RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 21-42

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__21_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 66 (1982)

Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali.

Gabriele H. Greco (*)

Introduzione.

Analogamente a quanto accade nelle trattazioni usuali della teoria della misura e dell'integrazione (vedi, per es. [1], [5]), nel § 1 di questo articolo, consideriamo una famiglia $\mathbf{H}$ di sottoinsiemi di X, la famiglia $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ delle funzioni misurabili rispetto ad $\mathbf{H}$, una funzione d'insieme $\delta\colon \mathbf{H} \to [0, +\infty]$ monotona definita su $\mathbf{H}$; e definiamo l'integrale $\int_X f\, d\delta$ di una qualsiasi funzione $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ rispetto alla funzione d'insieme δ mediante la posizione $\int_X f\, d\delta = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}\, dt$, dove α è una funzione crescente, definita su $\mathcal{P}(X)$ ed uguale a δ su $\mathbf{H}$ (questa definizione è una buona definizione soltanto quando f è $\mathbf{H}$-misurabile, cioè $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$). Inoltre chiamiamo «integrali» quei funzionali $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$, definiti su particolari famiglie di funzioni, dette «domini di integrazione», che verificano per ogni $a \in [0, +\infty)$ e per ogni $f, g \in \mathbf{B}$ queste cinque proprietà:

$$T(0) = 0\,; \tag{1}$$

$$T(f) \leqslant T(g) \qquad \text{se } f \leqslant g\,; \tag{2}$$

$$T(f) = T(f \wedge a) + T(f \vee a - a)\,; \tag{3}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italy.

$$(4) \qquad T(f) = \lim_n T(f \wedge n) \; ;$$

$$(5) \qquad T(f) = \lim_n T\left(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) ;$$

queste proprietà, che sono tra loro indipendenti (vedi esempi 1, 2, 3), possono essere automaticamente soddisfatte in alcuni casi più o meno evidenti (vedi Proposizioni 1.2 e 1.3; per esempio, se ogni $f \in \mathbf{B}$ è limitata, la (4) è verificata; oppure, se esiste $f \in \mathbf{B}$ con $T(f) < +\infty$, la (1) segue da (3) ...).

Nel § 2 si dimostra nel teorema di rappresentazione che ogni integrale si può rappresentare come integrale rispetto ad una funzione d'insieme monotona, si descrivono *tutte* le funzioni d'insieme che rappresentano un dato integrale; infine, come conseguenza del teorema di rappresentazione, si dimostra che ogni integrale è omogeneo. L'omogeneità degli integrali (presente nella loro definizione in [3] e richiesta in alcune proposizioni in [2]) dipende da tutte e cinque le proprietà che definiscono un integrale (vedi Esempi 1, 2, 3).

Nel § 3 si danno condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia valido l'analogo del lemma di Fatou (vedi Teorema 3.4 e Lemma 3.2) e condizioni sufficienti affinchè sia valido l'analogo del teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata (vedi Corollario 3.8 e Teorema 3.9). Il tipo di convergenza che entra in gioco in questa analisi sulla continuità e semicontinuità degli integrati è la convergenza uniforme di funzioni in $\overline{\mathbf{R}}^X$, dove $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è la retta estesa metrizzata.

Nel § 4 si danno delle condizioni affinchè un dato integrale si possa estendere in maniera univoca su un dato dominio di integrazione; e si afferma il ruolo di integrale inferiore (risp. superiore) dell'integrale $\int_X - \, d\alpha_T$ (risp. $\int_X - \, d\beta_T$), dove α_T (risp. β_T) è la minima (risp. massima) funzione d'insieme monotona che rappresenta un dato integrale T.

Le notazioni e la terminologia, usate in questo articolo sono in generale quelle usuali. Se X è un insieme non vuoto, H un suo sottoinsieme, f una funzione definita su X, indichiamo, con $\mathcal{P}(X)$, φ_H, $f|_H$, $\{f > t\}$, rispettivamente l'insieme delle parti di X, la funzione caratteristica di H definita su X da $\varphi_H(x) = 0$ (risp. 1) se $x \notin H$ (risp. se $x \in H$), la restrizione di f ad H, l'insieme $\{x \in X : f(x) > t\}$; con $\sup_H f$ e $\inf_H f$ indichiamo rispettivamente il numero reale finito o infinito $\sup\{f(x) : x \in H\}$ e $\inf\{f(x) : x \in H\}$, qualora $H \neq \emptyset$. Inoltre conveniamo che $0\cdot(+\infty)=0$ e $\inf\emptyset=0$. Con $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{R}$ indichiamo, rispettivamente, l'insieme dei numeri interi $n>0$, e l'insieme dei numeri reali; poniamo

$$[0,+\infty]=\{x\in\mathbf{R}: x>0\}\cup\{+\infty\},$$

$$[0,\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant 0\}, \qquad (0,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x>0\}.$$

Sia $\mathrm{H}\in\mathcal{T}(X)$ una famiglia d'insiemi non vuota, una funzione d'insieme $\delta:\mathrm{H}\to[0,+\infty]$ si dirà «monotona» se $\delta(\emptyset)=0$, quando $\emptyset\in\mathrm{H}$, e se $\delta(A)\leqslant\delta(B)$, quando $A, B\in\mathrm{H}$ e $A\subset B$. Seguendo le notazioni corrispondenti di Meyer [6], si dirà, per esempio, che una famiglia d'insiemi è «stabile per $(\cap f)$» e «stabile per $(\cup n)$», se H è, rispettivamente, chiusa per intersezioni finite e per unioni numerabili; simboli di stabilità analoghi, sono usati per le operazioni di «inf» (indicata con «$\wedge$») e di «sup» (indicata con «$\vee$»).

Ringrazio il Prof. Mario Miranda con cui ho, più volte, discusso l'argomento trattato in questo articolo.

1. Definizione d'integrale.

Sia X un insieme non vuoto e sia $[0,+\infty]^X$ la classe delle funzioni $f: X\to[0,+\infty]$. Una famiglia di funzioni non vuota $\mathbf{B}\subset[0,+\infty]^X$ si dice *dominio di integrazione su* X, se le funzioni af, $f\wedge a$, $f\vee a-a$ appartengono a $\mathbf{B}$, qualora $a\in[0,+\infty)$ e $f\in\mathbf{B}$. Poichè conveniamo the $0\cdot(+\infty)=0$, ogni dominio d'integrazione contiene la funzione nulla 0.

Sia $\mathbf{B}\subset[0,+\infty]^X$ un dominio d'integrazione su X, un'applicazione $T:\mathbf{B}\to[0,+\infty]$ si dice *integrale sul dominio di integrazione* $\mathbf{B}$, se per ogni $f, g\in\mathbf{B}$ e per ogni $a\in[0,+\infty)$ valgono le seguenti proprietà:

(1) $$T(0)=0,$$

(2) $$\text{se } f\leqslant g, \qquad \text{allora } T(f)\leqslant T(g),$$

(3) $$T(f)=T(f\wedge a)+T(f\vee a-a),$$

(4) $$T(f)=\lim_{n\to+\infty}T(f\wedge n),$$

(5) $$T(f)=\lim_{n\to+\infty}T\left(f\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right).$$

Queste cinque proprietà saranno indicate nel seguito come «*proprietà dell'integrale*».

NOTA 1. In [3] ho chiamato «integrale monotono» ogni applicazione T, definita su un dominio d'integrazione, che verifica le cinque proprietà precedenti ed è omogenea, cioè verifica anche la seguente proprietà:

$$(1)' \qquad T(af) = aT(f) \text{ per ogni } a \in [0, +\infty) \text{ e } f \in \mathbf{B};$$

nel seguito si dimostra che ogni integrale, definito come sopra, è omogeneo (vedi Corollario 2.1) e che la proprietà di omogeneità dipende da tutte le cinque proprietà dell'integrale (vedi Esempi 1, 2, 3). ∎

L'insieme $[0, +\infty]^X$ delle funzioni numeriche definite su X è il più grande dominio d'integrazione su X; ogni unione o intersezione di domini di integrazione su X è un dominio di integrazione. Il dominio di integrazione su X, generato da una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ è

$$B_f = \{a(f \wedge b - f \wedge c) \colon a, c, b \in [0, +\infty],\ a < +\infty \text{ e } 0 \leqslant c < b \leqslant +\infty\};$$

mentre quello generato da una famiglia di funzioni $\mathbf{D} \subset [0, +\infty]^X$ è $\{0\}$ se $\mathbf{D} = \emptyset$, altrimenti è $\bigcup_{f \in \mathbf{D}} \mathbf{B}_f$. Se $\mathbf{H}$ è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X, il dominio d'integrazione generato da $\mathbf{H}$ è $\{a\varphi_H \colon H \in \mathbf{H} \text{ e } a \in [0, +\infty)\}$, dove $\varphi_H \colon X \to \{0, 1\}$ indica la funzione caratteristica dell'insieme H. Il più importante dominio di integrazione, associato ad una famiglia di insiemi $\mathbf{H} \subset \mathfrak{P}(X)$, contenente l'insieme vuoto, è quello delle funzioni $\mathbf{H}$-misurabili (vedi [4]). Una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ è detta $\mathbf{H}$-*misurabile*, se per ogni $a, b \in (0, +\infty)$ con $a > b$ esiste un insieme $H \in \mathbf{H}$ tale che

$$(6) \qquad \{f \geqslant a\} \subset H \subset \{f > b\};$$

la classe delle funzioni $\mathbf{H}$-misurabili, indicata con il simbolo $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è un dominio d'integrazione con queste ulteriori proprietà:

(7) Se $f \wedge 1,\ f \vee 1 - 1 \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$, allora $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$.

(8) Se $\{f_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ è una rete di funzioni e per ogni $n \in \mathbf{N}$ la rete $\{f_j \wedge n\}_j$ converge uniformemente a $f \wedge n$, allora $f \in \mathcal{M}^+ \cdot \cdot (X, \mathbf{H})$.

Inoltre (vedi [4])

(9) H è stabile per $(\cap f)$ (risp. $(\cup f)$) se e solo se $\mathcal{M}^+(X, \mathrm{H})$ è stabile per $(\wedge f)$ e (risp. $(\vee f)$);

(10) H è stabile per $(\cap f, \cup f)$ se e solo se $\mathcal{M}_+(X, \mathrm{H})$ è stabile per somme finite;

(11) H è stabile $(\cap n)$ (risp. $(\cup n)$) se e solo se $\mathcal{M}^+(X, \mathrm{H})$ è stabile per $(\wedge n)$ (risp. $(\vee n)$); in questo caso una f è H-misurabile se e solo se per ogni $a \in (0, +\infty)$ l'insieme $\{f \geqslant a\}$ (risp. $\{f > a\}$) appartiene a H.

Sia $\mathrm{H} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \in \mathrm{H}$. Se $\delta\colon \mathrm{H} \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme monotona, definiamo l'applicazione $\int_X - d\delta\colon \mathcal{M}^+(X, \mathrm{H}) \to [0, +\infty]$ mediante la posizione $\int_X f\, d\delta = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}\, dt$, dove $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è una qualsiasi funzione d'insieme monotona tale che $\alpha(A) = \delta(A)$ per ogni $A \in \mathrm{H}$; questa è più che buona definizione, perchè, come si è dimostrato in [4], una funzione $f \in [0, +\infty]^X$ è H-misurabile se e solo se per ogni coppia di funzioni d'insieme $\gamma, \beta\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ monotone e, tali che $\gamma(A) = \beta(A)$ per ogni $A \in \mathrm{H}$, risulta

$$\int_0^{+\infty} \beta\{f > t\}\, dt = \int_0^{+\infty} \gamma\{f > t\}\, dt\,.$$

L'applicazione $\int_X - d\delta\colon \mathcal{M}^+(X, \mathrm{H}) \to [0, +\infty]$ è l'unico integrale, definito sul dominio d'integrazione $\mathcal{M}^+(X, \mathrm{H})$, che sulle funzioni caratteristiche d'insieme φ_H vale $\delta(H)$ per ogni $H \in \mathrm{H}$; essa è detta «*integrale rispetto alla funzione d'insieme monotona* δ».

Le proprietà (1), (2), (3), (4), (5) dell'integrale sono indipendenti ed, inoltre, ogni applicazione T che verifica solo quattro di esse può non essere omogenea, come si deduce da questi esempi.

Esempio 1. Sia $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ un dominio d'integrazione su X. L'unica applicazione $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ che verifica soltanto le proprietà (2), (3), (4), (5) dell'integrale, è definita dalla posizione $T(f) = +\infty$ per ogni $f \in \mathbf{B}$. ■

Esempio 2. Sia $X = \{0, 1\}$. L'applicazione

$$T\colon [0, +\infty]^X \to [0, +\infty],$$

definita da $T(f) = f(0)\cdot f(1)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^X$ verifica soltanto le proprietà (1), (2), (4), (5) dell'integrale e non è omogenea. ■

Esempio 3. Sia $X = [0, +\infty)$ e sia $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Siano

$$T_1, T_2, T_3\colon \mathbb{B}_f \to [0, +\infty)$$

le applicazioni, definite sul dominio di integrazione $\mathbb{B}_f = \{a(f\wedge b - f\wedge c)\colon a \in [0, +\infty) \text{ e } 0 \leqslant c < b \leqslant +\infty\}$ dalle posizioni

$$T_1(a(f\wedge b - f\wedge c)) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \neq +\infty, \\ a^2 & \text{se } b = +\infty, \end{cases}$$

$$T_2(a(f\wedge b - f\wedge c)) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \neq 0, \\ a^2 & \text{se } c = 0, \end{cases}$$

$$T_3(a(f\wedge b - f\wedge c)) = \begin{cases} 0 & a = 0, \\ b - c & \text{se } a \neq 0, \end{cases}$$

per ogni $a \in [0, +\infty)$ e per ogni $b, c \in [0, +\infty]$ con $0 \leqslant c < b \leqslant +\infty$. L'applicazione T_1 verifica solo le proprietà (1), (2), (3), (5) dell'integrale; l'applicazione T_2 verifica solo le proprietà (1), (2), (3), (4); l'applicazione T_3 verifica solo le proprietà (1), (3), (4), (5). Le applicazioni T_1, T_2, T_3 non sono omogenee. ■

Concludiamo questo paragrafo elencando alcune proposizioni riguardanti le proprietà di un integrale: la Proposizione 1.1 permette di scrivere in forma più compatta le proprietà (4) e (5) dell'integrale mediante la proprieta (4) + (5) (vedi anche la prossima nota 2); le Proposizioni 1.2 e 1.3 presentano alcune situazioni che si trovano in letteratura (vedi, per esempio, Teorema 6.4 in [2]), in ipotesi più forti.

Proposizione 1.1. *Un'applicazione* $T\colon \mathbb{B} \to [0, +\infty]$, *definita sul dominio d'integrazione* $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]$ *è un integrale se e solo se verifica* *le proprietà* (1), (2), (3) *dell'integrale e, inoltre, verifica la proprietà*

$$(4)+(5) \qquad T(f) = \lim_{n\to+\infty} T\left(f\wedge n - f\wedge \frac{1}{n}\right).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che T sia un integrale, dimostriamo che T verifica (4) + (5). Per ogni $f\in\mathbb{B}$ si hanno le uguaglianze

$$\left(f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\right)\wedge\left(1-\frac{1}{n}\right) = (f\vee 1 - 1)\wedge(n-1)$$

e

$$\left[\left(f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\right)\vee\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]-\left(1-\frac{1}{n}\right) = (f\wedge 1)\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\,;$$

quindi per la proprietà (3) dell'integrale risulta

$$T\left(f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\right) = T[(f\vee 1-1)\wedge(n-1)] + T\left[(f\wedge 1)\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right];$$

passando al limite per $n\to+\infty$ in questa ultima uguaglianza si ottiene (4) + (5), in virtù di (3), (4), (5). Viceversa, supposto che T verifichi (1), (2), (3) e (4) + (5), dimostriamo che T è un integrale. Per ogni $f\in\mathbb{B}$ e $n\in\mathbb{N}$ si hanno le disuguaglianze

$$f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\leqslant f\wedge n\leqslant f \qquad \text{e} \qquad f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\leqslant f\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\leqslant f\,;$$

da queste risulta, in virtù di (2),

$$T\left(f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\right)\leqslant T(f\wedge n)\leqslant T(f)$$

e

$$T\left(f\wedge n - f\wedge\frac{1}{n}\right)\leqslant T\left(f\vee\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)\leqslant T(f)\,;$$

quindi passando al limite per $n\to+\infty$, si ottiene (4) e (5). ■

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia* $T\colon \mathbb{B}\to[0,+\infty]$ *un'applicazione definita sul dominio di integrazione* $\mathbb{B}$. *Indichiamo con* $\beta_T\colon \mathcal{P}(X)\to[0,+\infty]$ *la* *funzione d'insieme definita da* $\beta_T(A) = \inf\{T(f)\colon \varphi_A \leqslant f \text{ e } f \in \mathbf{B}\}$. *Se la applicazione* T *verifica le proprietà* (1), (2), (3), (4) *dell'integrale ed è tale che* $\beta_T\{f > 0\} < +\infty$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$, *allora* T *è un integrale.*

Dimostrazione. Per dimostrare che T verifica la proprietà (5) è sufficiente dimostrare che per ogni $f \in \mathbf{B}$ risulta $\lim\limits_n T(f \wedge 1/n) = 0$, poichè $T(f) = T(f \vee 1/n - 1/n) + T(f \wedge 1/n)$. Essendo $\beta_T\{f > 0\} < +\infty$, esiste una funzione $g \in \mathbf{B}$ tale che $g \geqslant \varphi_{\{f>0\}}$ e $T(g) < +\infty$; quindi, avendosi per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $n > 1$ la diseguaglianza

$$f \wedge \frac{1}{n} \leqslant g \wedge \frac{1}{n-1} - g \wedge \frac{1}{n}, \qquad \text{risulta } T\left(f \wedge \frac{1}{n}\right) \leqslant T\left(g \wedge \frac{1}{n-1} - g \wedge \frac{1}{n}\right);$$

passando al limite in questa ultima diseguaglianza si ha $\lim\limits_n T(f \wedge \wedge 1/n) = 0$, perchè

$$T\left(g \wedge \frac{1}{n-1} - g \wedge \frac{1}{n}\right) = T\left(g \wedge \frac{1}{n-1}\right) - T\left(g \wedge \frac{1}{n}\right). \qquad \blacksquare$$

Proposizione 1.3. *Sia* $\mathbf{B}$ *un dominio di integrazione su* X *con una di queste proprietà*

i) $f \in \mathbf{B} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n[f \wedge n - f \wedge (n-1)] \in \mathbf{B}$,

ii) $f \in \mathbf{B} \Rightarrow f^2 \in \mathbf{B}$.

Ogni applicazione $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty)$ *con le proprietà* (2), (3), (5) *dell'integrale, tale che esiste una costante* $a \in (0, +\infty)$ *con* $a \neq 1$ *per la quale* $T(af) = aT(f)$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$, *è un integrale.*

Dimostrazione. Per dimostrare che T è un integrale, è sufficiente verificare che $\lim\limits_n T(f \vee n - n) = 0$ per ogni $f \in \mathbf{B}$. Perciò sia $f \in \mathbf{B}$, chiamiamo g la funzione f^2 o la funzione $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n[f \wedge n - f \wedge (n-1)]$, a seconda che $\mathbf{B}$ verifica i) o ii); in ambedue questi casi risulta $(f \vee n - n) \leqslant g/n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Poniamo $b = a$ (risp. $= a^{-1}$) se $a > 1$ (risp. $a < 1$); poichè $T(ah) = aT(h)$ per ogni $h \in \mathbf{B}$, risulta $T(g/b^n) = T(g)/b^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; quindi, essendo $\lim\limits_n T(g/b^n) = \lim\limits_n T(g)/b^n = 0$, risulta $\lim\limits_n T(g/n) = 0$.

Dunque $\lim\limits_n T(f \vee n - n) = 0$, poichè $T(f \vee n - n) \leqslant T(g/n)$. $\blacksquare$

NOTA 2. La Proposizione 1.1 suggerisce una nuova definizione di integrale T, ottenuta modificando leggermente la definizione di dominio di integrazione (cioè $\mathbf{B}$ si suppone che sia una famiglia non vuota contenente le funzioni af e $f\wedge b - f\wedge c$, ogni qualvolta $f \in \mathbf{B}$, $a, b, c \in [0, +\infty)$ con $0 < c < b < +\infty$) e obbligando T a verificare le proprietà (1), (2), (3), (4) + (5). Questa nuova definizione continua a soddisfare tutte le proposizioni, riguardanti un integrale T, presenti in questo articolo. ■

2. Teorema di rappresentazione ed omogeneità dell'integrale.

Sia $T: \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ un integrale, definito sul dominio d'integrazione $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$; siano $\alpha_T, \beta_T: \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ le funzioni d'insieme monotone definite da

$$\alpha_T(A) = \sup\{T(f): f \in \mathbf{B}, f \leqslant \varphi_A\},$$

$$\beta_T(A) = \inf\{T(f): f \in \mathbf{B}, f \geqslant \varphi_A\},$$

dove conveniamo che $\inf \emptyset = +\infty$. Si dirà che una funzione d'insieme $\gamma: \mathbf{H} \to [0, +\infty]$, dove $\mathbf{H} \subset \mathcal{T}(X)$ e $\emptyset \in \mathbf{H}$, *rappresenta* l'integrale T: $B \to [0, +\infty]$, se $\mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})$ e $T(f) = \int_X f\, d\gamma$ per ogni $f \in \mathcal{M}^+\cdot$ $\cdot(X, \mathbf{H})$.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE. *Sia $T: \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ un integrale, e $\mathbf{H} \subset \mathcal{T}(X)$ con $\emptyset \in \mathbf{H}$. Una funzione d'insieme monotona $\gamma: \mathbf{H} \to$ $\to [0, +\infty]$ rappresenta T se e solo se $\mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{N})$ e $\alpha_T(H) \leqslant \gamma(H) \leqslant$ $\leqslant \beta_T(H)$ per ogni $H \in \mathbf{H}$.*

COROLLARIO 2.1 (omogeneità dell'integrale). *Ogni integrale $T: \mathbf{B} \to$ $\to [0, +\infty)$ è omogeneo, cioè verifica*

$$(1)' \qquad T(af) = aT(f) \qquad \textit{per ogni } a \in [0, +\infty). \qquad ■$$

Questo corollario segue direttamente dal teorema di rappresentazione, poichè ogni integrale $\int_X \cdot\, d\alpha$ rispetto ad una funzione d'insieme monotona α è omogeneo, e la funzione d'insieme α_T rappresenta T.

Poichè per $\mathbf{H} = \mathcal{T}(X)$ risulta $\mathcal{M}^+(X, \mathbf{H}) = [0, +\infty)^X$, si osserva facilmente che il teorema di rappresentazione è equivalente alla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia* $T: \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale. Una funzione d'insieme* $\gamma: \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ *rappresenta* T *se e solo se* $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$.

Alla dimostrazione della Proposizione 2.2 premettiamo questi due lemmi.

LEMMA 2.3. *Sia* $f \in [0, +\infty]^X$. *Valgono le seguenti disuguaglianze per ogni* $n, i \in \mathbf{N}$.

$$\text{(i)}\quad (2f)\wedge\frac{i+1}{2^{n-1}} - (2f)\wedge\frac{i}{2^{n-1}} \leqslant f\wedge\frac{i+1}{2^n} - f\wedge\frac{i-1}{2^n},$$

$$\text{(ii)}\quad f\wedge\frac{i+1}{2^n} - f\wedge\frac{i}{2^n} \leqslant (2f)\wedge\frac{2i}{2^n} - (2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}. \qquad \blacksquare$$

LEMMA 2.4. *Sia* $T: \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale sul dominio di integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$. *Allora* $T(2f) = 2T(f)$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2.4. Dalla diseguaglianza (i) del Lemma 2.3 e dalla proprietà (2) dell'integrale T segue che

$$(*)\quad T\left[(2f)\wedge\frac{i+1}{2^{n-1}} - (2f)\wedge\frac{i}{2^{n-1}}\right] \leqslant T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n} - f\wedge\frac{i-1}{2^n}\right) \quad \forall i \in \mathbf{N};$$

da $(*)$, in virtù delle proprietà (3), (4) dell'integrale T si ottiene

$$T\left[(2f)\vee\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} T\left[(2f)\wedge\frac{i+1}{2^{n-1}} - (2f)\wedge\frac{i}{2^{n-1}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n} - f\wedge\frac{i}{2^n}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} T\left(f\wedge\frac{i}{2^n} - f\wedge\frac{i-1}{2^n}\right) =$$
$$= T\left(f\vee\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) + T(f),$$

cioè

$$(**)\quad T\left[(2f)\vee\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \leqslant T\left(f\vee\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) + T(f).$$

Per le proprietà (2) e (5) di T, passando al limite per $n \to +\infty$ in $(**)$, si ottiene

$$(***)\quad T(2f) \leqslant 2T(f).$$

Dalla disuguaglianza (ii) del Lemma 2.3 e dalla seguente diseguaglianza

$$(2f)\wedge\frac{2i}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}\leqslant(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-2}{2^n},$$

vera per ogni $i, n\in\mathbf{N}$, segue, in virtù della proprietà (2) di T, per ogni $i\in\mathbf{N}$

$$(*)' \qquad T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n}-f\wedge\frac{i}{2^n}\right)\leqslant T\left[(2f)\wedge\frac{2i}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}\right],$$

$$(*)'' \qquad T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n}-f\wedge\frac{i}{2^n}\right)\leqslant T\left[(2f)\wedge\frac{2i-1}{2^n}-(2f)\wedge\frac{2i-2}{2^n}\right].$$

Da $(*)'$, $(*)''$, per le proprietà (3) e (4) di T si ha

$$2T\left(f\vee\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=2\sum_{i=1}^{\infty}T\left(f\wedge\frac{i+1}{2^n}-f\wedge\frac{i}{2^n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}T\left[(2f)\wedge\frac{i}{2^{n-1}}-(2f)\wedge\frac{i-1}{2^{n-1}}\right]=T(2f);$$

cioè

$$(**)' \qquad 2T\left(f\vee\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)\leqslant T(2f).$$

Passando al limite per $n\to+\infty$ nella disuguaglianza $(**)'$, in virtù delle proprietà (2), (3) di T si ha

$$(***)' \qquad 2T(f)\leqslant T(2f).$$

Infine da $(***)$ e da $(***)'$ si ottiene $T(2f)=2T(f)$ per ogni $f\in\mathbf{B}$. ■

Dimostrazione della Proposizione 2.2. Sia $f\in\mathbf{B}$. Dal Lemma 2.4 risulta

$$(*) \qquad T(2^n f)=2^n T(f) \qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N};$$

inoltre si ha

$$(**) \qquad f\wedge n-f\wedge\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\varphi_{\{f>i/2^n\}}\leqslant f.$$

Se $\gamma\colon \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme tale che $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$ si ottiene da (*), (**) e dalla proprietà (3) di T, la disuguaglianza

$$(**)' \qquad T\left(f\wedge n - f\wedge\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\gamma\left\{f>\frac{i}{2^n}\right\} \leqslant T(f)\ ;$$

passando al limite per $n \to +\infty$, in virtù della Proposizione 1.1, risulta $T(f) = \int f\,d\gamma$, poichè

$$\int_X f\,d\gamma = \lim_n \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\gamma\left\{f>\frac{i}{2^n}\right\}.$$

Quindi γ rappresenta l'integrale T. Il viceversa, cioè ogni γ che rappresenta T è tale che $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$ è una conseguenza diretta della definizione delle funzioni d'insieme α_T e β_T. ∎

3. Sulla continuità e semicontinuità dell'integrale.

Si è visto nel teorema di rappresentazione che ogni integrale è restrizione di un integrale del tipo $\int_X - \,d\alpha$, dove $\alpha\colon \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme monotona; quindi nell'analisi, che presentiamo in questo paragrafo, sulla continuità e semicontinuità dell'integrale, non mancheremo di generalità nell'usare solo integrali di questo tipo. Si dirà che una rete di funzioni $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$, indiciata su un insieme diretto J, *converge uniformemente in* $\overline{\mathbf{R}}^X$ verso la funzione $f \in [0, +\infty]^X$, se la rete $\{f_j\wedge n\}_j$ converge uniformemente verso $f\wedge n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si osserva che una condizione necessaria, affinchè valga l'uguaglianza $\int_X f\,d\alpha = \lim_j \int_X f_j\,d\alpha$ per ogni funzione d'insieme monotona α, è che la rete $\{f_j\}_j$ converga uniformemente in $\overline{\mathbf{R}}^X$. A proposito di questo tipo di convergenza uniforme valgono questi tre lemmi, facili da dimostrare:

LEMMA 3.1. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *e* $f \in [0, +\infty]^X$. *La rete* $\{f_j\}_j$ *converge uniformemente in* $\overline{\mathbf{R}}^X$ *verso* f *se e solo se sono verificate le seguenti condizioni*

i) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J}\left[\sup_X (f\wedge n - f_j)\right] \leqslant 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,

ii) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J}\left[\sup_X (f_j\wedge n - f)\right] \leqslant 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$. ∎

LEMMA 3.2. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J}\subset[0,+\infty]^X$ *una rete e* $f\in[0,+\infty]^X$. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J}\left[\sup_X(f\wedge n-f_j)\right]\leqslant 0$ *per ogni* $n\in\mathbf{N}$,

ii) $\inf_A(f)\leqslant\operatorname*{minlim}_{j\in J}\left[\inf_A(f_j)\right]$ *per ogni* $A\in\mathcal{T}(X)$. ■

LEMMA 3.3. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J}\subset[0,+\infty]^X$ *una rete e* $f\in[0,+\infty]^X$. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J}\left[\sup_X(f_j\wedge n-f)\right]\leqslant 0$ *per ogni* $n\in\mathbf{N}$,

ii) $\operatorname*{maxlim}_{j\in J}\left[\sup_A(f_j)\right]\leqslant\sup_A(f)$ *per ogni* $A\in\mathcal{T}(X)$ *con* $A\neq\emptyset$. ■

TEOREMA 3.4. *Sia* $\{f_j\}_{j\in J}\subset[0,+\infty]^X$ *una rete e* $f\in[0,+\infty]^X$. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\inf_A(f)\leqslant\operatorname*{minlim}_{j\in J}\left[\inf_A(f_j)\right]$ *per ogni* $A\in\mathcal{T}(X)$,

ii) $\int_X f\,d\alpha\leqslant\operatorname*{minlim}_{j\in J}\int_X f_j\,d\alpha$ *per ogni* $\alpha\colon\mathcal{T}(X)\to[0,+\infty]$ *monotona.*

DIMOSTRAZIONE. i) $\Rightarrow$ ii). In virtù del Lemma 3.2 la i) è equivalente alla proprietà

$$(*)\qquad \operatorname*{maxlim}_{j\in J}\left[\sup_X(f\wedge n-f_j)\right]\leqslant 0 \qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N}\,;$$

quindi dimostriamo che $(*)\Rightarrow$ ii). Fissata la funzione d'insieme monotona α, sia $\{a_n\}_n\subset\mathbf{R}$ una successione tale che $a_n<\int_X f\,d\alpha$ per ogni $n\in\mathbf{N}$ e $\lim_n a_n=\int_X f\,d\alpha$. In virtù della Proposizione 1.1, per ogni a_n esiste un $k_n\in\mathbf{N}$ tale che

$$(**)\qquad \int_X\left(f\wedge k_n-f\wedge\frac{1}{k_n}\right)d\alpha\geqslant a_n\,.$$

Da $(*)$ segue l'esistenza di un $j_n \in J$ tale che

$$(***) \qquad f \wedge k_n - f_j \leqslant \frac{1}{k_n} \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_n ,$$

cioè

$$(***)' \qquad f \wedge k_n - f \wedge \frac{1}{k_n} \leqslant f_j \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_n .$$

Dalla proprietà (2) dell'integrale $\int_X - d\alpha$, da $(**)$ e da $(***)'$ segue che $a_n \leqslant \int_X f_j \, d\alpha$ per ogni $j \geqslant j_n$. Quindi vale la ii).

ii) $\Rightarrow$ i). Sia A un sottoinsieme di X. L'applicazione T: $[0, +\infty]^X \to [0, +\infty]$, definita da $T(g) = \inf_A (g)$ per ogni $g \in [0, +\infty]^X$, è un integrale rappresentato dalla funzione d'insieme α_A: $\mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ definita da $\alpha_A(B) = \inf_A \varphi_B$. Quindi, applicando la proprietà ii), quando α è la funzione d'insieme φ_A, si ottiene la validità di i). ■

COROLLARIO 3.5 (vedi [3]). *Se la rete* $\{f_j\}_{j \in J} \subset [0, +\infty]^X$ *converge uniformemente in* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *verso la funzione* $f \in [0, +\infty]^X$, *allora*

$$\int_X f \, d\alpha \leqslant \min\lim_{j \in J} \int_X f_j \, d\alpha$$

per ogni funzione d'insieme monotona α: $\mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$. ■

COROLLARIO 3.6. *Sia* $\{f_j\}_{j \in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* f *una funzione* $\in [0, +\infty]^X$ *tale che* $f_j \leqslant f$ *per ovni* j. *Le seguenti proprietà sono equivalenti*:

i) $\{f_j\}_{j \in J}$ *converge uniformemente in* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *verso* f,

ii) $\int_X f \, d\alpha = \lim_{j \in J} \int_X f \, d\alpha$ *per ogni funzione d'insieme monotona* α: $\mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$. ■

TEOREMA 3.7. *Sia* α: $\mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona; sia* $\{f_j\}_{j \in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete e* $f, g \in [0, +\infty]^X$. *Se* $\int_X g \, d\alpha <$

$< +\infty$, *e* $f_j \leqslant g$ *per ogni* $j \in J$, *se* $\max\lim_{j \in J} [\sup_A (f_j)] \leqslant \sup_A (f)$ *per ogni sottoinsieme* A *non vuoto di* X, *allora* $\int_X f\, d\alpha \geqslant \max\lim_{j\in J} \int_X f_j\, d\alpha$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon \in (0, +\infty)$; in virtù della Proposizione 1.1, poichè $\int_X g\, d\alpha < +\infty$, esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$(*) \qquad \int_X \left(g \wedge \frac{1}{k_\varepsilon}\right) d\alpha \leqslant \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_X (g \vee k_\varepsilon - k_\varepsilon)\, d\alpha \leqslant \varepsilon\,.$$

In virtù del Lemma 3.3, esiste un $j_\varepsilon \in J$ tale che

$$(**) \qquad f_j \wedge k_\varepsilon - f_j \wedge \frac{1}{k_\varepsilon} \leqslant f \qquad \text{per ogni } j \geqslant j_\varepsilon\,.$$

Dalla proprietà (3) dell'integrale $\int_X - \, d\alpha$, risulta per ogni $j \in J$

$$(***) \qquad \int_X f_j\, d\alpha = \int_X \left(f_j \wedge \frac{1}{k_\varepsilon}\right) d\alpha + \\ + \int_X \left(f_j \wedge k_\varepsilon - f_j \wedge \frac{1}{k_\varepsilon}\right) d\alpha + \int_X (f_j \vee k_\varepsilon - k_\varepsilon)\, d\alpha\,.$$

Allora da $(*)$, $(**)$, $(***)$ e dalla proprietà (2) dell'integrale $\int_X - \, d\alpha$, poichè $f_j \leqslant g$ per ogni $j \in J$, si ottiene $\int_X f_j\, d\alpha \leqslant 2\varepsilon + \int_X f\, d\alpha$ per ogni $j \geqslant j_\varepsilon$. Quindi, data l'arbitrarietà di ε, si ottiene che $\int_X f\, d\alpha \geqslant \max\lim_{j\in J} \int_X f_j\, d\alpha$. ■

Corollario 3.8 (vedi [3]). *Sia* $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona; sia* $\{f_j\}_{j\in J} \subset [0, +\infty]^X$ *una rete convergente uniformemente in* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *verso la funzione* $f \in [0, +\infty]^X$. *Se esiste una funzione* $g \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $f_j \leqslant g$ *per ogni* $j \in J$ *e* $\int_X g\, d\alpha < +\infty$, *allora*

$$\int_X f\, d\alpha = \lim_{j \in J} \int_X f_j\, d\alpha\,. \qquad ■$$

Sia $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme, $\{f_j\}_{j\in J}$ una rete $\subset [0, +\infty]^X$ e f una funzione $\in [0, +\infty]^X$; si dirà che la rete $\{f_j\}_{j\in J}$

converge *quasi-uniformemente* a f, se per ogni $\varepsilon \in (0, +\infty)$ esiste un insieme $B \in \mathfrak{T}(X)$ tale che $\alpha(B) < \varepsilon$ e la rete $\{f_j \varphi_{X-B}\}_{j \in J}$ converge uniformemente in $\overline{\mathbb{R}}^X$ verso la funzione $f\varphi_{X-B}$.

TEOREMA 3.9. *Sia* α: $\mathfrak{T}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona e subadditiva* (*cioè* $\alpha(A \cup B) \leqslant \alpha(A) + \alpha(B)$ *per ogni* $A, B \in \mathfrak{T}(X)$). *Se la rete* $\{f_j\}_{j \in J}$ *converge quasi-*α*-uniformemente verso la funzione* f *e se esiste una funzione* $g \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $f_j \geqslant g$ *per ogni* $j \in J$ *e*

$$\int_X g\, d\alpha < +\infty, \qquad \textit{allora} \qquad \int_X f\, d\alpha = \lim_{j \in J} \int_X f_j\, d\alpha .$$

Premettiamo alla dimostrazione di questo teorema un lemma sull'assoluta continuità dell'integrale.

LEMMA 3.10. *Sia* α: $\mathfrak{T}(X) \to [0, +\infty]$ *una funzione d'insieme monotona e sia* $g \in [0, +\infty]^X$ *tale che* $\int_X g\, d\alpha < +\infty$. *Allora per ogni* $\varepsilon \in (0, +\infty)$ *esiste un* $\delta \in (0, +\infty)$ *tale che si abbia* $\int_B g\, d\alpha < \varepsilon$, *qualora* $B \in \mathfrak{T}(X)$ *e* $\alpha(B) < \delta$. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.9. Dalla convergenza quasi-α-uniforme della rete $\{f_j\}_{j \in J}$ esiste per ogni $n \in \mathbb{N}$ un insieme $B_n \in \mathfrak{T}(X)$ tale che

(*) $\alpha(B_n) < 1/n$, $\int_{B_n} g\, d\alpha < 1/n$ e la rete $\{f_j \varphi_{X-B_n}\}_j$ converge uniformemente in $\overline{\mathbb{R}}^X$ verso la funzione $f\varphi_{X-B_n}$.

Poichè α è subadditiva, anche le funzioni d'insieme ν_j, ν: $\mathfrak{T}(X) \to [0, +\infty]$ definite da $\nu_j(A) = \int_A f_j\, d\alpha$ e $\nu(A) = \int_A f\, d\alpha$ per ogni $A \in \mathfrak{T}(X)$ sono subadditive. Sia $S = \{x \in X$: la rete $\{f_j(x)\}_{j \in J}$ non converge a $f(x)\}$; l'insieme S è contenuto in ogni B_n, quindi $\alpha(S) = 0$; in virtù della subadditività di ν, si ha

$$\int_X f\, d\alpha \leqslant \int_{X-S} f\, d\alpha + \int_S f\, d\alpha \leqslant \int_{X-S} g\, d\alpha < \infty ;$$

quindi in virtù del lemma precedente, applicato alla funzione f avente integrale finito, risulta

$$(**)\qquad \int_X f\,d\alpha = \lim_n \int_{X-B_n} f\,d\alpha\,,$$

poichè $\alpha(B_n) < 1/n$ e $0 \leqslant \int_X f\,d\alpha - \int_{X-B_n} f\,d\alpha \leqslant \int_{B_n} f\,d\alpha$.

Dalla subadditivtà delle funzioni d'insieme ν_j e da $(*)$ si ottengono le diseguaglianze

$$\int_X f_j\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f_j\,d\alpha + \int_{B_n} f_j\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f\,d\alpha + \int_{B_n} g\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f_j\,d\alpha + \frac{1}{n}\,;$$

passando al limite in queste disuguaglianze, in virtù di $(*)$ e del Corollario 3.8, abbiamo per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$(**)'\qquad \operatorname*{maxlim}_{j\in J} \int_X f_j\,d\alpha \leqslant \int_{X-B_n} f\,d\alpha + \frac{1}{n}\,.$$

D'altra parte, poichè $\lim_{j\in J} \int_{X-B_n} f_j\,d\alpha = \int_{X-B_n} f\,d\alpha$, risulta per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$(**)''\qquad \int_{X-B_n} f\,d\alpha \leqslant \operatorname*{minlim}_{j\in J} \int f_j\,d\alpha\,.$$

Dunque da $(**)$, $(**)'$, $(*,*)''$ segue che $\int_X f\,d\alpha = \lim_{j\in J} \int_X f_j\,d\alpha$. ■

4. Estensione di integrali.

Sia $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ è un integrale sul dominio d'integrazione $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$, una funzione d'insieme $\gamma\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ monotona rappresenta T se e solo se $\alpha_T \leqslant \gamma \leqslant \beta_T$. Sia $\mathbf{H} \subset \mathcal{P}(X)$ con $\emptyset \in \mathbf{H}$ una famiglia d'insiemi e sia $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme monotona, tali che

$$(*)\qquad \mathbf{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbf{H})\,,$$

$$(**)\qquad \alpha_T \leqslant \alpha \leqslant \beta_T\,;$$

le restrizioni $\alpha|_{\mathbb{H}}: \mathbb{H} \to [0, +\infty]$ costituiscono tutte e sole le funzioni d'insieme che rappresentano l'integrale T. Perciò essendo α_T (risp. β_T) la minima (risp. la massima) funzione d'insieme monotona, definita su $\mathcal{P}(X)$ che rappresenta T, risulta per ogni $\mathbb{H} \subset \mathcal{P}(X)$ tale che $\emptyset \in \mathbb{H}$ e $\mathbb{B} \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$:

$$\text{i) } \alpha_T(A) = \sup\{\alpha_T(H) \colon H \in \mathbb{H} \text{ e } H \subset A\}, \ \forall A \in \mathcal{P}(X),$$

$$\text{ii) } \beta_T(A) = \inf\{\beta_T(H) \colon H \in \mathbb{H} \text{ e } H \supset A\}, \ \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Osservazione. Se $T: \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ è un integrale, diremo che una famiglia d'insiemi $\mathbb{H}$ (può accadere che $\mathbb{B} \not\subset \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$) è *densa per l'integrale* T se sono soddisfatte le precedenti uguaglianze i) e ii). In altre parole la famiglia d'insiemi $\mathbb{H}$ è densa se e solo se una funzione d'insieme monotona $\alpha: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ rappresenta T, ogni qualvolta esiste una $\beta: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ che rappresenta T, tale che $\beta|_{\mathbb{H}} = \alpha|_{\mathbb{H}}$. ■

La funzione d'insieme $\delta_T: \mathcal{R}_T \to [0, +\infty]$, definita sulla famiglia $\mathcal{R}_T = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon \alpha_T(A) = \beta_T(A)\}$ degli insiemi *T-regolari* dalla posizione $\delta_T(A) = \alpha_T(A)$ per ogni $A \in \mathcal{R}_T$, ha una certa rilevanza nello studio degli integrali; essa riassume le informazioni possedute da un integrale T, come si è constatato nell'introduzione di [3]. La funzione d'insieme δ_T non solo rappresenta l'integrale T (conseguenza del teorema sulla densità di $\mathcal{R}_T$, vedi Th. 4.2), ma anche permette di stabilire su quali domini di integrazione si può estendere, in maniera univoca, l'integrale T (vedi prossimo Th. 4.3).

Teorema 4.2 (densità di $\mathcal{R}_T$). *Sia $T: \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ un integrale. Per ogni funzione $f \in \mathbb{B}$ l'insieme $\{t \in (0, +\infty) \colon \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ è numerabile.*

Dimostrazione. Nel caso che $f \in \mathbb{B}$ e $T(f) < +\infty$, la numerabilità dell'insieme $\{r \in (0, \infty) \colon \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ segue dall Proposizione 3 di [3]. Invece nel caso che $f \in \mathbb{B}$ e $T(f) = +\infty$, potendo supporre senza mancare di generalità che $f \leqslant 1$, consideriamo il numero $t_0 \in [0, 1]$, definito da $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \colon T(f \vee t - t) < +\infty\}$. Allora risulta che l'insieme $\{t \in (0, 1] \colon \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ è numerabile, poichè per ogni $t \in (t_0, 1]$ è $T(f \vee t - t) < +\infty$; mentre l'insieme $\{t \in (0, t_0) \colon \{f > t\} \notin \mathcal{R}_T\}$ è vuoto, perchè $\alpha_T\{f > t\} = +\infty$ per ogni $t \in (0, t_0)$, avendosi

$$f \wedge t_0 - f \wedge t \leqslant \varphi_{\{f > t\}} \quad \text{e} \quad T(f \wedge t_0 - f \wedge t) = +\infty .$$

Quindi il teorema è dimostrato. ■

TEOREMA 4.3 (unicità dell'estensione di un integrale). *Sia* $T\colon \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale sul dominio di integrazione* $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$. *Sia* $\mathbb{B}'$ *un dominio d'integrazione su* X *tale che* $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$. *Allora esiste un'unica estensione* T' *di* T *su* $\mathbb{B}'$ *se e solo se* $\mathbb{B}' \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{R}_T)$; *in tal caso risulta* $T'(f) = \int_X f\, d\delta_T$ *per ogni* $f \in \mathbb{B}'$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue facilmente dal teorema di rappresentazione. ■

Nella teoria classica della misura e dell'integrazione sovente per estendere un integrale si ricorre all'integrale superiore o all'integrale inferiore (vedi [1]), più che alla misura esterna e alla misura interna. Finora si è visto che le estensioni di un integrale T, così come è inteso in questo articolo, sono ottenibili mediante il ricorso alle funzioni d'insieme α_T e β_T (funzioni d'insieme corrispondenti, rispettivamente alla misura interna ed esterna della teoria classica); cosicchè gli integrali $\int_X - \,d\alpha_T$ e $\int_X - \,d\beta_T$ vengono a svolgere nella nostra teoria dell'integrale il ruolo, rispettivamente, di integrale inferiore e superiore, benchè questi siano definiti diversamente. Se $T\colon \mathbb{B} \to [0, +\infty]$ è un integrale sul dominio d'integrazione $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$, i funzionali che corrispondono maggiormente alle definizioni classiche di integrale superiore ed inferiore sono T^* e T_*, definiti da

$$T^*(f) = \inf\{T(g)\colon g \in \mathbb{B},\ g \geqslant f\}\,,$$

$$T_*(f) = \sup\{T(g)\colon g \in \mathbb{B},\ g \leqslant f\}\,;$$

questi funzionali, in ipotesi semplici (vedi Proposizioni 4.4 e 4.5) possono coincidere con gli integrali $\int_X - \,d\beta_T$ e $\int_X - \,d\alpha_T$. Infatti consideriamo le applicazioni $T^*\colon \mathbb{B}^* \to [0, +\infty]$ e $T_*\colon [0, +\infty]^X \to [0, +\infty]$, definite come sopra, dove

$$\mathbb{B}^* = \mathbb{B} \cup \{f \in [0, +\infty]^X\colon \text{ esiste } g \in \mathbb{B} \text{ con } f \leqslant g \text{ e } T(g) < +\infty\}\,;$$

si osserva facilmente che $\mathbb{B}^*$ è un dominio di integrazione e che

(*a*) T^* verifica le proprietà (1)′, (2), (4), (5) dell'integrale e $T^*(f) \geqslant T^*(f \wedge 1) + T(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbb{B}^*$,

(*b*) T_* verifica le proprietà (1)′, (2), (4), (5) dell'integrale e $T_*(f) \leqslant T_*(f \wedge 1) + T(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^X$.

Allora valgono le seguenti proposizioni

PROPOSIZIONE 4.4. *Sia* $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale definito sul dominio di integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ *tale che*

(i) $f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \vee g \in \mathbf{B}$,

(ii) $f \wedge 1 \in \mathbf{B}$ *e* $f \vee 1 - 1 \in \mathbf{B} \Rightarrow f \in \mathbf{B}$.

Allora $T_*(f) = \int_X f d\alpha_T$ *per ogni* $f \in [0, +\infty]^X$.

PROPOSIZIONE 4.5. *Sia* $T\colon \mathbf{B} \to [0, +\infty]$ *un integrale, definito sul dominio d'integrazione* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^X$ *tale che*

(i) $f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \wedge g \in \mathbf{B}$,

(ii) $f \wedge 1 \in \mathbf{B}$ *e* $f \vee 1 - 1 \in \mathbf{B} \Rightarrow f \in \mathbf{B}$.

Allora $T^*(f) = \int_X f\, d\beta_T$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}^*$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROP. 4.4. Poichè $T_*(\varphi_A) = \alpha_T(A)$, $\forall A \in \in \mathcal{S}(X)$, è sufficiente dimostrare che T_* è un integrale; quindi, in virtù di (a), dimostriamo soltanto che $T_*(f) \geqslant T_*(f \wedge 1) + T_*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^X$. Siano $g_1, g_2 \in \mathbf{B}$ due funzioni tali che $g_1 \leqslant f \wedge 1$ e $g_2 \leqslant f \vee 1 - 1$; poniamo $h_n = [(ng_2) \wedge 1] \vee g_1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Dalle ipotesi (i) e (ii) della Proposizione 4.4, si ottiene che le funzioni h_n e $(h_n + + g \vee 1/n - 1/n)$ appartengono a $\mathbf{B}$, poichè

$$\left(h_n + g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \wedge 1 = h_n \quad \text{e} \quad \left(h_n + g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \vee 1 - 1 = g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\,.$$

Essendo, inoltre, $g_1 \leqslant h_n \leqslant f \wedge 1$ e $g_2 \vee 1/n - 1/n \leqslant f \wedge 1 - 1$, si ottiene

$$(*) \qquad T(g_1) + T\left(g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant T(h_n) + T\left(g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant T\left(h_n + g_2 \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \leqslant T_*(f)\,.$$

Passando, infine, al limite per $n \to +\infty$ in $(*)$ si ottiene $T(g_1) + + T(g_2) \leqslant T_*(f)$; quindi, data l'arbitrarietà di g_1 e g_2, segue quanto richiesto, cioè $T_*(f \wedge 1) + T_*(f \vee 1 - 1) \leqslant T_*(f)$. ∎

DIMOSTRAZIONE DELLA PROP. 4.5. Dimostriamo che $T^*(f) \leqslant T^* \cdot (f \wedge 1) + T^*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbf{B}^* - \mathbf{B}$ limitata. Sia $a = \sup f$ e siano $g_1, g_2 \in \mathbf{B}^*$ due funzioni tali che $f \vee 1 - 1 \leqslant g_1 \leqslant a$, $f \wedge 1 \leqslant g_2 \leqslant 1$, $T(g_1) < +\infty$ e $T(g_2) < +\infty$. La funzione $g_s = g_1 \wedge \big(a(g_2 \vee s - s)\big)$ appartiene a $\mathbf{B}$ per ogni $s \in (0, 1)$; inoltre, la funzione $\big(g_s + (g_2 \wedge s)/s\big)$ appartiene a $\mathbf{B}$ per ogni $s \in (0, 1)$, perchè

$$\left(g_s + \frac{g_2 \wedge s}{s}\right) \wedge 1 = \frac{g_2 \wedge s}{s} \quad \text{e} \quad \left(g_s + \frac{g_2 \wedge s}{s}\right) \vee 1 - 1 = g_s\,.$$

Poichè $f \wedge 1 \leqslant (g_2 \wedge s)/s$ e $f \vee 1 - 1 \leqslant g_s \leqslant g_1$ si ottengono per ogni $s \in (0, 1)$ le diseguaglianze:

$$T^*(f) \leqslant T\left(\frac{g_2 \wedge s}{s} + g_s\right) = T(g_s) + T\left(\frac{g_2 \wedge s}{s}\right) \leqslant T\left(\frac{g_2 \wedge s}{s}\right) + T(g_1)\,.$$

Tenuto conto che la rete $\{(g_2 \wedge s)/s\} \downarrow g_2$ converge uniformemente per $s \to 1^-$ e che $T\big((g_2 \wedge s)/s\big) < +\infty$, risulta, in virtù del Corollario 3.8, passando al limite per $s \to 1^-$ nelle ultime diseguaglianze, che $T(g_1) + T(g_2) \geqslant T^*(f)$. Quindi, data la scelta di g_1 e g_2, si ottiene che $T^*(f) \leqslant T^*(f \wedge 1) + T^*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbf{B}^* - \mathbf{B}$ limitata; inoltre, risulta, di conseguenza, che $T^*(f) \leqslant T^*(f \wedge 1) + T^*(f \vee 1 - 1)$ per ogni $f \in \mathbf{B}^*$, poichè T^* verifica la proprietà (4) dell'integrale. Da ciò, in virtù di (b), segue che T^* è un integrale su $\mathbf{B}^*$. Quindi l'uguaglianza « $T^*(f) = \int_X f d\beta_T$ per ogni $f \in \mathbf{B}^*$ » è vera, poiché ogni $f \in \mathbf{B}^* - \mathbf{B}$ è misurabile rispetto alla famiglia d'insiemi $\mathbf{H} = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon \beta_T(A) < +\infty\}$ e poichè $T^*(\varphi_A) = \beta_T(A)$ per ogni $A \in \mathbf{H}$. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Integration*, Cap. 3, Hermann, 1965.

[2] E. DE GIORGI - G. LETTA, *Une notion général de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, Ann. Sc. Norm. Pisa, **4** (IV) (1977), pp. 61-99.

[3] G. H. GRECO, *Integrale monotono*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 149-166.

[4] G. H. GRECO, *Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles*. Rend. Sem. Mat. Padova, **65** (1981).
[5] P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Van Nostrand C., 1969.
[6] L. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 novembre 1980.