RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

Proprietà dello stress minimizzante l'energia potenziale elastica in un insieme di stress « staticamente ammissibili »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 87-95

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__87_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Proprietà dello stress minimizzante l'energia potenziale elastica in un insieme di stress « staticamente ammissibili ».

TULLIO VALENT (*)

SUMMARY - First we investigate about the mechanical meaning of the stresses of the convex set Γ considered in [5] (concerning a variational formulation of the elastostatic problem when a unilateral supporting constraint is present). Then we show how the displacement, that we obtain from the stress minimizing the elastic potential energy in Γ, satisfies the « ambiguous » boundary conditions expressing the supporting constraint.

In [5], studiando una formulazione variazionale — espressa nello stress — del problema elastostatico in presenza di un vincolo di appoggio unilaterale liscio, ho considerato un insieme convesso Γ di stress « staticamente ammissibili » e, dopo aver trovato una condizione sulle forze attive assegnate assicurante che Γ non è vuoto, ho dimostrato (tra l'altro) che $\sigma \in \Gamma$ rende minimo in Γ il funzionale reale $\mathcal{F}$ esprimente l'energia potenziale elastica in funzione dello stress se e solo se σ è « conguente » in un senso generalizzato e dà luogo a spostamenti di cui almeno uno soddisfa *in un senso debole* alle condizioni richieste dal vincolo di appoggio unilaterale liscio.

Nella presente Nota, innanzitutto, si chiarisce il significato meccanico degli stress di Γ: in condizioni di sufficiente generalità per quanto riguarda le proprietà analitiche e geometriche della configurazione

---

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

di riferimento (e della superficie d'appoggio), gli stress di Γ sono quelli che hanno le componenti cartesiane ortogonali di quadrato sommabile e che sono « in equilibrio » con le forze attive assegnate e con una reazione del vincolo di cui l'intensità è esprimibile mediante una misura di Borel sulla superficie d'appoggio Σ, non necessariamente assolutamente continua rispetto alla misura superficiale di Lebesgue su Σ.

Detto ν il versore della normale « interna » a Σ in ogni suo punto regolare, si mostra, successivamente, che almeno uno — sia u — degli spostamenti che si ottengono dallo stress σ minimizzante $\mathcal{F}$ in Γ è tale che $u_i\nu_i \geqslant 0$ (quasi ovunque) su Σ, nonchè $u_i\nu_i = 0$ (quasi ovunque) sulla parte di Σ ove è positiva la derivata di Lebesgue della misura esprimente l'intensità della reazione del vincolo corrispondente allo stress σ, almeno quando tale derivata è una funzione di quadrato sommabile (oltre che sommabile) su Σ.

Ricordo che in [4], prendendo in considerazione un insieme più ristretto di stress « staticamente ammissibili », (precisamente l'insieme degli stress che hanno le componenti cartesiane ortogonali di quadrato sommabile e che sono in equilibrio con le forze attive assegnate e con una reazione del vincolo di intensità esprimibile mediante una funzione di quadrato sommabile su Σ), ho dimostrato che l'eventuale stress minimizzante $\mathcal{F}$ in tale insieme di stress non solo è « conguente » ma, essendo soddisfatta una condizione di natura geometrica su Σ, esso dà luogo a spostamenti di cui almeno uno rispetta, quasi ovunque su Σ, le condizioni imposte dal vincolo di appoggio.

1. Preliminari. Notazioni.

L'aperto connesso e limitato Ω di $\mathbb{R}^3$ rappresenti la configurazione di riferimento — che supponiamo di equilibrio naturale — di un corpo elastico soggetto a un vincolo di appoggio unilaterale liscio.

La frontiera $\partial\Omega$ di Ω sia unione di un numero finito di superficie regolari aventi in comune, due a due, al più punti del loro bordo.

Sia Σ la parte di $\partial\Omega$ che, nella configurazione di riferimento, si trova a contatto dell'appoggio; non escludiamo il caso $\Sigma = \partial\Omega$.

Σ sia unione di alcune (o di tutte) le superficie regolari di cui è costituito $\partial\Omega$.

Indicheremo con $x = (x_i)$ il punto generico di $\bar{\Omega}$ (chiusura di Ω) e con $\nu = (\nu_i)$ il versore della normale « interna » in ogni punto regolare di $\partial\Omega$.

Sia S lo spazio hilbertiano delle matrici quadrate simmetriche del terz'ordine su $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ (1) con il prodotto scalare (2)

$$\sigma, \tau \to \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}\,dx$$

e sia H lo spazio di Hilbert che si ottiene per completamento funzionale di $C^1_{\mathbb{R}^3}(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma

$$v \to \|v\|_H = \left(\|v\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)} + \|\varepsilon(v)\|^2_S\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega v_i v_i\,dx + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

essendo

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})\,, \qquad v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,, \qquad \varepsilon(v) = \big(\varepsilon_{ij}(v)\big)_{ij=1,2,3}\,.$$

I vettori di H appartengono a $L^2_{\mathbb{R}^3}(\Omega)$ e per essi è definito, nel senso forte di Friedrichs (3), l'operatore differenziale ε risultando $\varepsilon(v) \in S$ $\forall v \in H$.

Il nucleo — diciamolo $\mathfrak{R}$ — dell'operatore $\varepsilon\colon H \to S$ è, com'è noto, l'insieme dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, cioè del tipo $x \to c + \gamma x$, ove $c \in \mathbb{R}^3$ e γ è una matrice emisimmetrica di ordine 3 su $\mathbb{R}$.

Facciamo l'ipotesi che Ω sia tale per cui sussistano le seguenti maggiorazioni:

$$\inf_{r\in\mathfrak{R}} \|v + r\|_{L^2_{\mathbb{R}^3}(\Omega)} \leqslant k_1 \|\varepsilon(v)\|_S\,, \tag{1}$$

$$\|v\|_{L^2_{\mathbb{R}^3}(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} v_i v_i\,d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant k_2 \|v\|_H \tag{2}$$

(1) $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ denota l'insieme delle funzioni reali definite in Ω e ivi di quadrato sommabile secondo Lebesgue.

Nel seguito useremo, inoltre, le seguenti notazioni.

Si indicherà con $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$, $L^2_{\mathbb{R}}(\Sigma)$, $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega - \Sigma)$ gli insiemi delle funzioni reali definite rispettivamente su $\partial\Omega$, su Σ, su $\partial\Omega - \Sigma$ e ivi di quadrato sommabile per la misura superficiale di Lebesgue; con $C^1_{\mathbb{R}}(\bar{\Omega})$ l'insieme delle funzioni reali definite in $\bar{\Omega}$ e ivi continue con le derivate parziali prime; con $L^2_{\mathbb{R}^3}(\Omega)$, $L^2_{\mathbb{R}^3}(\partial\Omega)$, $L^2_{\mathbb{R}^3}(\Sigma)$, $L^2_{\mathbb{R}^3}(\partial\Omega - \Sigma)$, $C^1_{\mathbb{R}^3}(\bar{\Omega})$ gli insiemi delle funzioni (vettoriali) a valori in $\mathbb{R}^3$ di cui le funzioni componenti appartengono rispettivamente a $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$, $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$, $L^2_{\mathbb{R}}(\Sigma)$, $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega - \Sigma)$, $C^1_{\mathbb{R}}(\bar{\Omega})$.

(2) É sott'inteso il segno di somma su ogni indice ripetuto; tale convenzione sarà adottata in tutto il presente lavoro.

(3) Cfr. [5], Nota I.

valide per ogni $v \in C^1_{\mathbf{R}^3}(\bar{\Omega})$ ([4]) e quindi per ogni $v \in H$, essendo k_1, k_2 numeri positivi dipendenti solo da Ω e che esista qualche vettore $v^0 \in H$, continuo in $\Omega \cup \Sigma$, tale che $v_i^0 \nu_i \geqslant k_0$ su Σ, essendo k_0 un conveniente numero positivo.

Tali ipotesi lasciano a Ω (e alla sua frontiera) una larga generalità: esse sono senz'altro soddisfatte, ad esempio, se Ω è un « campo propriamente regolare » ([5]).

2. Stress staticamente ammissibili.

Siano f la densità di forza di massa, g la densità della forza superficiale assegnata su $\partial\Omega - \Sigma$ (nel caso che $\partial\Omega - \Sigma$ abbia misura superficiale non nulla) e

$$\varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk}\sigma_{hk} \tag{4}$$

la legge costitutiva nel caso — che qui viene considerato — di « piccole trasformazioni » isoterme.

Supponiamo $f \in L^2_{\mathbf{R}^3}(\Omega)$, $g \in L^2_{\mathbf{R}^3}(\partial\Omega - \Sigma)$.

Sulle funzioni a_{ijhk}, $(a_{ijhk} = a_{jikh} = a_{hkij})$, facciamo solo l'ipotesi che siano misurabili e quasi ovunque limitate in Ω e che, naturalmente ([6]), per quasi tutti gli x di Ω si abbia $a_{ijhk}(x)\gamma_{ij}\gamma_{hk} > 0$ qualunque sia la matrice $\gamma = (\gamma_{rs}) \neq 0$ su $\mathbf{R}$ simmetrica di ordine 3.

Dicendo « ammissibile » ogni vettore spostamento che sia compatibile — nel senso della teoria linearizzata — con il vincolo di appoggio unilaterale liscio su Σ, l'insieme degli *spostamenti ammissibili* di H è il seguente cono convesso di H:

$$V = \{v \in H \colon\ v_i \nu_i \geqslant 0 \text{ quasi ovunque su } \Sigma\}$$

Il principio dei lavori virtuali offre, in maniera naturale, l'avvio ad una impostazione debole, espressa nello stress, del problema dell'equilibrio elastico.

([4]) La maggiorazione (2) consente di definire la traccia su $\partial\Omega$ di ogni vettore $v \in H$ risultando continuo l'operatore di traccia di H in $L^2_{\mathbf{R}^3}(\partial\Omega)$. Cfr. [5], Nota I.

([5]) Cfr. [1], pp. 109, 110, 112, 115, 121.

([6]) In accordo con l'ammissione, fatta in partenza, dell'esistenza di una configurazione di equilibrio naturale e con l'assunzione di quest'ultima come configurazione di riferimento.

Detto « staticamente ammissibile » ogni stress che soddisfa al principio dei lavori virtuali, allora, nella classe degli stress con componenti cartesiane ortogonali di quadrato sommabile in Ω, l'insieme Γ degli *stress staticamente ammissibili* resta così definito:

$$\Gamma = \left\{ \tau \in S : \int_\Omega \tau_{ij} \varepsilon_{ij}(v)\, dx + \int_\Omega f_i v_i\, dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i v_i\, d\sigma \leqslant 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Affinchè Γ non sia vuoto è necessario, come si riconosce immediatamente, che f, g soddisfino alla condizione

$$(5) \qquad \int_\Omega f_i r_i\, dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i r_i\, d\sigma \leqslant 0 \qquad \forall r \in \mathfrak{R} \cap V .$$

Se l'uguaglianza, nelle (5), si verifica se e solo se $r_i \nu_i = 0$ quasi ovunque su Σ, allora le (5) stesse sono sufficienti affinchè Γ non sia vuoto, come ho dimostrato in [5], Nota I.

Nel seguito supporremo soddisfatta (5) nel senso « forte » appena precisato.

Le proposizioni I e II seguenti servono a chiarire il significato meccanico degli stress di Γ.

I. *Per ogni* $\tau \in \Gamma$ *esiste una misura di Borel non negativa* μ_τ *su* Σ *tale che*

$$(6) \qquad \int_\Omega \tau_{ij} \varepsilon_{ij}(v)\, dx + \int_\Omega f_i v_i\, dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i v_i\, d\sigma + \int_\Sigma v_i \nu_i\, d\mu_\tau = 0$$
$$\forall v \in H \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma) \ (^7) .$$

Per la dimostrazione di questa proposizione si confronti [1], p. 120 ove è dimostrato un fatto analogo e si tenga presente la definizione di Γ, e l'ipotesi, che abbiamo fatto precedentemente, dell'esistenza di qualche $v^0 \in H \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$ tale che $v^0_i \nu_i \geqslant k_0$ su Σ, con k_0 numero positivo conveniente.

Da (6) appare chiaro il significato meccanico della misura μ_τ: se B è un boreliano di Σ, $\mu_\tau(B)$ esprime l'intensità della reazione globale

---

(7) $C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$ denota l'insieme delle funzioni (vettoriali) a valori in $\mathbf{R}^3$ definite e continue in $\Omega \cup \Sigma$.

esplicata dal vincolo di appoggio sull'intero sottoinsieme B di Σ, in corrispondenza dello stress τ e delle forze attive assegnate f, g.

Supponiamo, viceversa, che — assegnata una misura di Borel non negativa ν su Σ — esista $\tau \in S$ tale che

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}(v)\, dx + \int_{\Omega} f_i v_i\, dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i v_i\, d\sigma + \int_{\Sigma} v_i \nu_i\, d\nu = 0 \qquad \forall v \in H \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$$

Da quest'ultima segue

$$(7) \qquad \int_{\Omega} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}(v)\, dx + \int_{\Omega} f_i v_i\, dx + \int_{\partial\Omega - \Sigma} g_i v_i\, d\sigma \leqslant 0 \qquad \forall v \in V \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)\,.$$

Se $V \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$ è denso in V con la topologia di H ([8]), (7) sussiste per ogni $v \in V$, come si riconosce immediatamente avendo presente (2): dunque $\tau \in \Gamma$.

Possiamo pertanto affermare che

II. *Se $V \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$ é denso in V con la topologia di H, un elemento $\tau \in S$ appartiene a Γ se e solo se esiste una misura di Borel non negativa μ_τ su Σ per cui sussiste* (6) $\forall v \in H \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$.

Si noti che agli stress $\tau \in \Gamma$ (staticamente ammissibili) non si chiede di essere derivabili nel senso ordinario (cosa, peraltro, non richiesta dal fatto fisico), nè si esige che la reazione vincolare ad essi corrispondente sia esprimibile mediante una funzione di punto — potendo, invece, l'intensità della reazione del vincolo essere espressa da una misura di Borel su Σ, come risulta dalla proposizione I.

La proposizione II precisa ulteriormente quest'ultima circostanza.

3. Proprietà dello stress minimizzante l'energia potenziale elastica in Γ.

Consideriamo il funzionale reale $\mathcal{F}$ definito in S nel modo seguente:

$$\mathcal{F}(\tau) = \int_{\Omega} a_{ijhk} \tau_{ij} \tau_{hk}\, dx\,.$$

([8]) In [1], p. 129, è data una condizione sufficiente affinchè, essendo Ω un « campo propriamente regolare », $V \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\bar{\Omega})$ [e quindi anche $V \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$], sia denso in V con la topologia di H.

$\mathcal{F}(\tau)$ esprime l'energia potenziale elastica in corrispondenza dello stress τ.

In [5], Nota II, ho dimostrato che *$\sigma \in \Gamma$ rende minimo $\mathcal{F}$ in Γ se e solo se esiste qualche $u \in V$ tale che $\varepsilon_{ij}(u) = -a_{ijhk}\sigma_{hk}$ nonché*

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(u)\,dx + \int_\Omega f_i u_i\,dx + \int_{\partial\Omega-\Sigma} g_i u_i\,d\sigma = 0 \,. \tag{8}$$

Nello stesso lavoro ho anche indicato una condizione sulle funzioni a_{ijhk} sufficiente affinchè $\mathcal{F}$ abbia minimo in Γ.

In [5], Nota *I*, ho fatto vedere che la condizione (8) — nel caso che Ω sia sufficientemente regolare e che $\sigma_{ij} \in C^1_{\mathbf{R}}(\bar{\Omega})$ — equivale esattamente alla circostanza che lo spostamento $u \in V$ verifica, su Σ, la condizione imposta dal vincolo di appoggio unilaterale liscio, cioè la condizione di aversi $u_i\nu_i = 0$ (quasi ovunque) sulla parte di Σ ove risulta $\sigma_{ij}\nu_i\nu_j > 0$.

Mostreremo, tra poco, come (8) implichi che u soddisfa su Σ alla condizione imposta dal vincolo, in condizioni molto generali per lo stress σ minimizzante $\mathcal{F}$ in Γ (9), almeno quando Ω e Σ sono tali che $V \cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega \cup \Sigma)$ è denso in V con la topologia di H.

Se $\sigma \in \Gamma$ rende minimo $\mathcal{F}$ in Γ sia μ la misura di Borel (non negativa) *su Σ associata a σ tramite* (6).

Siano μ_1 la misura assolutamente continua rispetto alla misura superficiale di Lebesgue su Σ e μ_0 la misura singolare rispetto a quella superficiale di Lebesgue su Σ tali che $\mu = \mu_0 + \mu_1$: μ_0 e μ_1 esistono e sono univocamente determinate da μ in base al noto « Teorema di decomposizione di Lebesgue » (10).

μ_0 è concentrata in un sottoinsieme — diciamolo N (11) — di Σ avente misura superficiale nulla secondo Lebesgue: si ha cioè $\mu_0(B) = 0$ per ogni boreliano B di Σ tale che $B \cap N$ sia vuoto.

---

(9) E non solo quando $\sigma_{ij} \in C^1_{\mathbf{R}}(\bar{\Omega})$. Cfr. la proposizione III seguente.

(10) Cfr., ad esempio, [3], p. 134.

(11) Da un teorema dimostrato da G. Fichera in [2], p. 415, si deduce (in condizioni di notevole generalità su Ω) che, almeno quando le funzioni a_{ijhk} sono sufficientemente regolari, *l'insieme singolare N della misura μ è contenuto nell'unione dei bordi delle superficie regolari di cui è composta Σ*; quindi nelle vicinanze di ogni punto regolare di Σ non si ha concentrazione di reazione vincolare.

Detta Φ *la funzione* [12] *reale* (non negativa) *sommabile su* Σ *tale che* $\mu_1(B)=\int_B \Phi\, d\sigma$ *per ogni boreliano* B *di* Σ, *si* ha $\mu(B)=\mu_0(B)+$ $+\int_B \Phi\, d\sigma$ per ogni boreliano B di Σ, nonchè $\mu(B)=\int_B \Phi\, d\sigma$ se B e N sono disgiunti.

Di conseguenza risulta

$$(9)\qquad \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v)\,dx+\int_\Omega f_i v_i\,dx+\int_{\partial\Omega-\Sigma} g_i v_i\,d\sigma+\int_\Sigma \Phi \nu_i v_i\,d\sigma+\int_\Sigma \nu_i v_i\,d\mu_0=0$$

$$\forall v\in H\cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega\cup\Sigma)\,.$$

Supposto che Ω *e* Σ *siano tali per cui* $V\cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega\cup\Sigma)$ *sia denso in* V *con la topologia di* H [13], dimostriamo che

III. *Se* $\Phi\in L^2_{\mathbf{R}}(\Sigma)$ *si ha* $u_i\nu_i=0$ (quasi ovunque) *sulla parte di* Σ *ove* $\Phi>0$.

Se $\{v^n\}$ è una successione in $V\cap C^0_{\mathbf{R}^3}(\Omega\cup\Sigma)$ convergente a u con la topologia di H, si verifica senza difficoltà, tenendo presente (2), che

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v^n)\,dx+\int_\Omega f_i v_i^n d\sigma+\int_{\partial\Omega-\Sigma} g_i v_i^n d\sigma\Big)=$$

$$=\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(u)\,dx+\int_\Omega f_i u_i\,dx+\int_{\partial\Omega-\Sigma} g_i u_i\,d\sigma\,,$$

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Sigma \Phi \nu_i v_i^n\,d\sigma=\int_\Sigma \Phi v_i u_i\,d\sigma\,.$$

Essendo $v^n\in V$, risulta

$$\int_\Sigma \nu_i v_i^n\,d\mu_0\geqslant 0 \qquad \text{qualunque sia } n\,.$$

---

[12] Tale funzione (detta derivata di Lebesgue della misura μ) esiste ed è univocamente determinata nel senso di $L_{\mathbf{R}}(\Sigma)$, (cioè quando si identifichino due funzioni che differiscono solo in un insieme di misura nulla su Σ), in base al « Teorema di Radon-Nikodym ». Cfr. [3], p. 128 e [2], p. 415.

[13] Vedi [8].

Pertanto da (9), scritta per $v = v^n$ e da (8), (10), (11) segue

$$\int_{\Sigma} \Phi \nu_i u_i \, d\sigma = 0 ,$$

donde $u_i \nu_i = 0$ (quasi ovunque) sulla parte di Σ ove $\Phi > 0$, dato che (quasi ovunque) su Σ si ha $\Phi \geqslant 0$, $u_i \nu_i \geqslant 0$.

Dalla proposizione III discende che se lo stress σ di Γ rende minimo $\mathcal{F}$ in Γ, σ è lo «stress reale», nel senso che esso è «congruente» in senso generalizzato (cioè in corrispondenza di esso le (4) sono integrabili in H) e dà luogo (tramite (4)) a spostamenti di cui almeno uno soddisfa, su Σ, almeno quando $\Phi \in L^2_{\mathbf{R}}(\Sigma)$, alle condizioni imposte dal vincolo di appoggio unilaterale liscio.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, **7**, fasc. 5 (1964).
[2] G. Fichera, *Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints* Handbuch der Physik », Bd. VI a/2, Springer-Verlag (1972).
[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, van Nostrand Company (1950).
[4] T. Valent, *Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **50** (1973).
[5] T. Valent, *Sulla formulazione variazionale — espressa nello stress — del problema dell'equilibrio dei corpi elastici con un vincolo di appoggio unilaterale liscio*, Note I e II, Rend. Acc. Naz. Lincei S. VIII, **56**, fasc. 5 e 6 (1974).

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 giugno 1974.