RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DARIO GRAFFI

Sull'espressione analitica di alcune grandezze termodinamiche nei materiali con memoria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 17-29

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__17_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol 68 (1982)

PADOVA - BIBLIOTECA SEMINARIO MATEMATICO

Sull'espressione analitica di alcune grandezze termodinamiche nei materiali con memoria.

DARIO GRAFFI (*)

0. – In tempi relativamente recenti, la termodinamica è stata estesa ai materiali con memoria, o ereditari; userò, in seguito, indifferentemente l'una e l'altra locuzione. La letteratura sull'argomento è ormai molto vasta. Mi limiterò a citare la fondamentale memoria di Coleman [1], il libro di Truesdell [2], quello di Day [3], importante anche per l'ampia bibliografia, le lezioni tenute dal medesimo Autore nel 1977 al C.I.M.E. (Centro Internazionale Matematico Estivo) [4]; qualche altro lavoro verrà citato in seguito.

Ora, sempre riferendomi a materiali con memoria, ritengo sia opportuno conoscere, almeno per alcune grandezze termodinamiche come l'energia libera e l'entalpia libera, qualche loro espressione analitica, espressioni utili almeno come esempi per chiarire teorie generali.

In alcune memorie pubblicate qualche anno fa, ho mostrato come l'energia libera in un corpo viscoelastico lineare [5], o nei materiali elettromagnetici anch'essi lineari [6, n. 7-8-9-10], si possa identificare con l'energia potenziale interna di Volterra, ottenendo così un'espressione analitica dell'energia libera valida sotto alcune ipotesi, molto comuni nella teoria dei fenomeni ereditari, per la funzione di memoria.

Ma altre espressioni dell'energia libera nei corpi viscoelastici si trovano nelle citate lezioni di Day [4] e in una memoria di Coleman e Mizel [7, n. 6 *b*)], però ammettendo la funzione di memoria esponenziale o una somma di esponenziali. In seguito indicherò genericamente

(*) Indirizzo dell'A.: D. Graffi - Via A. Murri, 9 - 40137 Bologna.

con $\psi(t)$ l'energia libera all'istante t, e con $\psi_g(t)$, $\psi_d(t)$ quelle sue espressioni indicate rispettivamente da me e da Day e Coleman [1].

In questa Nota, valendomi delle proprietà imposte dalla termodinamica e indicate, in seguito, con I), II), III), ho cercato di costruire, con un metodo unitario, le possibili espressioni dell'energia libera.

Ma, mentre con il metodo in discorso si raggiunge facilmente $\psi_g(t)$, invece $\psi_d(t)$ si ottiene solo per le particolari funzioni di memoria considerate da Day, Coleman e Mizel. Comunque sarà facile verificare il teorema per cui $\psi_d(t) \leqslant \psi_g(t)$ e inoltre si potrà ottenere un valore maggiorante per il massimo lavoro ricuperabile.

Considererò infine l'entalpia libera e per questa grandezza verificherò direttamente un teorema di minimo analogo a quello per l'energia libera.

Osservo infine che, per semplicità di esposizione e per fissare le idee, mi limiterò a considerare la deformazione infinitesima di un filo viscoelastico lineare soggetto a trazione; credo però che queste considerazioni possano riportarsi a casi più generali.

1. – Consideriamo dunque un filo viscoelastico lineare; sia $\varepsilon(t)$ la deformazione all'istante t, $\sigma(t)$ lo sforzo all'istante t. La relazione fra $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ sia di memoria cioè:

$$\sigma(t) = a\varepsilon(t) - \int_0^\infty g(s)\,\varepsilon(t-s)\,ds \tag{1.1}$$

dove a è una costante positiva, $g(s)$ è la cosiddetta funzione di memoria. Dunque, lo sforzo all'istante t dipende dal valore contemporaneo della deformazione, $\varepsilon(t)$, e dai valori assunti negli istanti precedenti dalla deformazione, e ciò conforme all'ultimo termine di (1.1).

In altre parole, $\sigma(t)$ è una funzione di $\varepsilon(t)$ e un funzionale della funzione $\varepsilon(t-s)$ $\big(s \in (0,\infty)\big)$ cioè, come si suol dire, un funzionale della storia della deformazione.

Più sinteticamente la storia della deformazione verrà indicata con ε^t, sicchè la (1.1) si potrà scrivere:

$$\sigma(t) = \sigma\big(\varepsilon(t), \varepsilon^t\big)\,. \tag{1.1'}$$

[1] A rigore, $\psi(t)$ è l'energia libera per unità di volume.

Ora supposto, come faremo sempre in seguito, la temperatura costante, ammetteremo, come per $\sigma(t)$, l'energia libera $\psi(t)$ funzione di $\varepsilon(t)$ e un funzionale della storia ε^t di ε, cioè scriveremo:

$$\psi(t) = \psi(\varepsilon(t), \varepsilon^t)\,. \tag{1.2}$$

Notiamo che in seguito supporremo $\varepsilon(t)$ di classe C_1 e limitata per ogni $t \in (-\infty, \infty)$.

Ciò premesso, ricordiamo le già citate proprietà dell'energia libera imposte dalla termodinamica e valide per ogni t:

I) $$\sigma(t) = \frac{\partial\psi(t)}{\partial\varepsilon(t)}\,.$$

II) Se consideriamo l'insieme delle storie $\varepsilon(t-s)$ che all'istante t assumono lo stesso valore $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, l'energia libera è minima in corrispondenza della storia costante cioè $\varepsilon(t-s) = \varepsilon_0$, per ogni $s \geqslant 0$.

III) Per ogni t è:

$$\sigma(t)\,\dot{\varepsilon}(t) \geqslant \dot{\psi}(t)$$

il che equivale ad ammettere (si integri la relazione ora scritta da t_1 a t_2) che il lavoro dello sforzo nell'intervallo (t_1, t_2) non supera l'incremento dell'energia libera nel medesimo intervallo.

Passiamo ora ad esporre alcune ipotesi sulla funzione di memoria $g(s)$, molto comuni nella teoria dei fenomeni ereditari. Ovviamente $g(s)$ non può essere identicamente nulla per ogni s positivo, altrimenti i materiali che consideriamo non sarebbero ereditari. Supporremo poi, sempre per $s \geqslant 0$, $g(s)$ di classe C_1 e, assieme alla sua derivata $g'(s)$, infinitesima all'infinito almeno di ordine $s^{-(1+\eta)}$, $\eta > 0$, onde assicurare la convergenza degli integrali di (1.1) e di altri che scriveremo in seguito. Infine escluderemo che $g(s)$ rimanga costante in un certo intervallo o più in generale ammetteremo $g'(s) = 0$ solo in punti isolati; questa ipotesi non è necessaria, ma semplifica l'esposizione.

Infine faremo ulteriori ipotesi, sufficienti nel caso di $\psi_\sigma(t)$, e, come vedremo, sempre necessarie affinchè le espressioni dell'energia libera che costruiremo soddisfino a I), II), III). Precisamente ammetteremo $g(s)$ positiva e decrescente quindi $g'(s) \leqslant 0$. Viceversa, se $g'(s) \leqslant 0$, $g(s)$ deve essere decrescente, e poichè $g(\infty) = 0$, $g(s)$ deve essere positiva.

2. – Per costruire $\psi(t)$, in base alle ipotesi sufficienti or ora esposte, scriviamo anzitutto:

$$b = \int_0^\infty g(s)\, ds\,. \tag{2.1}$$

Ovviamente b è positivo.

Ora si soddisfa a I), come subito si verifica, ponendo:

$$\psi(t) = \tfrac{1}{2}\Big((a-b)\varepsilon^2(t) + \int_0^\infty g(s)\, ds\varepsilon^2(t) - 2\int_0^\infty g(s)\varepsilon(t-s)\, ds\varepsilon(t) + + U[\varepsilon^t]\Big) \tag{2.2}$$

dove U è un funzionale di $\varepsilon(t-s)$, ma indipendente da $\varepsilon(t)$.

Per soddisfare a II) si può scegliere $U[\varepsilon^t]$ in modo che gli ultimi tre termini di (2.2) formino una quantità positiva, che si annulla solo se $\varepsilon(t-s) = \varepsilon_0$, $\forall s \in [0, \infty)$.

Ora si può soddisfare questa condizione in due modi, cioè ponendo:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_g = \int_0^\infty g(s)\varepsilon^2(t-s)\, ds\,, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d = \frac{\left(\int_0^\infty g(s)\varepsilon(t-s)\, ds\right)^2}{b}\,. \tag{2.4}$$

Quindi si ottengono le seguenti due espressioni per l'energia libera:

$$\psi_g(t) = \tfrac{1}{2}\Big([a-b]\varepsilon^2(t) + \int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-s)\big)^2\, ds\Big) \tag{2.5}$$

$$\psi_d(t) = \tfrac{1}{2}\left([a-b]\varepsilon^2(t) + b\left(\varepsilon(t) - \frac{\int_0^\infty g(s)\varepsilon(t-s)\, ds}{b}\right)^2\right), \tag{2.6}$$

e si prova subito che l'ultimo termine di (2.5), (2.6) è positivo e si annulla per $\varepsilon(t-s) = \varepsilon_0$. Dunque $\psi_g(t)$ e $\psi_d(t)$ soddisfano anche a II).

3. – Cominciamo con verificare se per $\psi_g(t)$ è valida anche III). Derivando $\psi_g(t)$ rispetto a t, dopo calcoli in sostanza dovuti a Volterra, tenendo presente (2.1) si ha (cfr. anche [6], n. 5)

$$\dot\psi_g(t) = (a-b)\varepsilon(t)\dot\varepsilon(t) + \int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\big(\dot\varepsilon(t)-\dot\varepsilon(t-s)\big)\,ds = \tag{3.1}$$

$$= \Big(a\varepsilon(t) - \int_0^\infty g(s)\varepsilon(t-s)\,ds\Big)\dot\varepsilon(t) - \int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\dot\varepsilon(t-s)\,ds =$$

$$= \sigma(t)\dot\varepsilon(t) - \int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\frac{d}{ds}\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\,ds =$$

$$= \sigma(t)\dot\varepsilon(t) + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)^2\,ds\,.$$

Ora poichè $g'(s)\leqslant 0$ non è identicamente nulla, l'ultimo termine di (3.1) è, per ogni $\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)$, negativo e III) è soddisfatta.

Viceversa per soddisfare III) deve essere $g'(s)\leqslant 0$, e di conseguenza $g(s)\geqslant 0$ (cfr. n. 1). Le ipotesi su $g(s)$ sono dunque non solo sufficienti, ma anche necessarie per soddisfare I), II), III). In conclusione, con le nostre ipotesi su $g(s)$, $\psi_g(t)$ può rappresentare l'energia libera.

4. – Passiamo ora allo studio di $\psi_d(t)$. Si ha intanto:

$$\dot\psi_d(t) = (a-b)\varepsilon(t)\dot\varepsilon(t) + \tag{4.1}$$

$$+ b\left(\varepsilon(t) - \frac{\int_0^\infty g(s)\varepsilon(t-s)\,ds}{b}\right)\left(\dot\varepsilon(t) - \frac{\int_0^\infty g(s)\dot\varepsilon(t-s)\,ds}{b}\right) =$$

$$= \sigma(t)\dot\varepsilon(t) - \frac{1}{b}\Big(b\varepsilon(t) - \int_0^\infty g(s)\;\varepsilon(t-s)\,ds\Big)\int_0^\infty g(s)\dot\varepsilon(t-s)\,ds =$$

$$= \sigma(t)\dot\varepsilon(t) - \frac{1}{b}\int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\,ds\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\,ds =$$

$$= \sigma(t)\dot\varepsilon(t) + \frac{1}{b}\int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\,ds\int_0^\infty g'(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\,ds\,.$$

Ora, affinchè sia soddisfatta III), l'ultimo termine deve essere negativo o nullo per ogni $\varepsilon(t) - \varepsilon(t-s)$, cioè:

$$\frac{1}{b}\int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\,ds\int_0^\infty g'(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)\,ds \leqslant 0\,. \tag{4.2}$$

Ora, come vedremo in appendice, condizione necessaria affinchè (4.2) sia soddisfatta (supposto s'intende $b \neq 0$) è che sia:

$$\frac{g(s)g'(s)}{b} \leqslant 0\,, \tag{4.3}$$

certamente valida nelle nostre ipotesi; anzi, in appendice, vedremo che da (4.3) si trae $g'(s) < 0$ e di conseguenza $g(s) > 0$. Però in appendice vedremo, con un esempio, che (4.3) non è, in generale, sufficente per la validità di (4.2), perciò non si può affermare che l'espressione (2.6) rappresenta, in ogni caso, l'energia libera.

Però, se $g(s) = K\exp(-s/\tau)$, K e τ costanti positive, (4.2) è certamente soddisfatta e l'espressione di ψ_d rappresenta allora l'energia libera di Day.

Se $g(s)$ è una somma di esponenziali, cioè:

$$g(s) = \sum_{i=1}^n g_i(s); \qquad g_i(s) = K_i \exp\left(-\frac{s}{\tau_i}\right), \tag{4.4}$$

con K_i e τ_i costanti positive, si soddisfa a I), II), III), ponendo:

$$\psi_d(t) = \left(a - \sum_{i=1}^n b_i\right)\varepsilon^2(t) + \sum_{i=1}^n b_i\left(\varepsilon(t) - \frac{\int_0^\infty g_i(s)\varepsilon(t-s)\,ds}{b_i}\right)^2 \tag{4.5}$$

dove b_i si ottiene da (2.1) sostituendo $g_i(s)$ a $g(s)$.

Ora (4.5) si ricava da (2.6) ponendo l'indice i nei termini in b e g e poi sommando rispetto a i, e allora ripetendo le considerazioni fatte poco fa, si dimostra che (4.5) soddisfa a I), II), III).

Notiamo anzi che, ammesse opportune condizioni di convergenza, la (4.5) vale anche se n è infinito e si può estendere anche al caso

$$g(s) = \int_0^\infty \frac{k(\tau)}{\tau} \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) d\tau \tag{4.6}$$

ritrovando così le formule di Coleman e Mizel.

5. – Passiamo al confronto fra $\psi_g(t)$ e $\psi_d(t)$ qualora quest'ultima sia esprimibile mediante (2.6).

Ora si ha, applicando anche la formula di Schwarz e (2.1):

$$\mathcal{U}_d = \frac{\left(\int_0^\infty \sqrt{g(s)}\sqrt{g(s)}\,\varepsilon(t-s)\,ds\right)^2}{b} \leqslant \int_0^\infty g(s)\,\varepsilon^2(t-s)\,ds = \mathcal{U}_g \tag{5.1}$$

da cui:

$$\mathcal{U}_d \leqslant \mathcal{U}_g\,, \qquad \psi_d(t) \leqslant \psi_g(t) \tag{5.2}$$

relazione che si può facilmente estendere al caso di $\psi_d(t)$ espresso da (4.5).

Notiamo che, in generale, Day [4] dimostra che il valore più piccolo dell'energia libera ha l'espressione generale:

$$\psi_d(t) = \tfrac{1}{2}(a-b)\,\varepsilon^2(t) + m(\varepsilon^t) \tag{5.3}$$

dove $m(\varepsilon^t)$ è il massimo lavoro ricuperabile associato a ε^t.

Allora per (5.2) si ha subito:

$$m(\varepsilon^t) \leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-s)\big)^2\,ds\,, \tag{5.4}$$

cioè si ha un valore maggiorante per il massimo lavoro ricuperabile.

6. – Definiamo ora l'entalpia libera mediante la formula:

$$\mathcal{E}(t) = \psi(t) - \sigma(t)\,\varepsilon(t)\,. \tag{6.1}$$

Ovviamente, in corrispondenza di $\psi_d(t)$ (ammessa esprimibile mediante (2.6)) e di $\psi_g(t)$ si hanno due espressioni $\mathcal{E}_d(t)$ ed $\mathcal{E}_g(t)$ dell'entalpia libera cioè:

$$(6.2)\qquad \mathcal{E}_d(t) = \frac{a-b}{2}\,\varepsilon^2(t) + \frac{b}{2}\left(\varepsilon(t) - \frac{\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon(t-s)\,ds}{b}\right)^2 -$$

$$- a\varepsilon^2(t) + \varepsilon(t)\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon(t-s)\,ds = -\frac{a}{2}\,\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2b}\left(\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon(t-s)\,ds\right)^2 =$$

$$= -\frac{a}{2}\,\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\,\mathcal{U}_d$$

$$(6.3)\qquad \mathcal{E}_g(t) = \frac{a-b}{2}\,\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\big(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-s)\big)^2\,ds - a\varepsilon^2(t) +$$

$$+ \varepsilon(t)\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon(t-s)\,ds = -\frac{a}{2}\,\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon^2(t-s)\,ds =$$

$$= -\frac{a}{2}\,\varepsilon^2(t) + \frac{1}{2}\,\mathcal{U}_g\,.$$

Quindi, per (5.1)

$$(6.4)\qquad \mathcal{E}_d(t) \leqslant \mathcal{E}_g(t)\,.$$

Ora, supposto di poter esprimere $\mathcal{E}_d(t)$ ed $\mathcal{E}_g(t)$ in funzione di $\sigma(t)$, e della sua storia σ^t, vale un teorema analogo alla condizione II); cioè fra tutte le storie dello sforzo con $\sigma(t) = \sigma_0$ (costante) l'entalpia libera è minima per la storia costante cioè per $\sigma(t-s) = \sigma_0$, $\forall s > 0$.

Il teorema è valido supponendo però $a - b > 0$, ipotesi che può ritenersi valida perchè $a - b$ è il modulo di equilibrio che l'esperienza insegna positivo.

Occorre ammettere inoltre, come intuitivo dal punto di vista fisico, che in corrispondenza dello sforzo costante σ_0 da $-\infty$ a t, sia costante anche la deformazione cioè $\varepsilon(t-s) = \varepsilon_0$, $\forall s > 0$ (ε_0 costante).

Anzi, sostituendo in (1.1) σ_0 e ε_0 a $\sigma(t)$, $\varepsilon(t-s)$, si ha:

$$(6.5)\qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{a-b}\,.$$

Allora l'espressione dell'entalpia libera $\mathcal{E}_{d_0}$, e $\mathcal{E}_{\sigma_0}$, qualora la storia dello sforzo o della deformazione è costante, vale:

$$\mathcal{E}_{d_0}(t) = \mathcal{E}_{\sigma_0}(t) = -\frac{a-b}{2}\,\varepsilon_0^2\,. \tag{6.6}$$

Ciò premesso, considerando una storia generica con $\sigma(t-s) \neq \sigma_0$, $\forall s > 0$, poniamo:

$$\sigma(t-s) = \sigma_0 + \sigma_1(t-s)\,, \tag{6.7}$$

$$\varepsilon(t-s) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-s)\,. \tag{6.8}$$

Sarà ovviamente $\sigma_1(t) = 0$.
Allora sostituendo (6.7) e (6.8) in (1.1) si ricava:

$$a\varepsilon_1(t) - \int_0^\infty g(s)\,\varepsilon_1(t-s)\,ds = 0\,. \tag{6.9}$$

Sostituendo in (6.2) e ricordando (2.4), (6.9) e poi (6.6):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_d(t) &= -\frac{a}{2}\left(\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0\varepsilon_1(t) + \varepsilon_1^2(t)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2b}\left(\int_0^\infty g(s)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-s))\,ds\right)^2 = \\ &= \mathcal{E}_{d_0}(t) - \frac{a}{2}\,\varepsilon_1^2(t) + \frac{1}{2b}\left(\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon_1(t-s)\,ds\right)^2.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Ora da (6.9) si ha:

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1}{a}\int_0^\infty g(s)\varepsilon_1(t-s)\,ds \tag{6.11}$$

e sostituendo in (6.10):

$$\mathcal{E}_d(t) = \mathcal{E}_{d_0}(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\int_0^\infty g(s)\,\varepsilon_1(t-s)\,ds\right)^2, \tag{6.12}$$

e poichè $a > b$ sicchè $1/a < 1/b$, l'ultimo termine è positivo quindi:

(6.13) $$\mathcal{E}_d(t) > \mathcal{E}_{d_0}(t)$$

e ricordando (6.4) e (6.6):

(6.14) $$\mathcal{E}_g(t) > \mathcal{E}_d(t) > \mathcal{E}_{d_0}(t) = \mathcal{E}_{g_0}(t) .$$

Le (6.13) e (6.14) provano il teorema enunciato.

Appendice.

Riprendiamo (4.2). Supposto fissato t, potremo porre:

(A.1) $$h(s) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - s) .$$

La (4.2) diventa allora:

(A.2) $$\frac{1}{b}\int_0^\infty g(s)h(s)\,ds\int_0^\infty g'(s)h(s)\,ds \leqslant 0 .$$

Poichè (A.2) deve essere valida per ogni $h(s)$ di classe C_1, purchè $h(0) = 0$, con procedimento analogo a uno ben noto del calcolo delle variazioni, scegliamo $h(s)$ positiva nell'intervallo $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ (s_0 valore generico di $s > 0$, $\delta > 0$, $s_0 - \delta > 0$), nulla all'esterno dell'intervallo stesso. Si ha allora da (A.2), applicando poi il teorema della media (θ, e θ' numeri compresi fra -1 e $+1$):

$$\frac{1}{b}\int_0^\infty g(s)h(s)\,ds\int_0^\infty g'(s)h(s)\,ds = \frac{1}{b}\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} g(s)h(s)\,ds\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} g'(s)h(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{b}\,g(s_0 + \theta\delta)g'(s_0 + \theta'\delta)\left(\int_0^\infty h(s)\,ds\right)^2$$

Quindi per (A.2):

$$\frac{1}{b}\, g(s_0+\theta\delta)g'(s_0+\theta'\delta)\leqslant 0\ .$$

Passando al limite per $\delta \to 0$,

$$\frac{g(s_0)g'(s_0)}{b}\leqslant 0$$

e ponendo s in luogo di s_0 si ha subito (4.3).

Dimostriamo ora che da (4.3) seguono le ipotesi fatte sul segno di $g(s)$ e $g'(s)$ esposte al n. 1; dovremo però ammettere $b \neq 0$.

Infatti (4.3) si può scrivere:

$$\frac{(d/ds)g^2(s)}{b}\leqslant 0 \tag{A.3}$$

e $(d/ds)g^2(s)$ deve essere, salvo i punti isolati dove è nulla, di segno contrario a b, cioè non cambia mai di segno. Ma $(d/ds)g^2(s)$ non può essere positiva altrimenti $g^2(s)$ sarebbe positiva e crescente e quindi il suo limite per $s \to \infty$ non sarebbe nullo, contro le nostre ipotesi.

Dunque $b > 0$, $g^2(s)$ positiva decrescente e nulla solo per $s \to \infty$.

Quindi $g(s)$ è sempre dello stesso segno e segno positivo perchè tale è b. In definitiva $g(s)$ è positiva e decrescente, $g'(s)\leqslant 0$, conforme alle ipotesi del n. 1.

Passiamo ora a dimostrare, con un esempio, che (4.3), ossia le proprietà di $g(s)$ or ora ricordate, non sono sufficienti per assicurare (A.2).

A questo scopo poniamo:

$$g(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \Rightarrow g'(s) = -\frac{2}{(1+s)^3} \tag{A.4}$$

soddisfacenti certamente a (4.3). Anzi, tenendo conto che ora $b > 0$, in (A.2) si può sopprimere il fattore $1/b$. Allora per dimostrare che (A.2) può non essere valida, basterà scegliere una $h(s)$ in modo che i due integrali di (A.2) siano dello stesso segno.

A questo scopo si ponga (a numero positivo):

$$h_1(s) = +1\,,\quad s\in[0,a];\qquad h_1(s) = -1\,,\quad s\in(a,\infty)\,. \tag{A.5}$$

Valgono perciò le equazioni:

$$I_1 = \int_0^\infty g(s) h_1(s)\, ds = \int_0^a \frac{1}{(1+s)^2}\, ds - \int_a^\infty \frac{1}{(1+s)^2}\, ds = 1 - \frac{2}{1+a},$$

$$I_2 = \int_0^\infty g'(s) h_1(s)\, ds = \int_0^a g'(s)\, ds - \int_a^\infty g'(s)\, ds = 2g(a) - g(0) = \frac{2}{(1+a)^2} - 1 .$$

Ora, se $a = \frac{1}{2}$ si ha:

$$I_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0; \qquad I_2 = \frac{2\cdot 4}{9} - 1 = -\frac{1}{9} < 0 .$$

Ciò premesso, ricordando che $h(s)$ deve essere di classe C_1 e che $h(0) = 0$, costruiamo la funzione così definita: $(\delta > 0,\ a - \delta > \delta)$

$$h(s) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi s}{\delta}\right), \quad s \in [0, \delta); \qquad h(s) = 1, \quad s \in [\delta, a - \delta],$$

$$h(s) = \frac{1}{2\delta^3}\left((s-a)^3 - 3\delta^2(s-a)\right), \quad s \in (a-\delta, a+\delta);$$

$$h(s) = -1, \quad s \geqslant a + \delta .$$

Questa funzione $h(s)$ è di classe C_1, differisce da $h_1(s)$ solo negli intervalli $(0, \delta)$, $(a - \delta, a + \delta)$ dove per ogni s è minore, in modulo di 1. Quindi:

$$\text{(A.6)} \qquad \lim_{\delta \to 0} \int_0^\infty g(s) h(s)\, ds = \int_0^\infty g(s) h_1(s)\, ds ,$$

$$\text{(A.7)} \qquad \lim_{\delta \to 0} \int_0^\infty g'(s) h(s)\, ds = \int_0^\infty g'(s) h_1(s)\, ds .$$

Allora, per δ sufficientemente piccolo, e con $g(s)$ e $g'(s)$ espresse da (A.4), i due integrali a primo membro di (A.6) e (A.7) sono (se $a \equiv \frac{1}{2}$) dello stesso segno, quindi esiste una funzione $h(s)$ nulla per $s = 0$ e di classe C_1 in $(0, \infty)$ per cui (A.2) non è valida.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. COLEMAN, *Thermodynamics of Materials with Memory*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, XVII (1964), pp. 1-46.

[2] C. TRUESDELL, *Rational Mechanics*, Mc. Graw-Hill, New York, 1969. (Traduzione italiana di M. FICHERA COLAUTTI, *Contributi del Centro Linceo*, n. 20, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976).

[3] W. A. DAY, *The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory*, Springer - Verlag - Berlin, Heidelberg, New York (1972).

[4] W. A. DAY, *The Thermodynamics of Materials with Memory*, Liguori Napoli (1979), pp. 55-91.

[5] D. GRAFFI, *Sull'espressione dell'energia libera nei materiali visco-elastici lineari*, Annali di Matematica Pura e Applicata (IV), XCVIII, pp. 273-279.

[6] D. GRAFFI, *Qualche problema di elettromagnetismo*, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, edited by G. FICHERA-Pitman, London, 1976, pp. 129-144.

[7] B. COLEMAN - V. MIZEL, *On the stability of solutions of functional differential equations*, Archive of Rational Mechanics and Analysis, XXX (1968), pp. 173-196.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° dicembre 1981.