RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO SESTINI
DEMORE QUILGHINI

Un problema bifase, unidimensionale piano, inverso di quello di Stefan

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 93-107
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__93_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Un problema bifase, unidimensionale piano, inverso di quello di Stefan.

GIORGIO SESTINI - DEMORE QUILGHINI (*)

SUMMARY - An inverse Stefan-like problem is studied at the hypothesis that the critical temperature is a function of the time by the position and by the rate of the change of the state. This condition implies that the problem is two-phase problem and so it is indefinite. Another equation is written to define the problem. The solution of the problem has brought back to particular integral equation.

1. Introduzione.

Sia C la classe delle funzioni continue e $C_L^{2,1} \subset C$ quella delle funzioni $W(\mu, t)$ uniformemente limitate nel loro dominio di definizione $\mathfrak{D}$, ivi derivabili almeno due volte rispetto a μ ed una rispetto a t, con derivate continue, quindi limitate in ogni chiuso $\mathcal{C} \subset \mathfrak{D}$. Siano date le

(*) Indirizzo degli AA.: Prof. Giorgio SESTINI: Istituto Matematico « U. Dini », Università - Viale Morgagni 67/A - 50134 Firenze; Prof. Demore QUILGHINI: Istituto di Matematica Applicata « G. Sansone », Facoltà di Ingegneria, Università - Via S. Marta 3 - 50139 Firenze.

Il lavoro ha origine da una idea di G. Sestini ed è stato tecnicamente elaborato da D. Quilghini con suggerimenti e la revisione di G. Sestini.

funzioni:

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} e(t) \in C[0, t_0], \text{ derivabile: } \dot{e}(t) \in O(0, t_0), \text{ crescente: } e(0) = 0, \\ e(t_0) = \mu_0,: \exists \lim\limits_{t \to 0} e(t) t^{-\frac{1}{2}} = K < \infty, \\ \theta(t) = \theta\big(e(t), \dot{e}(t)\big) \in C(0, t_0]: \lim\limits_{t \to 0} \theta(t) = 0, \\ f(\mu) \in C[0, \mu_0]. \end{cases}
$$

Posto $L_D = D(\partial^2/\partial\mu^2) - \partial/\partial t$, $D = k\varrho/c$, il sistema

$$
(1.2)\qquad L_{D_\alpha} v(\mu, t) = 0, \quad \in \mathfrak{D}_\alpha \equiv \{(\mu, t): 0 < \mu < e(t), 0 < t < t_0\}, \quad \left(D_\alpha = \frac{k_\alpha \varrho_\alpha}{c_\alpha}\right),
$$

$$
(1.3)\qquad L_{D_\beta} v(\mu, t) = 0, \quad \in \mathfrak{D}_\beta \equiv \{(\mu, t): e(t) < \mu < \mu_0, \ 0 < t < t_0\}, \quad \left(D_\beta = \frac{k_\beta \varrho_\beta}{c_\beta}\right),
$$

$$
(1.4)\qquad k_\alpha \varrho_\alpha \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu} - k_\beta \varrho_\beta \lim_{\mu \to e(t)+} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu} = L\dot{e}(t), \quad \in (0, t_0), \ L = \text{cost} > 0,
$$

$$
(1.5)\qquad v\big(e(t), t\big) = \theta(t), \quad \in (0, t_0),
$$

$$
(1.6)\qquad \lim_{t \to 0} v(\mu, t) = f(\mu), \quad \in (0, \mu_0)
$$

nell'incognita $v(\mu, t) \in C_L^{2,1}$ separatamente in $\mathfrak{D}_\alpha$ ed in $\mathfrak{D}_\beta$ e tale che esistono continui per $t \in [0, t_0]$:

$$
(1.7)\qquad \lim_{\mu \to 0} v(\mu, t), \quad \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu},
$$

traduce, con riferimento alla coordinata materiale μ [9] (1), § § 1 e 2, (cfr. ivi anche per il significato delle costanti positive k, ϱ, c ed L), un problema bifase, unidimensionale piano, inverso di quello di Stefan in uno strato materiale S di spessore μ_0, quando il processo viene con-

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

trollato tramite la temperatura sul piano $\mu = 0$ ed il flusso dal piano $\mu = \mu_0$.

Volendo controllare il processo mediante altre grandezze termiche sui piani che limitano S le (1.7) devono essere sostituite con le analoghe ipotesi su tali grandezze. Peraltro, salvo usare espressioni formalmente diverse per esprimere $v(\mu, t)$, il problema analitico è identico (cfr. teorema 3).

L'ipotesi che la temperatura $\theta(t)$ alla quale si forma la fase α sul fronte $\mu = e(t)$, avanzando sulla fase preesistente β, sia variabile nel tempo esclude a priori che risulti $v(\mu, t) = \text{cost} \in \mathfrak{D}_\beta$ e perciò il problema è necessariamente bifase, anche per $f(\mu) = \text{cost}$. Ciò implica (cfr. teorema 3) che il problema (1.2)-(1.7), consistente nel determinare i limiti (1.7) e quindi $v(\mu, t)$, è indeterminato, cioè l'assegnato cambiamento di stato con la legge $\mu = e(t)$ può essere realizzato con diverse distribuzioni della temperatura in S, questo a causa dell'indeterminatezza della ripartizione tra le due fasi del calore latente $L\dot{e}(t)$. Si rende quindi necessaria una ulteriore condizione dettata da considerazioni di carattere fisico o fisico-tecnico. In questo lavoro studieremo il caso in cui

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu} = 0 , \qquad t \in (0, t_0) , \tag{1.8}$$

corrispondente, ad esempio, all'ipotesi che il cambiamento di stato si realizzi, di fatto, in uno strato materiale $2S$ di spessore $2\mu_0$ in condizioni simmetriche rispetto al piano $\mu = \mu_0$. Al posto della (1.8) può essere data una diversa condizione, purchè compatibile con le (1.7).

Come si verifica immediatamente (cfr. anche [10]) il problema (1.2)-(1.8) può essere ricondotto, una volta determinata la ripartizione del calore $L\dot{e}(t)$ tra le due fasi in guisa da soddisfare la (1.4), a due distinti problemi parabolici (per $\mu < e(t)$ e per $e(t) < \mu$) nota la temperatura ed il flusso sul piano $\mu = e(t)$. Tale metodo, pur assicurando l'esistenza e l'unicità, sotto opportune ipotesi, porta alla ricerca delle soluzioni di due problemi *non ben posti* nel senso di Hadamard, a meno di poter imporre alcune limitazioni a priori sulle soluzioni [7].

Per una esposizione dei problemi inversi di quello di Stefan ed una abbondante bibliografia cfr. [5].

In questo lavoro ridurremo il problema (1.2)-(1.8) alla ricerca delle soluzioni di una particolare equazione integrale di Volterra di 1ª specie, irriducibile alla 2ª, ma equivalente ad una identità rispetto a μ facilitandone così lo studio.

2. – Forma delle soluzioni del problema (1.2)-(1.7).

TEOREMA 1. *Nelle ipotesi* (1.1) *per* $e(t)$ *e* $\theta(t)$ *esiste una ed una sola soluzione* $\in C_L^{2,1}$ *in* $\mathfrak{J}_\alpha$ *del problema*:

$$
(2.1)\qquad \begin{cases} L_{D_\alpha} A(\mu, t) = 0\,, & \in \mathfrak{J}_\alpha \equiv \{(\mu, t)\colon e(t) < \mu,\, 0 < t < t_0\}\,, \\ \lim\limits_{\mu\to e(t)} A(\mu, t) = \theta(t)\,, \quad \lim\limits_{\mu\to\infty} A(\mu, t) = 0\,, & t \in (0, t_0)\,, \\ \lim\limits_{t\to 0} A(\mu, t) = 0\,, & 0 < \mu\,. \end{cases}
$$

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo una successione $\{t_i\}$, $0 < \ldots < t_i < < t_{i-1} < \ldots < t_0$, tale che $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 0$ e costruiamo la successione $\{\gamma_i\}$ dove

$$
\gamma_i = \theta(t_i)\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{e(t_i)}{2\sqrt{D_\alpha t_i}}\right)\right)^{-1}, \qquad \left(\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty \exp(-x^2)\, dx\right).
$$

In forza delle (1.1) si ha $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 0$ e perciò, posto

$$
\Gamma_i(\mu, t) = \gamma_i \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{D_\alpha t}}\right), \qquad 0 < \mu,\ 0 < t\,,
$$

si ha uniformemente $\lim\limits_{i\to\infty} \Gamma_i(\mu, t) = 0$. Manifestamente è $\Gamma_i(\mu, t) \in C_L^{2,1}$ in $\mathfrak{J}_\alpha$, soddisfa ivi l'equazione $L_{D_\alpha}\Gamma_i(\mu, t) = 0$ e le condizioni

$$
\lim_{\mu\to e(t)} \Gamma_i = \gamma_i \operatorname{erfc}\left(\frac{e(t)}{2\sqrt{D_\alpha t}}\right), \quad \lim_{\mu\to\infty} \Gamma_i = 0, \quad 0 < t\,, \quad \lim_{t\to 0} \Gamma_i = 0, \quad 0 < \mu\,.
$$

Costruiamo anche la successione di funzioni $\{\theta_i(t)\}$ così definite

$$
\theta_i(t) = \begin{cases} \gamma_i \operatorname{erfc}\left(\dfrac{K}{2\sqrt{D_\alpha}}\right), & t = 0\,,\ (\text{per } K \text{ cfr. le } (1.1))\,, \\[2ex] \gamma_i \operatorname{erfc}\left(\dfrac{e(t)}{2\sqrt{D_\alpha t}}\right), & 0 < t \leqslant t_i\,, \\[2ex] \theta(t)\,, & t_i < t \leqslant t_0\,. \end{cases}
$$

Per le (1.1) e per come sono stati definiti i numeri γ_i è $\theta_i(t) \in C[0, t_0]$ ed inoltre si ha, uniformemente per $t \in [0, t_0]$, $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i(t) = \theta(t)$.

Scelto un valore $m > 1$ si consideri la funzione

$$(2.2) \qquad A^0_{i,m}(\mu, t) = \begin{cases} \Gamma_i(\mu, t)\,, & e(t) < \mu\,, \quad 0 < t \leq \dfrac{t_i}{m}\,, \\ \bar{A}_{i,m}(\mu, t)\,, & e(t) < \mu\,, \quad \dfrac{t_i}{m} < t < t_0\,, \end{cases}$$

dove $\bar{A}_{i,m}(\mu, t)$ è l'unica soluzione $\in C^{2,1}_L$, inoltre a derivate uniformemente limitate ([3], 322-324), del problema

$$L_{D_\alpha} \bar{A}_{i,m}(\mu, t) = 0\,, \qquad \in \left\{(\mu, t)\colon e(t) < \mu, \frac{t_i}{m} < t < t_0\right\},$$

$$\lim_{\mu\to e(t)} \bar{A}_{i,m}(\mu, t) = \theta_i(t)\,, \qquad \lim_{\mu\to\infty} \bar{A}_{i,m}(\mu, t) = 0\,, \qquad t \in \left(\frac{t_i}{m}, t_0\right),$$

$$\lim_{t\to t_i/m} \bar{A}_{i,m}(\mu, t) = \Gamma_i\left(\mu, \frac{t_i}{m}\right), \quad e\left(\frac{t_i}{m}\right) < \mu\,.$$

Dalle (2.2) è $A^0_{i,m}(\mu, t) \in C$ in $\mathfrak{I}_\alpha$ ed è inoltre $\in C^{2,1}_L$ separatamente nei domini $\{(\mu, t)\colon e(t) < \mu,\ 0 < t \leq t_i/m\}$, $\{(\mu, t)\colon e(t) < \mu,\ t_i/m < t < t_0\}$ e in quest'ultimo è anche a derivate uniformemente limitate. In ambedue i domini $A^0_{i,m}(\mu, t)$ soddisfa l'equazione $L_{D_\alpha} A^0_{i,m}(\mu, t) = 0$ e le condizioni

$$\lim_{\mu\to e(t)} A^0_{i,m} = \theta_i(t)\,, \qquad \lim_{\mu\to\infty} A^0_{i,m} = 0\,, \quad 0 < t < t_0\,, \qquad \lim_{t\to 0} A^0_{i,m} = 0\,, \quad 0 < \mu\,.$$

Di più è $A^0_{i,m}(\mu, t) \in C^{2,1}_L$ in $\mathfrak{I}_\alpha$ ed è ivi $L_{D_\alpha} A^0_{i,m}(\mu, t) = 0$; infatti per l'esistenza e l'unicità $\in C^{2,1}_L$ del problema (cfr. loc. cit. in [3])

$$L_{D_\alpha} Z(\mu, t) = 0\,, \qquad \in \left\{(\mu, t)\colon e(t) < \mu, \frac{t_i}{m} < t \leq t_i\right\},$$

$$\lim_{\mu\to e(t)} Z = \theta_i(t)\,, \qquad \lim_{\mu\to\infty} Z = 0\,, \qquad \frac{t_i}{m} < t \leq t_i\,,$$

$$\lim_{t\to t_i/m} Z = \Gamma_i\left(\mu, \frac{t_i}{m}\right), \quad e\left(\frac{t_i}{m}\right) < \mu\,.$$

comunque si scelga $m > 1$, avremo:

$$Z(\mu, t) = \bar{A}_{i,m}(\mu, t) = \Gamma_i(\mu, t)\,, \quad e(t) < \mu\,, \quad \frac{t_i}{m} < t \leqslant t_i\,,$$

e da qui l'asserita proprietà per $A^0_{i,m}(\mu, t)$ in $\mathfrak{J}_\alpha$. Di più $A^0{}_{,m}(\mu, t)$ è indipendente da $m > 1$ di modo che nelle (2.2) si può porre $m = 1$. Così, posto

$$A_i(\mu, t) = A^0_{i,1}(\mu, t) - \Gamma_i(\mu, t)$$

la funzione $A_i(\mu, t)$ è soluzione $\in C^{2,1}_L$ del problema

$$L_{D_\alpha} A_i(\mu, t) \;\; = 0\,, \quad \in \mathfrak{J}_\alpha \equiv \{(\mu, t)\colon e(t) < \mu,\, 0 < t < t_0\}\,,$$

$$\lim_{\mu \to e(t)} A_i(\mu, t) = \theta_i(t) - \Gamma_i\big(e(t), t\big)\,, \qquad \lim_{\mu \to \infty} A_i(\mu, t) = 0\,, \quad 0 < t < t_0\,,$$

$$\lim_{t \to 0} A_i(\mu, t) \;\; = 0\,, \quad 0 < \mu\,,$$

di più $A_i(\mu, t)$ è a derivate uniformemente limitate in $\mathfrak{J}_\alpha$ essendo $A_i(\mu, t) = 0$ per $e(t) < \mu$, $0 \leqslant t \leqslant t_i$. L'unicità della soluzione del problema sopra detto segue poi dal principio di massimo dal quale segue anche che le $A_i(\mu, t)$, $i = 1, 2, \ldots$, sono equiuniformemente limitate in $\mathfrak{J}_\alpha$. Ancora per il principio di massimo e per quanto detto per le successioni $\{\gamma_i\}$ e $\{\theta_i(t)\}$ si ha

$$|A_i(\mu, t) - A_j(\mu, t)| \leqslant |\theta_i(t) - \theta_j(t)| + \operatorname{erfc}\left(\frac{e(t)}{2\sqrt{D_\alpha t}}\right)|\gamma_i - \gamma_j|\,,$$

$$\lim_{i \to \infty}\big(\theta_i(t) - \Gamma_i\big(e(t), t\big)\big) = \theta(t)$$

uniformemente per $t \in [0, t_0]$. Perciò, per il teorema 15 e successivo corollario di [2], 80-81, (cfr. anche [3], 387-388), la successione $A_i(\mu, t)$ converge in $\mathfrak{J}_\alpha$ verso una soluzione $A(\mu, t) \in C^{2,1}_L$ del problema (2.1), l'unicità di tale soluzione segue poi dal principio di massimo ed il teorema è così dimostrato.

In modo analogo si dimostra

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi* (1.1) *per* $e(t)$ *e* $\theta(t)$ *esiste una ed una sola soluzione* $\in C_L^{2,1}$ *in* $\mathfrak{J}_\beta$ *del problema*:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} L_{D_\beta}B(\mu,t) = 0\,, & \in \mathfrak{J}_\beta \equiv \{(\mu,t)\colon \mu< e(t), 0<t<t_0\}\,,\\ \lim\limits_{\mu\to-\infty} B(\mu,t)=0\,, & \lim\limits_{\mu\to e(t)} B(\mu,t)=\theta(t)\,,\quad t\in(0,t_0)\,,\\ \lim\limits_{t\to 0} B(\mu,t) = 0\,, & \mu<0\,. \end{cases}$$

Poniamo adesso

$$K(D,x,\xi,t,\tau) = \big(1/2\sqrt{\pi D(t-\tau)}\big)\exp\big(-(x-\xi)^2/4D(t-\tau)\big)$$

e consideriamo per $t\in(0,t_0]$ le seguenti funzioni:

$$P_\alpha(\mu,t) = \mu\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}K(D_\alpha,\mu,0,t,\tau)\,d\tau\,,\qquad 0<\mu\,,$$

$$Q_\alpha(\mu,t) = \int_0^t \alpha(\tau)\Big(K\big(D_\alpha,\mu,e(\tau),t,\tau\big) - K\big(D_\alpha,\mu,-e(\tau),t,\tau\Big)\,d\tau\,,\qquad 0<\mu\,,$$

$$P_\beta(\mu,t) = 2D_\beta\int_0^t \psi(\tau)K(D_\beta,\mu_0-\mu,0,t,\tau)\,d\tau\,,\qquad \mu<\mu_0\,,$$

$$Q_\beta(\mu,t) = \int_0^t \beta(\tau)\Big(K\big(D_\beta,\mu,e(\tau),t,\tau\big) + K\big(D_\beta,\mu_0-\mu,e(\tau)-\mu_0,t,\tau\big)\Big)\,d\tau\,,\qquad \mu<\mu_0\,,$$

$$I_\beta(\mu,t) = \int_{-\infty}^{\mu_0} F(\eta)\big(K(D_\beta,\mu,\eta,t,0) + K(D_\beta,\mu_0-\mu,\eta-\mu_0,t,0)\big)\,d\eta\,,\qquad \mu<\mu_0\,,$$

dove $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono $\in C[0,t_0]$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono $\in C(0,t_0]$ ed esistono finiti

$$\lim_{t\to0}|\alpha(t)|t^{\frac12}\,,\qquad \lim_{t\to0}|\beta(t)|t^{\frac12}\,,$$

mentre $F(\mu)=0$ per $\mu<0$ e $F(\mu)=f(\mu)$ per $\mu\in[0,\mu_0]$.

Le funzioni $P_\alpha, Q_\alpha, P_\beta, Q_\beta$ ed I_β soddisfano l'equazione del calore, appartengono a $C_L^{2,1}$ nei loro domini di definizione salvo Q_α e Q_β per $\mu = e(t)$ avendosi

$$
(2.4) \qquad \begin{cases} k_\alpha \varrho_\alpha \left(\lim\limits_{\mu \to e(t)-} \dfrac{\partial Q_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu} - \lim\limits_{\mu \to e(t)+} \dfrac{\partial Q_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu} \right) = c_\alpha \alpha(t) \,, \\ k_\beta \varrho_\beta \left(\lim\limits_{\mu \to e(t)-} \dfrac{\partial Q_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} - \lim\limits_{\mu \to e(t)+} \dfrac{\partial Q_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} \right) = c_\beta \beta(t) \,, \end{cases}
$$

[3], 320-321 ([1], 293). Si ha inoltre

$$
(2.5) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu \to 0} P_\alpha = \varphi(t) \,, \quad \lim\limits_{\mu \to 0} Q_\alpha = 0 \,, \quad t \in (0, t_0) \,, \\ \lim\limits_{t \to 0} P_\alpha = 0 \,, \quad \lim\limits_{t \to 0} Q_\alpha = 0 \,, \quad 0 < \mu \,, \\ \lim\limits_{\mu \to \mu_0} \dfrac{\partial P_\beta}{\partial \mu} = \psi(t) \,, \quad \lim\limits_{\mu \to \mu_0} \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial \mu} = 0 \,, \quad \lim\limits_{\mu \to \mu_0} \dfrac{\partial I_\beta}{\partial \mu} = 0 \,, \\ \hfill t \in (0, t_0) \,, \\ \lim\limits_{t \to 0} P_\beta = 0 \,, \quad \lim\limits_{t \to 0} Q_\beta = 0 \,, \quad (\mu \neq 0) \,, \quad \lim\limits_{t \to 0} I_\beta = F(\mu) \,, \\ \hfill \mu < \mu_0 \,, \end{cases}
$$

[1], 58, 62, 75, 293.

TEOREMA 3. *Se per* $t \in (0, t_0)$ $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\alpha(t)$ *e* $\beta(t)$ *soddisfano le equazioni*

$$
(2.6) \qquad P_\alpha(e(t), t) + Q_\alpha(e(t), t) = \theta(t),
$$

$$
(2.7) \qquad P_\beta(e(t), t) + Q_\beta(e(t), t) + I_\beta(e(t), t) = \theta(t) \,,
$$

$$
(2.8) \quad c_\alpha \alpha(t) + c_\beta \beta(t) + k_\alpha \varrho_\alpha \lim_{\mu \to e(t)+} \frac{\partial A(\mu, t)}{\partial \mu} - k_\beta \varrho_\beta \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial B(\mu, t)}{\partial \mu} = L\dot{e}(t),
$$

posto

$$
(2.9) \qquad U(\mu, t) = \begin{cases} P_\alpha(\mu, t) + Q_\alpha(\mu, t) \,, & \in \mathfrak{D}_\alpha \,, \\ P_\beta(\mu, t) + Q_\beta(\mu, t) + I_\beta(\mu, t) \,, & \in \mathfrak{D}_\beta \,, \end{cases}
$$

ogni soluzione del problema (1.2)-(1.7) *è della forma*

$$
(2.10) \qquad v(\mu, t) = U(\mu, t) \,, \quad \in \{(\mu, t) \colon 0 < \mu < \mu_0, 0 < t < t_0\} \,.
$$

DIMOSTRAZIONE. Manifestamente $U(\mu, t) \in C_L^{2,1}$ separatamente in $\mathfrak{D}_\alpha$ ed in $\mathfrak{D}_\beta$, soddisfa la (1.2), la (1.3) e, per le (2.5), la (1.6) e le (1.7) nonchè, verificate la (2.6) e la (2.7), soddisfa la (1.5). Inoltre, se è verificata la (2.8), $U(\mu, t)$ soddisfa anche la (1.4). Infatti per i teoremi 1 e 2 è

$$\text{(I)} \quad P_\alpha(\mu, t) + Q_\alpha(\mu, t) = A(\mu, t),$$
$$\in \mathfrak{J}_\alpha \equiv \{(\mu, t)\colon e(t) < \mu,\ 0 < t < t_0\},$$

$$\text{(II)} \quad P_\beta(\mu, t) + Q_\beta(\mu, t) + I_\beta(\mu, t) = B(\mu, t),$$
$$\in \mathfrak{J}_\beta \equiv \{(\mu, t)\colon \mu < e(t),\ 0 < t < t_0\},$$

seguendo la (I) dalla (2.6) e la (II) dalla (2.7).

Dalla (I), ricordando la prima delle (2.4) e la prima delle (2.9), per la continuità di $\partial P_\alpha/\partial\mu$, otteniamo:

$$k_\alpha \varrho_\alpha \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial \mu} = c_\alpha \alpha(t) + k_\alpha \varrho_\alpha \lim_{\mu \to e(t)+} \frac{\partial A(\mu, t)}{\partial \mu}, \tag{2.11}$$

ed analogamente

$$k_\beta \varrho_\beta \lim_{\mu \to e(t)+} \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial \mu} = - c_\beta \beta(t) + k_\beta \varrho_\beta \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial B(\mu, t)}{\partial \mu}. \tag{2.12}$$

Da queste, per differenza, otteniamo appunto che $U(\mu, t)$ verifica la (1.4), perciò e per quanto già provato, $U(\mu, t)$ è soluzione del problema (1.2)-(1.7).

Sia ora $v(\mu, t)$ una soluzione del problema (1.2)-(1.7) e dimostriamo che può porsi nella forma (1.10) costruendo le funzioni $P_\alpha, Q_\alpha, P_\beta, Q_\beta$ ed I_β in guisa da definire la $U(\mu, t)$ mediante le (2.9). La costruzione della I_β è immediata essendo nota $f(\mu)$. Per costruire P_α e P_β basta porre, ricordando le (1.7)

$$\varphi(t) = \lim_{\mu \to 0} v(\mu, t), \qquad \psi(t) = \lim_{\mu \to \mu_0} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu}.$$

Costruite P_α, P_β ed I_β determiniamo $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ tali che

$$\begin{cases} Q_\alpha(e(t), t) = v(e(t), t) - P_\alpha(e(t), t), \\ Q_\beta(e(t), t) = v(e(t), t) - P_\beta(e(t), t) - I_\beta(e(t), t). \end{cases} \tag{2.13}$$

Per la (1.5) e per i teoremi 1 e 2 il sistema (2.13) è equivalente al sistema (I)-(II) ed anche, per l'unicità $\in C_L^{2,1}$ delle soluzioni della equazione del calore, al sistema

$$(\mathrm{I})_1 \quad P_\alpha(\mu, t) + Q_\alpha(\mu, t) = v(\mu, t), \ \in \mathfrak{D}_\alpha,$$

$$(\mathrm{II})_1 \quad P_\beta(\mu, t) + Q_\beta(\mu, t) + I_\beta(\mu, t) = v(\mu, t), \ \in \mathfrak{D}_\beta.$$

Per derivazione rispetto a μ otteniamo dai sistemi (I)-(II) e $(\mathrm{I})_1$-$(\mathrm{II})_1$

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial Q_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{\partial A(\mu, t)}{\partial \mu} - \frac{\partial P_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu}, \quad \in \mathfrak{J}_\alpha,$$

$$(\beta) \qquad \frac{\partial Q_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{\partial B(\mu, t)}{\partial \mu} - \frac{\partial P_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} - \frac{\partial I_\beta(\mu_2 t)}{\partial \mu}, \quad \in \mathfrak{J}_\beta,$$

$$(\alpha)_1 \qquad \frac{\partial Q_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu} - \frac{\partial P_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu}, \quad \in \mathfrak{D}_\alpha,$$

$$(\beta)_1 \qquad \frac{\partial Q_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu} - \frac{\partial P_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} - \frac{\partial I_\beta(\mu, t)}{\partial \mu}, \quad \in \mathfrak{D}_\beta,$$

Da qui, per sottrazione $(\alpha)_1 - (\alpha)$ e $(\beta) - (\beta)_1$, tenuto conto della continuità di $\partial P_\alpha/\partial\mu$, $\partial P_\beta/\partial\mu$ e di $\partial I_\beta/\partial\mu$ attraverso $\mu = e(t)$, segue

$$\alpha(t) = D_\alpha \lim_{\mu\to e(t)-} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu} - D_\alpha \lim_{\mu\to e(t)+} \frac{\partial A(\mu, t)}{\partial \mu}, \qquad \left(D_\alpha = \frac{k_\alpha \varrho_\alpha}{c_\alpha}\right),$$

$$\beta(t) = D_\beta \lim_{\mu\to e(t)-} \frac{\partial B(\mu, t)}{\partial \mu} - D_\beta \lim_{\mu\to e(t)+} \frac{\partial v(\mu, t)}{\partial \mu}, \qquad \left(D_\beta = \frac{k_\beta \varrho_\beta}{c_\beta}\right),$$

cioè la soluzione, unica, del sistema (2.13). È così possibile costruire Q_α e Q_β. Osserviamo che, per la (1.5), le (2.13) equivalgono nell'ordine alla (2.6) ed alla (2.7) mentre, dalle ultime due relazioni scritte segue la (2.8) in forza della (1.4). Il teorema è così dimostrato, potendo costruire la funzione $U(\mu, t)$ mediante le (2.9).

3. – Riduzione del problema (1.2)-(1.8) ad una particolare equazione integrale di Volterra di 1ª specie. Teorema di unicità. Forma della soluzione.

Il teorema 3 mette in evidenza che il problema (1.2)-(1.7) è indeterminato e come occorra aggiungere una ulteriore condizione alle

(2.6), (2.7) e (2.8) per determinare $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. È inoltre evidente che modificando le (1.7), cioè il tipo di condizioni al contorno, si modificano le forme per P_α, P_β, Q_α, Q_β ed I_β, dovendo modificare la funzione di Green, ma la sostanza analitica del teorema 3 resta inalterata.

Dalla (1.8), che è l'ulteriore equazione che qui consideriamo, si ha immediatamente, ricordando la terza linea delle (2.5)

$$\psi(t) \equiv 0$$

e perciò dalla (II), diretta conseguenza della (2.7), otteniamo

$$(3.1) \qquad \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial Q_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} = \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial B(\mu, t)}{\partial \mu} - \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial I_\beta(\mu, t)}{\partial \mu}$$

e quindi [5], 320-321, indicando con $S_\beta(t)$ il secondo membro della (3.1):

$$\beta(t) + 2D_\beta \int_0^t \beta(\tau) \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \Big(K(D_\beta, \mu, e(\tau), t, \tau) + \right.$$
$$\left. + K(D_\beta, \mu_0 - \mu, e(\tau) - \mu_0, t, \tau) \Big) \right)_{\mu = e(t)} d\tau = 2D_\beta S_\beta(t) \,.$$

Quest'ultima è una equazione integrale di Volterra di 2ª specie che ammette, come ben noto ([4], tomo III, 316-320), una ed una sola soluzione. Determinata così $\beta(t)$, dalla (2.8) si esprime $\alpha(t)$ e, in conseguenza, la (2.6) diviene una equazione nella sola incognita $\varphi(t)$. Peraltro la (2.6) è una equazione di Volterra di 1ª specie irriducibile alla 2ª specie; ma per quanto già osservato la (2.6) è equivalente alla (I), quindi $\varphi(t) \in C[0, t]$ è soluzione dell'equazione

$$(3.2) \qquad \frac{\mu}{2\sqrt{\pi D_\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(- \frac{\mu^2}{4D(t-\tau)} \right) d\tau =$$
$$= A(\mu, t) - Q_\alpha(\mu, t) = R_\alpha(\mu, t) \,, \qquad \forall \mu \geqslant e(t), \ \big(t \in [0, t_0]\big) \,,$$

condizione questa che ne facilita lo studio.

Precisando un metodo già seguito in [11] dimostriamo

TEOREMA 4. *L'identità* (3.2) *ammette al più una sola soluzione* $\varphi(t) \in C[0, t_0]$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ due soluzioni $\in C[0, t_0]$ della (3.2). Avremo

$$\frac{\mu}{2\sqrt{\pi D_\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4D(t-\tau)}\right) d\tau = 0\,, \qquad e(t) \leqslant \mu,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\,,$$

perciò, essendo $e(t) \leqslant \mu_0$, integrando quest'ultima rispetto a μ tra $\sqrt{n+1}\mu_0$ ed ∞, essendo n intero positivo o nullo, segue

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(n+1)\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) d\tau = 0\,,$$

e perciò anche

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \sum_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} \exp\left(-\frac{(n+1)\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right)\right)^s d\tau = 0\,.$$

Da qui, posto $r = m/(m+1)$, m intero positivo, sommando per s da 0 ad ∞, segue

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) \cdot \sum_s^{0\ldots\infty} r^s \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right)\right)^s d\tau = 0\,,$$

essendo qui lecito invertire la somma per serie con l'integrazione. Segue

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \left((1-r) \exp\left(\frac{\mu_0^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) + r\right)^{-1} d\tau = 0\,,$$

infine, passando al limite per $m \to \infty$, quindi per $r \to 1$, si ha

$$\int_0^t \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = 0 ,$$

perciò dall'unicità delle soluzioni dell'equazione integrale di Abel segue il teorema.

Come si verifica immediatamente le condizioni per l'esistenza della soluzione della (3.2) possono dedursi da quelle relative all'esistenza della soluzione di un problema parabolico in uno strato $[0, \bar{\mu}]$, $\bar{\mu} \geqslant \mu_0$, data la temperatura $R_\alpha(\bar{\mu}, t)$ e la sua derivata $\left(\partial R_\alpha(\mu, t)/\partial\mu\right)_{\mu=\bar{\mu}}$ sul piano $\mu = \bar{\mu}$. Tali condizioni sono ben note già dal 1908 da un lavoro di E. Holmgren [6], e sono state generalizzate anche da altri autori, cfr. ad esempio [8], e ad esse rimandiamo. Ammessa l'esistenza della soluzione $\varphi(t)$ della (3.2) si ha:

Teorema 5. *Se la* (3.2) *ammette una soluzione* $\varphi(t) \in C[0, t_0]$ *si ha*

$$\varphi(t) = \lim_{r\to 1} \sum_s^{0\ldots\infty} r^s \sum_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} R_\alpha\left(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, t\right), \tag{3.3}$$

dove $\bar{\mu} \geqslant \mu_0$.

Dimostrazione Dalla (3.2) si ha, scelto $\bar{\mu} \geqslant \mu_0$

$$\frac{\mu}{2\sqrt{\pi D_\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) d\tau = R_\alpha(\mu, t) =$$

$$= \frac{\mu - \bar{\mu}}{2\sqrt{\pi D_\alpha}} \int_0^t \frac{R_\alpha(\bar{\mu}, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\mu-\bar{\mu})^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) d\tau ,$$

qualunque sia $\mu \geqslant \bar{\mu}$. Integrando rispetto a μ tra $\bar{\mu}$ ed ∞ otteniamo

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp - \left(\frac{\bar{\mu}^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) d\tau = \int_0^t \frac{R_\alpha(\bar{\mu}, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau ,$$

e quindi anche, qualunque sia l'intero $n \geqslant 0$,

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(n+1)\,\bar{\mu}^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right) d\tau = \int_0^t \frac{R_\alpha(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \,.$$

Da questa, ragionando come per dimostrare il teorema di unicità, segue

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\left((1-r)\exp\left[\frac{\bar{\mu}^2}{4D_\alpha(t-\tau)}\right]+1\right)^{-1} d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\sum\limits_s^{0\ldots\infty} r^s \sum\limits_n^{0\ldots s}(-1)^n\binom{s}{n} R_\alpha(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu},\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \,,$$

quindi, passando al limite per $r \to 1$, per la supposta esistenza di $\varphi(t)$,

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \int_0^t \frac{\lim\limits_{r\to 1} \sum\limits_s^{0\ldots\infty} r^s \sum\limits_n^{0\ldots s}(-1)^n\binom{s}{n} R_\alpha(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \,,$$

e quindi il teorema.

Osservazione. Facilmente si verifica che la (3.3) può scriversi nella forma

$$\varphi(t) = \lim_{r\to 1} \sum_s^{0\ldots\infty} r^s(1-A)^s R_\alpha(\bar{\mu}, t)\,, \tag{3.3$_1$}$$

dove $(1-A)$ è l'operatore per il quale

$$(1-A)R_\alpha(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, t) = R_\alpha(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, t) - R_\alpha(\sqrt{n+1)+1}\,\bar{\mu}, t)\,,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] H. S. Carslaw - J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Sec. Ed. Clarendon Press, Oxford 1959.

[2] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Hersey (1964).

[3] M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolic*, Journ. de Math., (6), **9** (1913), pp. 305-471.

[4] E. Goursat, *Cours d'Analise Mathématique*, 4ª Ed. Gauthier-Villars, Paris (1927).

[5] K. H. Hoffmann - M. Niezgodka, *Control of parabolic systems involving free boundaries*, in corso di pubbl. su Prooc. of the Symposium « Free Boundary Problems: Theory and Applications » (Montecatini, Giugno 1981), Pitman, Res. Notes in Math.

[6] E. Holmgren, *Sur l'équation de la propagation de la chaleur*, Arkiv. for Mat. Astr. Fys., **4** (1908), p. 14.

[7] C. Pucci, *Alcune limitazioni per le soluzioni di equazioni paraboliche*, Ann. Mat. pura ed appl., (4), **48** (1959), pp. 161-172.

[8] C. Pucci, *Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*, Pubbl. I.P.A.C. n. 357 (1953).

[9] D. Quilghini, *Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase*, Ann. Mat. pura ed appl., (4), **67** (1965), pp. 33-74.

[10] D. Quilghini, *Una analisi fisico-matematica del problema di Stefan inverso in uno strato materiale piano*, Quaderni dell'Ist. Mat. « U. Dini » dell'Univ. di Firenze (1968).

[11] D. Quilghini, *Sul problema inverso di quello di Stefan*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2), **8** (1967), pp. 131-142.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 maggio 1982.