \restriction_L$ contengono semplicemente infinite copie di $\mathbb{Z}$ oltre quella con le proiezioni di X; inoltre, per ogni $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ ha una teoria $\aleph_0$-categorica);

allora, per ogni $n \in \omega - \{0\}$,

$$B_n(M' \upharpoonright_L) \simeq B_n(N' \upharpoonright_L) \; ;$$

ma $B_n(M' \upharpoonright_L) = B_n(M')$, $B_n(N' \upharpoonright_L) = B_n(N')$, dunque $B_n(M') \simeq B_n(N')$. Dato che $f_{T'}(1) = (3, 1)$, ma $f_{T'}(2) \neq (6, 1)$, T' è il controesempio cercato.

BIBLIOGRAFIA

[B] J. BALDWIN, *α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T*, Trans. Amer. Math. Soc., **181** (1973), pp. 37-51.

[CHL] G. CHERLIN - L. HARRINGTON - A. LACHLAN, *$\aleph_0$-categorical $\aleph_0$-stable structures*, Ann. Pure Appl. Logic, **28** (1985), pp. 103-135.

[K] J. KETONEN, *The structure of countable Boolean algebras*, Ann. Math., **108** (1978), pp. 41-89.

[L] A. LACHLAN, *Singular properties of Morley rank*, Fund. Math., **108** (1980), pp. 145-157.

[MM] P. MANGANI - A. MARCJA, *$\aleph_1$-Boolean spectrum and stability*, Atti Accad. Naz. Lincei, **72** (1982), pp. 269-272.

[MT] A. MARCJA - C. TOFFALORI, *On pseudo-$\aleph_0$-categorical theories*, Zeitschr. f. Math. Logik, **30** (1984), pp. 533-540.

[ST] C. STEINHORN - C. TOFFALORI, *Boolean spectra of strongly o-minimal theories*, preprint.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 giugno 1986.