RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANCARLO SPINELLI

Problemi di meccanica relativistica con contatti striscianti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 109-118

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__109_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Problemi di meccanica relativistica con contatti striscianti.

GIANCARLO SPINELLI (*)

SOMMARIO - La dinamica relativistica dei sistemi presenta una differenza essenziale nei confronti della corrispondente dinamica classica: in generale in essa non vale il principio di azione e reazione. Ciò ha come prima conseguenza che nella generalizzazione relativistica delle equazioni cardinali della dinamica è necessario introdurre nella quantità di moto e nel momento delle quantità di moto dei termini dovuti alla presenza degli sforzi. Inoltre, quando il sistema viene spezzato nei suoi componenti, sorge il problema del legame tra le forze di interazione. Prendendo lo spunto da un caso particolare, si mostra come, per contatti striscianti e moto stazionario, le forze di azione e reazione siano ancora uguali e contrarie in ogni sistema di riferimento.

SUMMARY - The relativistic dynamics of extended systems has a peculiar difference with respect to the corresponding classical dynamics: generally the action and reaction principle no more holds. It follows therefore that, when giving the relativistic generalization of the cardinal equations of dynamics, terms due to the stresses have to be introduced in the momentum and in the angular momentum. Moreover, when decomposing the system in its parts, the problem of relating the interaction forces arises. Starting from a particular problem, it is shown that with sliding contacts and with steady motion the action and reaction forces are still equal and opposit in any reference frame.

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.

Lavoro svolto nell'ambito del GNFM del CNR.

1. Introduzione.

È noto come la relatività ristretta sia il campo prediletto dagli amanti dei paradossi. Nessun paradosso però ha mai retto ad una critica accurata. Per tutti è stata data una corretta interpretazione, mostrando per alcuni che l'effetto presunto era frutto soltanto di una errata interpretazione della teoria, trovando per altri che il fenomeno sussiste, ma che esso è solo apparentemente paradossale.

Sembra utile pertanto uno studio che fornisca dei metodi generali di soluzione per ampie classi di problemi di relatività ristretta.

In un precedente lavoro si è generalizzato il problema di Lewis e Tolman e per la sua soluzione si è ricavata una estensione al caso relativistico delle equazioni cardinali della dinamica per un continuo [1].

Qui si considera un particolare problema di moto di punti materiali su una guida allo scopo di iniziare una trattazione dei sistemi composti da più parti tra loro a contatto ed in moto relativo. Le difficoltà sorgono dal fatto che in meccanica classica il principio di azione e reazione gioca un ruolo fondamentale per la soluzione di questo tipo di problemi. Al contrario in relatività ristretta il principio di azione e reazione in generale non è verificato per tutti gli osservatori. Non solo le forze di interazione tra punti non a contatto possono dar luogo ad una coppia, ma anche le forze stesse possono non essere uguali e contrarie, persino per punti a contatto se essi hanno velocità differenti.

2. – Un problema di equilibrio con forze in movimento.

Si consideri, in un riferimento inerziale S, un'asta di lunghezza indefinita soggetta ad un vincolo che le permetta solo di traslare in direzione ad essa perpendicolare (fig. 1). Sull'asta agiscano due forze $\boldsymbol{F}_A$ ed $\boldsymbol{F}_B$ i cui punti di applicazione A e B scorrano con velocità rispettive $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Consideriamo la proiezione sull'asse y della prima equazione cardinale della dinamica relativistica [1, 2]

$$R_y^{(\text{ext})} = c^{-1}\frac{d}{dt}\int_V dV(\mu_0 U_y U_0 + c^{-2} t_{sy} U^s U_0)\,, \tag{1}$$

dove $R_y^{(\text{ext})}$ è la componente sull'asse y del risultante delle forze esterne,

μ_0 è la densità propria di massa propria dell'asta, U_α è la quadrivelocità dell'elemento dell'asta, t_{is} è l'ordinario tensore degli sforzi tridimensionale, gli indici latini vanno da 1 a 3, quelli greci da 0 a 3 e l'in-

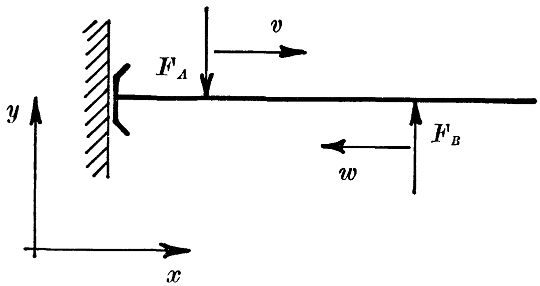

Figura 1

tegrazione è effettuata su un dominio tridimensionale contenente il sistema.

Sia inizialmente nulla la velocità dell'asta. La condizione perchè rimanga tale negli istanti successivi è

(2) $$R_y^{(\mathrm{ext})} = 0\,,$$

che ha come conseguenza

(3) $$F_{Ay} = -F_{By}\,,$$

come in meccanica classica.

Ciò che è profondamente diverso dal caso classico è la descrizione del sistema da parte di un riferimento inerziale S' che si muova rispetto al precedente S (che vede l'asta ferma) di moto traslatorio, rettilineo ed uniforme a velocità $\boldsymbol{u}$ lungo l'asse x dell'asta. In tale riferimento si ha

$_3$(4) $$F'_{Ay} = F_{Ay}(1 - uv/c^2)^{-1}(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

(5) $$F'_{By} = F_{By}(1 + uw/c^2)^{-1}(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Il problema è quello di giustificare come, pur essendo $R_y'^{(\mathrm{ext})} \neq 0$, l'asta non inizi a muoversi lungo l'asse y'.

Per poter applicare l'equazione (1) nel riferimento S' è necessario conoscere le componenti t'_{sy} (con $s = 1, 2, 3$) in tale riferimento. Per fare ciò consideriamo i singoli elementi della asta e per essi scriviamo l'equazione di movimento [3]

$$F^{\alpha(\text{ext})} = T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\,, \tag{6}$$

dove $F^{\alpha(\text{ext})}$ è la quadriforza esterna di volume (nulla nel nostro caso) e $T^{\alpha\beta}$ è il tensore energia quantità di moto la cui espressione è [3]

$$T^{ik} = \mu_0 U^i U^k + t^{ik} + c^{-2} t^{ir} U_r U^k\,, \tag{7}$$

$$T^{i0} = \mu_0 U^i U^0 + c^{-2} t^{ir} U_r U^0\,, \tag{8}$$

dove μ_0 è la densità propria di massa propria, t^{ik} è il tensore degli sforzi (a volte chiamato tensore degli sforzi relativo), $U^i = \gamma v^i = \gamma\, dx^i/dt$, $U^0 = \gamma c$ con $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$.

È proprio dalle eq. (6) che, con opportuni passaggi, si ricavano le equazioni cardinali della dinamica relativistica [1, 2]. Qui invece si vogliono esplicitare le eq. (6) in modo tale che, noto il movimento del sistema e le forze esterne applicate, si possano ottenere le componenti del tensore degli sforzi da usare nella eq. (1).

Consideriamo un generico riferimento nel quale l'asta si muova lungo l'asse delle x con velocità $\boldsymbol{u}$. In tale caso l'eq. (6) in cui si sostituiscano le eq. (7) e (8) dà (quando l'indice α si riferisce all'asse y):

$$0 = \frac{\partial t_{yx}}{\partial x}\gamma^2 + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + \gamma^2 \frac{u}{c^2}\frac{\partial t_{yx}}{\partial t}\,. \tag{9}$$

Consideriamo una sezione dell'asta ortogonale all'asse x. Integrando l'eq. (9) su tale sezione otteniamo (tenendo conto delle condizioni al contorno di tale superficie)

$$-p(x) = \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x}\tau_{yx} + \gamma^2 \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\tau_{yx}\,, \tag{10}$$

Per i simboli usati nell'equazione (10), detta $\boldsymbol{f}$ la forza per unità di superficie agente sulla superficie laterale dell'asta e detto l il contorno della sezione ortogonale all'asse dell'asta, $p(x)$ è la forza per unità di lunghezza data da

$$p(x) = \int_l f_y \, dl \, . \tag{11}$$

Con τ_{yx} si intende la componente sull'asse y della forza risultante (azione) che la parte a destra della sezione A ortogonale all'asse esercita sulla parte di sinistra:

$$\tau_{yx} = \int_A t_{yx} \, d\sigma \, . \tag{12}$$

Nel nostro caso il sistema di forze per unità di lunghezza applicate all'asta (fig. 1) è descritto dalle distribuzioni

$$F_{Ay} \delta(a + x - vt) \, , \tag{13}$$

$$F_{By} \delta(b + x + wt) \, , \tag{14}$$

dove $-a$ e $-b$ sono le posizioni delle due forze a $t = 0$. Nel sistema di riferimento S si ha $F_{Ay} = - F_{By}$ e l'eq. (10) diventa

$$F_{By}[\delta(b + x + wt) - \delta(a + x - vt)] = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \, , \tag{15}$$

avente come soluzione

$$\tau_{yx} = [H(a + x - vt) - H(b + x + wt)] F_{Ay} \, , \tag{16}$$

essendo H la funzione gradino di Heaviside.

Nel sistema S' l'eq. (10) diventa

$$F'_{Ay} \delta\left(a' + x' - \frac{v - u}{1 - uv/c^2} t'\right) + F'_{By} \delta\left(b' + x' - \frac{u + w}{1 + uw/c^2} t'\right) = \\ = \gamma_u^2 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x'} + \gamma_u^2 \frac{u}{c^2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t'} \, , \tag{17}$$

avente come soluzione

$$\tau_{yx} = F_{Av}\gamma_u^{-1}\left[H\left(a' + x' - \frac{v-u}{1-uv/c^2}t'\right) - \right.$$
$$\left. - H\left(b' + x' + \frac{u+w}{1+uw/c^2}t'\right)\right]. \tag{18}$$

Possiamo ora considerare il problema che ci eravamo posti dopo le eq. (4) e (5). Nel sistema S' la componente lungo l'asse y del risultante delle forze esterne è

$$R_y'^{(\mathrm{ext})} = F_{Av}\gamma_u^{-1}\frac{u}{c^2}(v+w)(1+uw/c^2)^{-1}(1-uv/c^2)^{-1}. \tag{19}$$

Il problema consiste nel giustificare come tale risultante diverso da zero sia compatibile con una componente nulla lungo l'asse y della velocità di ogni punto dell'asta. Per fare ciò basta calcolare il secondo membro della eq. (1). Il primo termine dell'integrando è nullo perchè i punti dell'asta hanno coordinata y' costante. Tenendo conto delle eq. (12) e (18) si ottiene

$$c^{-3}\frac{d}{dt}\int_V dV\, t_{sy}U^s U_0 = -F_{Av}\gamma_u u\frac{v-u}{c^2-uv} + F_{Bv}\gamma_u u\frac{u+w}{c^2+uw} =$$
$$= -F_{Av}\gamma_u^{-1}u(v+w)(c^2-uv)^{-1}(c^2+uw)^{-1}. \tag{20}$$

Si ottiene cioè che la variazione della regione nella quale non è nullo il tensore degli sforzi dà un termine che, nel formalismo della eq. (1), può venire interpretato come variazione della componente della quantità di moto lungo l'asse y, anche se gli elementi non hanno velocità lungo l'asse y. Si capisce allora come sia necessario un $R_y'^{(\mathrm{ext})} \neq 0$ per mantenere nulla la componente lungo l'asse y della velocità dell'asta.

3. Contatti striscianti: il principio di azione e reazione vale se il moto è stazionario.

Consideriamo il caso in cui le forze $\boldsymbol{F}_A$ ed $\boldsymbol{F}_B$ non sono applicate direttamente all'asta, ma a due punti materiali A e B vincolati senza attrito a scorrere sull'asta (fig. 2). Sul punto materiale A agisce la forza

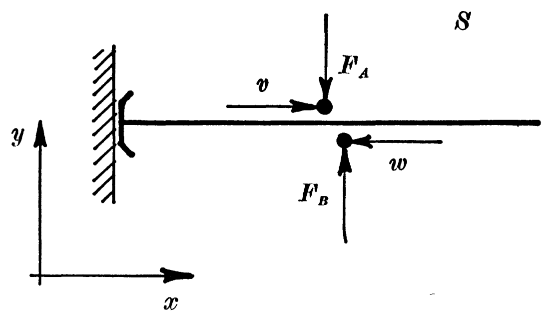

Figura 2

attiva $\boldsymbol{F}_A$ e la reazione vincolare $\boldsymbol{\varphi}_A$ che l'asta esercita su di essa. Il punto A esercita sull'asta una forza $\boldsymbol{\psi}_A$ (fig. 3). In meccanica classica vale il principio di azione e reazione e pertanto è

$$\boldsymbol{\varphi}_A = -\boldsymbol{\psi}_A . \tag{21}$$

In relatività ristretta ciò non è detto a priori. Mostriamo che la relazione (21) è ancora valida nel caso stazionario (asta di lunghezza infinita, velocità e forze costanti da tempo infinito).

Fisicamente $\boldsymbol{\varphi}_A$ e $\boldsymbol{\psi}_A$ sono dovute alla sovrapposizione di tutte le interazioni elementari tra il punto A e gli elementi dell'asta. Ciascuna di queste forze avrà una componente lungo l'asse y. L'integrale di tali componenti darà luogo alla φ_{A_y} quando consideriamo le forze elementari agenti sul punto e a ψ_{A_y} quando consideriamo quelle che il punto eser-

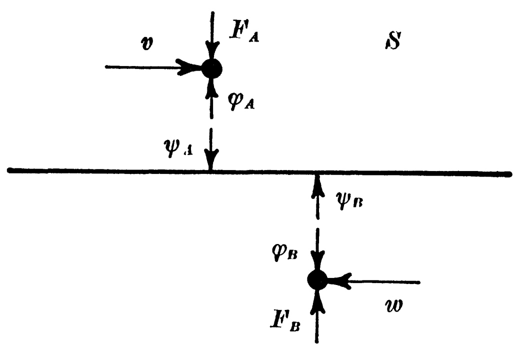

Figura 3

cita sull'asta. Per quanto riguarda le prime, esse sono tutte applicate al medesimo punto A in moto con velocità v nel sistema di riferimento S. La forza φ_{Av} si trasformerà dunque come una forza applicata ad un punto mobile. Nel sistema S' che trasla rispetto ad S con velocità u sarà

$$\varphi'_{Av} = \varphi_{Av}(1 - uv/c^2)^{-1}(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}} . \tag{22}$$

Quanto alle forze elementari che il punto esercita sull'asta esse sono applicate a punti solidali con l'asta. Sarebbe però errato dedurre da ciò che la componente verticale del risultante ψ_{Av} si trasforma come una forza ferma rispetto all'asta.

Le singole forze elementari infatti sono applicate a punti diversi dell'asse delle x e, anche se applicate a punti solidali con l'asta, sono però variabili nel tempo. Ciò implica problemi di non conservazione della simultaneità quando passiamo al sistema di riferimento S'.

Schematizziamo il problema. Nel caso stazionario le componenti lungo l'asse y delle forze per unità di lunghezza agenti sulla asta dipenderanno solo da $(x - vt)$ (stiamo per ora considerando solo le forze esercitate dal punto A). Sarà

$$f(x, t) = f(x - vt) , \tag{23}$$

e

$$\psi_{Av} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - vt)\, dx . \tag{24}$$

Passando al sistema di riferimento S' avremo corrispondentemente

$$f'(x', t') = f'\left(x' - \frac{v - u}{1 - uv/c^2}\, t'\right), \tag{25}$$

$$\psi'_{Av} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(x' - \frac{v - u}{1 - uv/c^2}\, t'\right) dx' . \tag{26}$$

Ricordiamo che le forze per unità di lunghezza sono invarianti al cambiare del sistema di riferimento (è questa l'ovvia conseguenza, nel caso monodimensionale dell'invarianza delle pressioni).

Si avrà pertanto che in corrispondenza dello stesso evento spaziotemporale sarà uguale la forza per unità di lunghezza valutata dai due sistemi di riferimento S ed S'.

Per la stazionarietà del problema possiamo scegliere nella eq. (26) un qualunque tempo t' costante; per comodità scegliamo $t' = 0$. Integrare la f' lungo la linea $t' = 0$ equivale, per le trasformazioni di Lorentz e per l'invarianza delle forze per unità di lunghezza, a integrare la $f(x - vt)$ lungo la linea

$$t = ux/c^2\,. \tag{27}$$

Tenendo poi conto che

$$dx' = \gamma_u^{-1}\,dx\,, \tag{28}$$

otteniamo

$$\psi'_{Av} = \int_{-\infty}^{+\infty} f[(1 - uv/c^2)x]\gamma_u^{-1}\,dx = (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}(1 - uv/c^2)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,, \tag{29}$$

da cui

$$\psi'_{Av} = (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}(1 - uv/c^2)^{-1}\psi_{Av}\,. \tag{30}$$

Vediamo così che la componente lungo l'asse y del risultante delle forze che il punto materiale A esercita sull'asta si trasforma come una forza diretta come y e il cui punto di applicazione si muova con velocità v lungo l'asse x. Le forze ψ_{Av} e φ_{Av} si trasformano allora con la stessa legge. Pertanto se sono uguali e contrarie in un sistema di riferimento lo sono anche in ogni altro.

Consideriamo ora il sistema di riferimento inerziale S^* che si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme rispetto ad S con velocità

$$u^* = \frac{c^2}{v}[1 - (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}]\,. \tag{31}$$

Per tale sistema i punti dell'asta hanno una velocità uguale e contraria a quella del punto A. Considerando dunque le interazioni tra elementi dell'asta e punto materiale A, per simmetria esse dovranno essere uguali e contrarie in S^*.

Sommando tali interazioni dovrà dunque essere

$$\psi^*_{Av} = -\,\varphi^*_{Av}\,, \tag{32}$$

in S^*. Per quanto prima dimostrato, tali forze dovranno allora essere uguali e contrarie in ogni sistema di riferimento.

Con un ragionamento del tutto analogo si trova che

$$\psi_{By} = -\varphi_{By}, \tag{33}$$

in ogni sistema di riferimento.

Poichè l'asta non accelera lungo l'asse y, le equazioni di moto per i punti A e B danno

$$F_{Ay} = -\varphi_{Ay}, \tag{34}$$

e

$$F_{By} = -\varphi_{By}, \tag{35}$$

in ogni sistema di riferimento.

Pertanto il problema introdotto in questo paragrafo (fig. 2) è ricondotto al problema del paragrafo precedente (fig. 1).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Spinelli, Nuovo Cimento, **54** B (1979), p. 145.
[2] G. Cavalleri - G. Spavieri - G. Spinelli, Nuovo Cimento, **53** B (1979), p. 385; per una applicazione ibid., **61** B (1981), p. 289.
[3] C. Møller, *The Theory of Relativity*, (Oxford, 1969), Chap. 65.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 maggio 1982.