RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GAETANO FICHERA

Sul principio della memoria evanescente

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 245-259

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__245_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 68 (1982)

Sul principio della memoria evanescente.

Gaetano Fichera (*)

La teoria matematica dei materiali elastici dotati di memoria, iniziata nel 1874 da L. Boltzmann [1], [2] e proseguita da V. Volterra in magistrali lavori, apparsi fra il 1909 ed il 1913, [3], [4], [5], [6], [7], era rimasta per lungo tempo abbandonata fino a quando, a partire dalla fine degli anni '50, diversi Autori ne riprendevano lo studio e, ribattezzatala visco-elasticità, ne portavano avanti la tematica con importanti ricerche (cfr. [8], [9], [10], [11] e la bibliografia citata in [12]).

Un problema di carattere squisitamente fisico-matematico è quello consistente nel cercare di dare un significato matematico al fatto intuitivo e, peraltro, ben verificabile sperimentalmente, secondo cui, con il trascorrere del tempo, il materiale tende a dimenticare la sua storia più remota, vale a dire che le deformazioni cui esso fu sottoposto nel passato tendono ad avere sempre minore influenza sulla deformazione attuale, man mano che detto passato si fa più lontano. È questo un problema che, pur portando (*horribile dictu!*) ad implicazioni quasi filosofiche, è tuttavia della massima serietà ed, a mio parere, ad una soddisfacente soluzione di esso è legato molto del progresso futuro della teoria matematica dei corpi elastici con memoria.

Occorre dare riconoscimento a B. Coleman ed a W. Noll di essere stati i primi a porre, con cristallina chiarezza matematica, il problema ed a suggerirne una soluzione, proponendo un *Principle of Fading Memory* [10].

Più recentemente io pure mi sono occupato di questo problema, [13], [14], [15], [16], [17], assumendo nei confronti di esso un

(*) Indirizzo dell'A.: Via Pietro Mascagni 7, 00199 Roma.

atteggiamento «naive», tipico del matematico puro, ma che, tuttavia, appare irrinunciabile.

Il mio punto di vista è il seguente: quale si sia la forma matematica che voglia darsi al *Principle of Fading Memory* (Principio della memoria evanescente) che, brevemente, d'ora in avanti indicherò con la sigla PFM, essa deve esser tale da assicurare al problema integro-differenziale, nel quale il problema fisico, alla fine, si traduce, un teorema di esistenza e, a seconda dei casi, anche un teorema di unicità.

Ogni proposta di un PFM che non sia atta a soddisfare tale imprescindibile esigenza, deve allora essere rigettata. Ciò mi ha condotto ad avanzare qualche riserva [15], [16], sul PFM di Coleman e Noll ed ha, susseguentemente, originato una garbatissima polemica epistolare fra gli illustri Colleghi G. Capriz dell'Università di Pisa ed M. Gurtin dell'Università di Pittsburgh, da una parte, e me dall'altra, della quale, per le interessanti considerazioni svolte, mi permetterò di dare notizia nella presente Nota (1). Ma lo scopo principale di questa Nota è di esporre un mio punto di vista che non è soltanto critico, ma anche costruttivo, contenendo esso una mia proposta per un PFM. Criticare, tuttavia, è molto più facile che costruire e devo subito confessare che questa mia proposta fa sorgere in me stesso diverse perplessità, per motivi di natura tecnica dei quali parlerò in questa Nota. Tali motivi fanno apparire la proposta da me avanzata, più che come un'effettiva soluzione del problema, come una traduzione di esso in una nuova, altrettanto difficile, questione. Tuttavia, le considerazioni che vengono ad esser svolte mi paiono di interesse non trascurabile e tali, comunque, da formare oggetto della presente Nota, che spero degna di essere dedicata a Giuseppe Grioli, Fisico-matematico insigne e Collega carissimo, cui mi lega una quasi semi-secolare amicizia.

* * *

Scriverò al modo seguente le equazioni costitutive di un corpo elastico dotato di memoria, nell'ambito della teoria lineare dell'ela-

(1) Il contrasto delle idee, garbatamente espresso per lettera, spesso si verificava nelle epoche passate, dando luogo a corrispondenze che, negli anni posteriori, dovevano, in più di un caso, esser fondamento a nuovi progressi della Scienza. Oggi, con la frenesia dei tempi moderni, nei quali è più facile viaggiare che scrivere, questa bella abitudine sembra essersi perduta. Epperò è stato per me un vero piacere intrattenere una cortese ed interessante corrispondenza con due Colleghi tanto gentili quanto valorosi.

sticità, senza, tuttavia, fare le ipotesi di omogeneità ed isotropia per il corpo cui esse si riferiscono:

$$\sigma_{ih}(x,t) = a_{ihjk}(x)\varepsilon_{jk}(x,t) + \int_{-\infty}^{t} \varphi_{ihjk}(t-\tau)\varepsilon_{jk}(x,\tau)\,d\tau\,; \tag{1}$$

$x \equiv (x_1, \ldots, x_r)$ è il punto variabile in un campo (insieme aperto connesso) limitato A dello spazio cartesiano X^r (assumo uguale ad r la dimensione dello spazio, per trattare in modo unitario i tre casi di interesse fisico $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$); t è la variabile tempo; $\sigma \equiv \{\sigma_{ih}\}$, $\sigma_{ih} = \sigma_{hi}$ è il tensore degli sforzi; $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_{jk}\}$, $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$ quello della deformazione (linearizzata); a_{ihjk} sono i *coefficienti elastici* del corpo assoggettato alle ben note condizioni di simmetria

$$a_{ihjk}(x) \equiv a_{jkih}(x) \equiv a_{hijk}(x)\,,$$

nonchè all'ipotesi di render, per ogni x, definita positiva la forma quadratica $a_{ihjk}\varepsilon_{ih}\varepsilon_{jk}$ $(\varepsilon_{ih} = \varepsilon_{hi})$ nelle $r(r+1)/2$ componenti di deformazione. Le funzioni $\varphi_{ihjk}(s)$, definite per $s \geqslant 0$, sono i *coefficienti ereditari* o *di memoria* del corpo, verificanti le condizioni di simmetria $\varphi_{ihjk}(s) \equiv \varphi_{hijk}(s) \equiv \varphi_{ihkj}(s)$, ed assoggettati alla ipotesi semplicificatrice di non dipendenza da x e di verificare il *Translation Invariance Axiom* secondo Gurtin e Sternberg [11] o *Principio del ciclo chiuso*, secondo Volterra [7].

Il PFM di Coleman e Noll consiste nel supporre esistente una *funzione d'influenza* $h(s)$ tale che siano verificate le seguenti condizioni: 1) $h(s) > 0$ $(\forall s \geqslant 0)$; 2) $\lim\limits_{s\to+\infty} s^p h(s) = 0$ per qualche $p > 0$; 3)

$$\int_0^{+\infty} |\varphi_{ihjk}(s)|^2 |h(s)|^{-2}\,ds < +\infty\,. \tag{2}$$

In che modo la $h(s)$ *influenzi* la memoria del corpo è evidente. Tanto più alto è p, tanto più rapido è l'affievolirsi della memoria, dato che i coefficienti φ_{ihjk} che la determinano, sono assoggettati a render convergenti gli integrali (2).

Nel lavoro [16] considero il caso

$$r = 1\,, \qquad A\colon 0 < x < 1\,,$$

$$a_{1111}(x) \equiv 1\,, \qquad \varphi_{1111}(s) \equiv -\lambda \exp[-s]\,,$$

talchè le (1) si riducono all'unica equazione integrale (dove tralascio di indicare la dipendenza da x)

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) - \lambda \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-(t-\tau)\right] \varepsilon(\tau)\, d\tau . \tag{3}$$

È ovvio che in questo caso il PFM di Coleman e Noll è soddisfatto qualunque sia λ e *quale si sia la funzione di influenza del tipo* $(1+s)^{-p}$ $(p>0)$. Si consideri la (3) nello spazio $C^0(I, \mathbf{C})$ delle funzioni (a valori complessi) definite in $I \equiv (-\infty, q]$ ($q>0$ arbitrariamente fissato), ivi continue e limitate. $C^0(I, \mathbf{C})$ è uno spazio di Banach, introducendo la norma

$$\|\varepsilon\| = \sup_{t \in I} |\varepsilon(t)| .$$

In [16] è dimostrato che in $C^0(I, \mathbf{C})$ la (3) ha come spettro tutto il semi-spazio

$$\operatorname{Re} \lambda \geqslant 1 . \tag{4}$$

Ne viene che per un valore di λ verificante la (4) può, per la soluzione della (3), mancare l'esistenza o l'unicità o entrambe.

Questo mio esempio venne contestato da Capriz e Gurtin che, in una loro, peraltro cortesissima, lettera del 29-V-1980, a me indirizzata, osservarono quanto segue.

Introdotta la funzione

$$G(s) = 1 - \lambda + \lambda \exp[-s] ,$$

(*stress-relaxation function*), essi scrivono la (3) nella forma seguente:

$$\sigma(t) = G(0)\varepsilon(t) + \int_{0}^{+\infty} G'(s)\varepsilon(t-s)\, ds \tag{5}$$

ed osservano che i valori di λ « cattivi », cioè quei valori (reali) per i quali $\lambda \geqslant 1$, corrispondono a « *physically unreasonable forms* » della « stress relaxation function » $G(s)$. Essi affermano che il caso $\lambda > 1$, avendo come conseguenza $G(+\infty) < 0$, è inammissibile, dato che allora $G(s)$, per s maggiore di un certo s_0, assume valori negativi, contrariamente alla evidenza fisica, e testualmente scrivono:

« *To us using the strange behavior associated with* $\lambda > 1$ *as an argument against fading-memory is equivalent to using the lack of uniqueness in elasticity outside of the positive-definite range as an argument against elasticity.* »

Aggiungono infine che il valore $\lambda = 1$ corrisponde al caso di un fluido, dato che $G(\infty) = 0$, e concludono: « *For such materials one expects anomalous equilibrium behavior, so your result is not at all surprising* (cfr. Pipkin, *Lectures on Viscoelasticity Theory*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 7, Springer, 1972) ».

Questa lettera dei due illustri Colleghi è certo un'intelligente difesa del PFM di Coleman e Noll, ma le argomentazioni in essa contenute, per potere essere accettate (specie il paragone che Capriz e Gurtin istituiscono fra la positività di $G(s)$ in visco-elasticità e la definitezza positiva del potenziale elastico in elasticità) dovrebbero essere sostenute dalla dimostrazione del fatto che, quando è $G(s) > 0$, $0 \leqslant s \leqslant +\infty$, allora sussiste per la (5) un teorema di unicità (così come accade nell'elasticità classica, quando il potenziale elastico è definito positivo). Purtroppo ciò non è vero.

In una mia lettera del 12-VI-1980, indirizzata a Capriz ed a Gurtin, consideravo il caso in cui nella (5) si assume

$$G(s) = \tfrac{1}{2} - s \exp[-s] .$$

$G(s)$ è positiva per $s \geqslant 0$, $G(+\infty) = \frac{1}{2}$; per essa è verificato il PFM di Coleman e Noll, eppure l'equazione omogenea associata alla (5)

$$0 = G(0)\varepsilon(t) + \int_0^{+\infty} G'(s)\varepsilon(t-s)\, ds$$

ammette in $C^0(I, \mathbf{C})$ le due autosoluzioni $\varepsilon(t) = \sin t$ ed $\varepsilon(t) = \cos t$. Ciò fa ritenere che la schematizzazione matematica di un PFM non possa esaurirsi nelle condizioni 1), 2), 3), postulate da Coleman e Noll, ma richieda una più penetrante analisi.

Per rendersi ben conto della difficoltà del problema analitico da risolvere nella teoria delle equazioni integro-differenziali, quando si attacca lo studio dei materiali elastici con memoria, si considerino le equazioni costitutive (1) nell'ipotesi che il corpo sia isotropo ed omogeneo e si introduca nelle (1) un parametro di comodo λ. Si ha allora (dopo aver scelto convenientemente le unità di misura fisiche):

$$(6)\qquad \sigma_{ih}(x,t) = 2\varepsilon_{ih}(x,t) + (\nu - 1)\delta_{ih}\varepsilon_{kk}(x,t) + \lambda\int_0^{+\infty}[\varphi_1(s)\varepsilon_{ih}(x,t-s) + \delta_{ih}\varphi_2(s)\varepsilon_{kk}(x,t-s)]\,ds\,,$$

dove ν è una costante che rappresenta un coefficiente elastico del corpo ([2]) e $\varphi_1(s)$ e $\varphi_2(s)$ sono i coefficienti di memoria nel caso del corpo isotropo.

Si supponga di voler studiare il problema quasi statico e che il corpo, schematizzato in una sua configurazione naturale dal campo A, sia fisso lungo tutto il suo contorno ([3]). Dalle equazioni di equilibrio di Cauchy $\sigma_{ih/h} = f_i$ ([4]) $[f(x,t) \equiv f_1(x,t) \ldots f_r(x,t)$ è la forza di massa che agisce sul corpo] e ricordando che $\varepsilon_{ih} = 2^{-1}(u_{i/h} + u_{h/i})$ $[u \equiv (u_1, \ldots, u_r)$ è il vettore spostamento] si trae, supposte lecite le derivazioni sotto il segno di integrale nei secondi membri delle (6), per $x \in A$, $-\infty < t \leqslant q$:

$$(7)\qquad u_{i/hh}(x,t) + \nu u_{h/ih}(x,t) + \lambda\int_0^{+\infty}[\psi_1(s)u_{i/hh}(x,t-s) + \psi_2(s)u_{h/ih}(x,t-s)]\,ds = f_i(x,t)$$

con la condizione al contorno

$$(8)\qquad u_i(x,t) = 0\,; \qquad x \in \partial A\,, \qquad -\infty < t \leqslant q\,.$$

([2]) Se L ed M sono le costanti di Lamè del corpo, si è supposto di avere scelto le unità di misura in modo che si abbia $M = 1$. Sarà allora $\nu = L + 1$.

([3]) In tutta questa Nota mi limiterò a considerare solo condizioni al contorno di Dirichlet, per non appesantire la trattazione con apparati formali estranei all'essenza concettuale delle considerazioni, che mi propongo di svolgere. È però del tutto ovvio come quanto verrò a dire si estenda a più generali problemi integro-differenziali al contorno, quali quelli considerati in [16] ed in [17].

([4]) Con $/h$ si indica l'operazione di derivazione parziale $\partial/\partial x_h$ $(h = 1, \ldots, r)$.

Si è posto

$$\psi_1(s) = \tfrac{1}{2}\varphi_1(s)\,, \qquad \psi_2(s) = \tfrac{1}{2}\varphi_1(s) + \varphi_2(s)\,.$$

Per risolvere il problema (7), (8) appare spontaneo servirsi dell'integrale di Fourier. Si indichi con $\hat{g}(\alpha)$ la trasformata di Fourier della funzione $g(t)$

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp[-i\alpha t]\, dt\,.$$

Si ponga

$$\Psi_h(s) = \begin{cases} 0 & \text{per } s < 0 \\ \psi_h(s) & \text{per } s \geqslant 0 \end{cases} \qquad (h = 1, 2)\,.$$

Da (7) e (8) si trae

$$(9) \qquad [1 + \lambda\hat{\Psi}_1(\alpha)]\hat{u}_{i/hh}(x, \alpha) + [\nu + \lambda\hat{\Psi}_2(\alpha)]\hat{u}_{h/ih}(x, \alpha) = \hat{f}_i(x, \alpha)\,, \qquad x \in A\,;$$

$$(10) \qquad \hat{u}_i(x, \alpha) = 0\,, \qquad x \in \partial A\,.$$

Per $\lambda = 0$ il sistema (9) si riduce a quello della elastostatica classica, che, com'è ben noto, è fortemente ellittico per $\nu > -1$. Con tale scelta di ν e per $\lambda = 0$, il sistema (9), (10) ammette (per ogni fissato α) una ed una sola soluzione. È giustificato il presumere che per $|\lambda| < \lambda_0$, con λ_0 abbastanza piccolo, per il sistema (9), (10) seguiti a sussistere, qualunque sia α, il teorema di esistenza e di unicità.

Purtroppo, per λ arbitrario, il sistema (9) cesserà, in generale, di essere, non solo fortemente ellittico, ma addirittura ellittico ed il problema (9), (10) diverrà un problema mal posto, l'analisi del quale urterà contro pressochè insormontabili difficoltà. Questo avverrà anche se si fanno ipotesi di positività generalizzanti quelle menzionate da Capriz e Gurtin nel caso particolare prima considerato.

Si torni ora a scrivere le (1) in ipotesi di maggiore generalità, abbandonando, cioè, l'ipotesi del ciclo chiuso e supponendo i coefficienti ereditari dipendenti anche da x. Anche ora si introduca il parametro λ, che sarà supposto passibile di assumere valori anche complessi

$$\sigma_{ih}(x, t) = a_{ihjk}(x)\varepsilon_{jk}(x, t) + \lambda\int_{-\infty}^{t}\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)\varepsilon_{jk}(x, \tau)\, d\tau\, .$$

Oltre alle ipotesi già menzionate per i coefficienti elastici $a_{ihjk}(x)$, si supponga che essi appartengano a $C^2(\bar{A})$. Per quanto riguarda i coefficienti ereditari, si assuma che, oltre a verificare le ipotesi di simmetria

$$\varphi_{ihjk}(x, t, \tau) \equiv \varphi_{hijk}(x, t, \tau) \equiv \varphi_{ihkj}(x, t, \tau)\, ,$$

detto D il semipiano del piano t, τ nel quale $\tau \leqslant t$, sia, per ogni $(t, \tau) \in D$, $\varphi_{ihjk}(x, t, \tau) \in C^2(\bar{A})$. Inoltre φ_{ihjk}, $\varphi_{ihjk/l}$ siano funzioni di (x, t, τ) limitate e misurabili in $A \times D$. Si supponga infine che esista una funzione positiva $L(t, \tau)$ la quale, per ogni t, sia funzione di τ sommabile in $(-\infty, +\infty)$, riuscendo

$$\int_{-\infty}^{q} L(t, \tau)\, d\tau \leqslant C(q)$$

(con $C(q)$ costante dipendente solo da q), tale che per ogni $x \in \bar{A}$

$$|\varphi_{ihjk/h}(x, t, \tau)| + |\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)| \leqslant L(t, \tau)\, .$$

Il problema quasi statico dà luogo al seguente problema al contorno integro-differenziale:

$$\begin{aligned}(11)\qquad & [a_{ihjk}(x)u_{j/k}(x, t)]_{/h} + \lambda\int_{-\infty}^{t}\varphi_{ihjk/h}(x, t, \tau)u_{j/k}(x, \tau)\, d\tau \\ & + \lambda\int_{-\infty}^{t}\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)u_{j/hk}(x, \tau)\, d\tau = f_i(x, t)\, , \qquad x \in A,\ -\infty < t \leqslant q;\end{aligned}$$

$$(12)\qquad u_i(x, t) = 0\, , \qquad x \in \partial A,\ -\infty < t \leqslant q\, .$$

Sia $H_n(A)$ lo spazio di Hilbert delle funzioni vettoriali ad r componenti complesse dotate in A delle derivate (generalizzate) fino all'ordine n, munito della norma

$$\|u\|_n^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{n} \int_A |D^\alpha u|^2 dx \qquad (dx = dx_1, \ldots, dx_r).$$

Sia $C^0[I, H_n(A)]$ lo spazio delle funzioni $v(t)$ definite in $I \equiv (-\infty, t]$, aventi valori in $H_n(A)$, continue (nella topologia forte di $H_n(A)$) in I e limitate in I.

$C^0[I, H_n(A)]$ si consideri come uno spazio di Banach, definendo la norma di $v(t)$ al modo seguente:

$$|||v||| = \sup_{t \in I} \|v(t)\|_m .$$

Considerando $u(x, t)$ come un elemento $u(t)$ di $C^0[I, H_2(A)]$: $t \xrightarrow{u(t)}$ $\xrightarrow{u(t)} u(x, t)$, la soluzione del problema (11), (12) sarà ricercata in tale spazio. Occorrerà, naturalmente, fare l'ipotesi che sia $f(x, t) \in C^0[I, H_0(A)]$.

A questo punto posso avanzare la mia proposta per un PFM, formulato per via assiomatica. A ciò perverrò dando due condizioni (assiomi) di *ammissibilità* per il complesso dei coefficienti ereditari $\{\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)\}$ (che chiamerò, brevemente, la *memoria* del corpo). Essi sono i seguenti:

1) Se la memoria $\{\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)\}$ è ammissibile, allora, assumendo $\lambda = 1$, sussistono per il problema (11), (12) i teoremi di esistenza e unicità.

2) Se la memoria $\{\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)\}$ è ammissibile, è anche ammissibile la memoria $\{\lambda\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)\}$ per ogni λ tale che $|\lambda| \leqslant 1$.

Il significato del primo assioma è ovvio: non può esserci PFM che non assicuri al problema (11), (12) l'esistenza e l'unicità della soluzione. L'assioma 2) vuole invece esprimere questa istanza: se una data memoria verifica il PFM, tende, cioè, ad affievolirsi, indebolendo (o, comunque, non rafforzando) questa memoria con il moltiplicarne i coefficienti per un λ con $|\lambda| \leqslant 1$, anche la nuova memoria verifica il PFM.

Il mio scopo è ora di uscire dalla assiomatizzazione ed esprimere, con una condizione quantitativa sui coefficienti di memoria, il fatto che per essi è verificato il PFM. Tale fine sarà raggiunto, ma avverto che la condizione quantitativa non avrà un'espressione analitica così semplice (e ciò era da attendere) come la (2) di Coleman e Noll.

Si consideri il problema classico dell'elasticità per un corpo fisso lungo tutto il bordo

$$[a_{ihjk}(x)u_{j/k}]_{/h} = v_i \quad \text{in } A\,, \tag{13}$$

$$u_i = 0 \quad \text{su } \partial A\,. \tag{14}$$

Si assuma $v \in H_0(A)$ e $\partial A \in C^\infty$. Il problema (13), (14) ha allora una ed una sola soluzione in $H_2(A)$ (cfr. [13], p. 381). Si rappresenti tale soluzione al modo seguente: $u = Gv$. G è l'*operatore di Green* del problema (13), (14). Esiste una costante c dipendente solo da A e dai coefficienti elastici a_{ihjk} tale che

$$\|Gv\|_2 \leqslant c\|v\|_0 \tag{15}$$

(cfr. [13], p. 370). Si consideri l'operatore lineare definito in $C^0[I, H_0(A)]$

$$\mathcal{T}v \equiv \{(\mathcal{T}v)_1, \ldots, (\mathcal{T}v)_r\}\,,$$

con

$$(\mathcal{T}v)_i = -\int_{-\infty}^{t} \{\varphi_{ihjk/h}(x, t, \tau)(Gv)_{j/k} + \varphi_{ihjk}(x, t, \tau)(Gv)_{j/kh}\}\, d\tau\,.$$

Dalla (15) e dalle ipotesi assunte sui coefficienti di memoria, segue che $\mathcal{T}$ è un operatore lineare limitato di $C^0[I, H_0(A)]$ in se stesso.

Orbene, il problema (11), (12) è equivalente al seguente:

$$v = f + \lambda\mathcal{T}v\,, \qquad v \in C^0[I, H_0(A)]\,. \tag{16}$$

Se u è soluzione di (11), (12), la v, definita per ogni fissato t mediante (13), è soluzione di (16), laddove, se v è soluzione di (16), $u = Gv$ è soluzione di (11), (12).

Diciamo $\varrho_{\mathcal{T}}$ il raggio spettrale dell'operatore $\mathcal{T}$, poniamo cioè:

$$\varrho_{\mathcal{T}} = \lim_{n\to\infty} |||\mathcal{T}^n|||^{1/n}\,.$$

La quantità reale non negativa $\varrho_{\mathcal{C}}$ è un funzionale di $\mathcal{C}$ e quindi, fissato A, dei coefficienti elastici a_{ihjk} e dei coefficienti di memoria φ_{ihjk}. Poichè durante tutta la discussione ho supposto fissati gli a_{ihjk} una volta per tutte, metterò solo in evidenza la dipendenza di $\varrho_{\mathcal{C}}$ dal complesso $\{\varphi_{ihjk}\}$ di tutti i coefficienti di memoria del corpo (complesso che indicherò con φ) cioè dalla memoria del corpo. Scriverò allora

$$\varrho_{\mathcal{C}} = \varrho(\varphi)\,.$$

Il funzionale $\varrho(\varphi)$ avrà una dipendenza assai complicata da φ, in generale non esprimibile con una semplice formola analitica. Posso però affermare che

$$\varrho(\lambda\varphi) = |\lambda|\varrho(\varphi)\,.$$

Sussiste il seguente teorema che dà aspetto quantitativo al PFM.

I. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè la memoria φ verifichi il* PFM [*cioè i due assiomi* 1) *e* 2)] *è che si abbia*

$$\varrho(\varphi) < 1\,. \tag{17}$$

Dirò che il numero complesso λ è un valore regolare per l'equazione (16), se, assegnata comunque f in $C^0[I, H_0(A)]$, la (16) ammette una ed una sola soluzione $v \in C^0[I, H_0(A)]$.

È ben noto dall'analisi funzionale che $(\varrho_{\mathcal{C}})^{-1}$ è il raggio del massimo cerchio di centro l'origine, nel piano complesso, i cui punti interni sono tutti regolari. (se $\varrho_{\mathcal{C}} = 0$, tutti i punti del piano complesso sono regolari). Se è verificata la (17), sono regolari tutti i λ per i quali $|\lambda| \leqslant 1$ e quindi φ verifica gli assiomi 1) e 2) del PFM. Viceversa, se φ verifica questi assiomi, il disco $|\lambda| \leqslant 1$ è costituito tutto da punti regolari e quindi deve essere $\varrho_{\mathcal{C}} = 0$ oppure $(\varrho_{\mathcal{C}})^{-1} > 1$, cioè deve essere verificata la (17).

È stato più volte osservato, [13], [15], [16], [17] che se nelle equazioni integro-differenziali si sostituisce l'estremo inferiore di integrazione $-\infty$ con un valore finito t_0 (*ipotesi di Volterra*), si considera, cioè, trascurabile tutta la storia del corpo da $-\infty$ a t_0, allora, per il problema (11), (12), così modificato, si ha sempre il teorema di esistenza ed unicità. Il fatto rilevante è che in tal caso non occorre assoggettare i coefficienti di memoria ad alcuna ulteriore condizione.

Voglio inquadrare questo risultato nella cornice del PFM proposto in questo lavoro. Ciò può farsi mediante il seguente teorema. Premetto che, fissati i due numeri reali t_0 e q, con $D(t_0, q)$ $(t_0 < q)$ indicherò il triangolo del piano (t, τ): $t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant q$.

II. – *Siano assegnate le funzioni* $\psi_{ihjk}(x, t, \tau)$ *definite in* $A \times D(t_0, q)$, *appartenenti per ogni* (t, τ) *di* $D(t_0, q)$ *a* $C^2(\bar{A})$ *e misurabili e limitate assieme alle derivate* $\psi_{ihjk/l}(x, t, \tau)$ *in* $A \times D(t_0, q)$. *Esiste una memoria* $\varphi \equiv \{\varphi_{ihjk}(x, t, \tau)\}$ *ammissibile* [*cioè verificante gli assiomi* 1) *e* 2)] *tale che*

$$\varphi_{ihjk}(x, t, \tau) \equiv \psi_{ihjk}(x, t, \tau) \qquad in \ A \times D(t_0, q) .$$

Definendo $\varphi_{ihjk}(x, t, \tau) = 0$ nei punti di $A \times D$ che non appartengono a $A \times D(t_0, q)$, si ottiene una memoria per la quale riesce $\varrho(\varphi) = 0$. Basta a tal fine osservare che la (16) diventa una equazione integrale di Volterra di II specie per funzioni definite in $[t_0, q]$ ed a valori in $H_0(A)$. Riesce allora $\varrho(\varphi) = 0$ (cfr. [14], p. 123 e p. 14).

Il teorema ora dimostrato permette di interpretare al modo seguente il teorema di esistenza ed unicità per il problema integro-differenziale, teorema che si ottiene quando si assume l'ipotesi di Volterra: è sempre possibile considerare un corpo elastico per il quale in un intervallo di tempo finito la memoria sia arbitrariamente assegnata; questa memoria si può sempre prolungare nell'intervallo infinito in una memoria ammissibile.

Ancorchè gli assiomi 1) e 2), che caratterizzano il PFM, appaiano assai ragionevoli, è tuttavia evidente che sia il PFM proposto che i risultati ottenuti dipendono dallo spazio scelto, nel quale si ricerca la soluzione del problema, cioè dallo spazio $C^0[I, H_0(A)]$ se, com'è ben lecito, consideriamo quale incognita del problema la v che appare nella (16).

Purtroppo, cambiando il detto spazio, può mutare radicalmente l'insieme delle memorie ammissibili e quindi l'essenza stessa del PFM. Per convincersi di questo, si rappresenti, come è ben possibile, l'operatore $\mathcal{C}$ al modo seguente:

$$\mathcal{C}v = \int_{-\infty}^{t} \Phi(x, t, \tau) \Gamma[v(\tau)]\, d\tau ;$$

$\Phi(x, t, \tau)$ è una matrice $r \times m$ (m intero positivo conveniente) e Γ un operatore lineare e limitato che trasforma lo spazio $H_0(A)$ delle funzioni vettoriali ad r componenti nello spazio $H_0(A)$ delle funzioni vettoriali ad m componenti. Sia $c > 0$ tale che per ogni $v \in H_0(A)$ si abbia

$$\|\Gamma v\|_0^2 \leqslant c\|v\|_0^2 .$$

Sia $p(t)$ una funzione reale e positiva, continua in $I = (-\infty, q]$. Invece dello spazio di Banach $C^0[I, H_0(A)]$, considererò lo spazio di Hilbert $L^2[A \times I; p]$, dove la norma è così definita

$$|||v(x, t)|||^2 = \int_{-\infty}^{q} p(t)\, dt \int_A |v(x, t)|^2\, dx .$$

Si abbia

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{|\Phi(x, t, \tau|^2}{p(\tau)}\, d\tau \leqslant f(t) ;$$

la $f(t)$ sia, per quasi tutti i t di I, finita e la funzione $p(t)f(t)$ appartenga ad $L^1(I)$. In tali ipotesi $\mathcal{T}$ è un operatore lineare e limitato di $L^2[A \times I; p]$ in se stesso. Si ha infatti

$$\int_A |\mathcal{T}v|^2\, dx \leqslant \int_A dx \int_{-\infty}^{t} \frac{|\Phi(x, t, \tau)|^2}{p(\tau)}\, d\tau \int_{-\infty}^{t} |\Gamma(v)|^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant cf(t) \int_{-\infty}^{t} \|v\|_0^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant cf(t)|||v|||^2 .$$

Poniamo

$$F(t) = \int_0^t p(\tau) f(\tau)\, d\tau .$$

Si ha:

$$\int_{-\infty}^{t} \|\mathcal{T}v\|_0^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant cF(t)|||v|||^2 ;$$

da ciò segue quanto asserito per $\mathcal{T}$. Considererò ora la (16) nello spazio $L^2[A \times I; p]$. Voglio far vedere che

$$\int_{-\infty}^{t} \|\mathcal{T}^n v\|_0^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{c^n[F(t)]^n}{n!} |||v|||^2 . \tag{18}$$

Procedendo per induzione, poichè la (18) è vera per $n = 1$, basta, per provarla in generale, supporla vera per n e dimostrarla per $n + 1$. Si ha:

$$\int_A |\mathcal{T}^{n+1} v|\, dx \leqslant \int_A dx \int_{-\infty}^{t} \frac{|\Phi(x, t, \tau)|^2}{p(\tau)}\, d\tau \int_{-\infty}^{t} |\Gamma \mathcal{T}^n v|^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant f(t) \int_{-\infty}^{t} \|\Gamma \mathcal{T}^n v\|_0^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant c f(t) \int_{-\infty}^{t} \|\mathcal{T}^n v\|_0^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant c^{n+1} f(t) \frac{[F(t)]^n}{n!} |||v|||^2 ;$$

$$\int_{-\infty}^{t} \|\mathcal{T}^{n+1} v\|_0^2 p(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{c^{n+1}}{n!} \left(\int_0^t [F(\tau)]^n F'(\tau)\, d\tau \right) |||v|||^2 ,$$

che è appunto la (18), scritta per $n + 1$.

Dalla (18) si trae

$$|||\mathcal{T}^n||| \leqslant \frac{[cF(q)]^{n/2}}{\sqrt{n!}} ,$$

quindi

$$\lim_{n \to \infty} |||\mathcal{T}^n|||^{1/n} \leqslant \sqrt{cF(q)} \left(\frac{1}{n!} \right)^{1/2n} = 0 .$$

Ne segue $\varrho_{\mathcal{T}} = 0$. Pertanto, per la (16), considerata in $L^2[A \times I; p]$, c'è sempre, qualunque sia λ, l'esistenza e l'unicità della soluzione, per modo che memorie non ammissibili, quando il PFM era riferito a $C^0[I, H_0(A)]$, possono diventarlo nel nuovo spazio $L^2[A \times I; p]$.

Come conseguenza dell'analisi svolta, si può dire che il concetto di evanescenza della memoria di un corpo elastico assume senso solo se riferito ad un prefissato spazio funzionale, dotato di una struttura topologica, nel quale si conviene di studiare il problema.

Ma quali sono i criteri fisici che conducono a scegliere tale spazio funzionale e ad introdurvi una struttura topologica?

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BOLTZMANN, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Sitzber. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl. 70, Sect. II (1874), pp. 275-300.
[2] L. BOLTZMANN, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Ann. Phys. u. Chem., **5** (1878), pp. 430-432.
[3] V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **18**, no. 1 (1909), p. 167.
[4] V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **18**, no. 2 (1909), pp. 295-301.
[5] V. VOLTERRA, *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **18**, no. 2 (1909), pp. 577-586.
[6] V. VOLTERRA, *Sur les equations integro-differentielles et leurs applications*, Acta Mathem., **35** (1912), pp. 295-356.
[7] V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913.
[8] A. E. GREEN - R. S. RIVLIN, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Arch. for Rat. Mech. and Anal., **1** (1957-58), pp. 1-21.
[9] H. KÖNIG - J. MEIXNER, *Lineare Systeme und lineare Transformationen*, Math. Nachrich., **19** (1958), p. 256.
[10] B. D. COLEMAN - W. NOLL, *Foundations of Linear Viscoelasticity*, Rev. of Modern Physics, **33**, no. 2 (1961), pp. 239-249.
[11] M. E. GURTIN - E. STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., **11**, no. 4 (1962), pp. 291-356.
[12] M. J. LEITMAN - G. M. C. FISHER, *The Linear Theory of Viscoelasticity*, Handbuch der Physik, vol. VIa/3, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1973), pp. 1-123.
[13] G. FICHERA, *Existence theorems in elasticity*, Handbuch der Physik, vol. VIa/2, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1972), pp. 347-389.
[14] G. FICHERA, *Analytic problems of hereditary phenomena in materials with memory*, Corso C.I.M.E., Bressanone, VI (1977), pp. 2-11; Liguori, Napoli (1979), pp. 111-169.
[15] G. FICHERA, *Integro-differential problems of hereditary elasticity*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (1977), pp. 363-370.
[16] G. FICHERA, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, Arch. Rat. Mech. and Anal., **70**, no. 2 (1979), pp. 101-112.
[17] G. FICHERA, *Analytic problems of materials with memory*, Atti del Congresso Int. IUTAM (Toronto, agosto 1980) (1980), pp. 223-230.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 luglio 1982.