Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Tullio Valent

Un complemento del lavoro : « Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 83-86

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__83_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Un complemento del lavoro: « Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni ».

TULLIO VALENT (*)

SUMMARY - We state a necessary and sufficient condition for the convex set Γ of $S_3(L^2_{\mathbf{R}}(A))$, considered in [1], to be not empty.

In [1] ho studiato, tra l'altro, le proprietà dell'eventuale stress minimizzante l'energia potenziale elastica in un insieme convesso Γ, ammettendo (implicitamente) che le forze attive assegnate $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{f}$ fossero tali da rendere Γ non vuoto.

Lo scopo della presente Nota è quello di trovare una condizione necessaria e sufficiente su $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{f}$ perchè Γ non sia vuoto.

Il teorema che qui viene dimostrato ha — al di là della sua applicabilità alle questioni affrontate in [1] — un interesse autonomo per il suo evidente significato meccanico.

Con riferimento alle notazioni usate in [1] mostriamo che, sussistendo le maggiorazioni (2), (3) ammesse in [1], vale il seguente

TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché, assegnati* $\boldsymbol{F} = (F_i) \in L^2_{R^3}(A)$, $\boldsymbol{f} = (f_i) \in L^2_{R^3}(\sigma_2)$, Γ *sia non vuoto é che esista qualche*

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

$\phi \in L^2_R(\sigma_1)$, $\phi \geqslant 0$, *tale che*

$$(1)\qquad \begin{cases} \int_A F_i\,d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_2} f_i\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i\,d\sigma = 0 \\ \int_A (F_i x_j - F_j x_i)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_2} (f_i x_j - f_j x_i)\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi(N_i x_j - N_j x_i)\,d\sigma = 0\,, \\ \qquad\qquad (i, j = 1, 2, 3)\,. \end{cases}$$

In altre parole mostriamo che Γ non è vuoto se e solo se esiste una reazione del vincolo su σ_1, espressa da un vettore di quadrato sommabile su σ_1, « equilibrante » l'insieme $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f})$ delle forze attive assegnate.

Iniziamo con l'osservare che le (1) equivalgono, come si verifica facilmente, a

$$(2)\qquad \int_A F_i r_i\,d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_2} f_i r_i\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i r_i\,d\sigma = 0 \qquad \forall \boldsymbol{r} \in \mathfrak{R}\,,$$

essendo $\mathfrak{R}$ l'insieme dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, cioè del tipo $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{a} \in R^3$ e B matrice emisimmetrica del terz'ordine su R.

Da tale osservazione segue immediatamente la necessità della condizione suddetta affinchè Γ non sia vuoto: basta pensare che $r_{i,j} + r_{j,i} = 0$ $\forall r \in \mathfrak{R}$.

Veniamo ora alla sufficienza della condizione.

Supposto esistente $\phi \in L^2_R(\sigma_1)$, $\phi \geqslant 0$, verificante (1), oppure (2), facciamo vedere che Γ non è vuoto, cioè che esiste qualche $X = (X_{ij}) \in S_3(L^2_R(A))$ tale che

$$(3)\qquad \int_A X_{ij} v_{i,j}\,d\boldsymbol{x} + \int_A F_i v_i\,d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_2} f_i v_i\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i\,d\sigma = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\overline{A})\,.$$

Atteggiato $S_3(L^2_R(A))$ a spazio di Hilbert mediante la seguente definizione di prodotto scalare

$$X, Y \to (X, Y) = \int_A X_{ij} Y_{ij}\,d\boldsymbol{x}$$

e posto, per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$,

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \int_A F_i v_i \, d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_2} f_i v_i \, d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i \, d\sigma ,$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} \right)_{i,j=1,2,3} ,$$

(3) assume la forma

$$(X, \varepsilon(\boldsymbol{v})) = -\varphi(\boldsymbol{v}) . \tag{4}$$

Ricordando che $F_i \in L^2_R(A)$, $f_i \in L^2_R(\sigma_2)$, $\phi \in L^2_R(\sigma_1)$ e avendo presente la definizione della norma [1] $|||\cdot|||$, nonchè la maggiorazione (3) ammessa in [1], si verifica facilmente che la forma lineare φ su $C^1_{R^3}(\bar{A})$ è continua quando $C^1_{R^3}(\bar{A})$ si pensi dotato della norma $|||\cdot|||$.

Di conseguenza — utilizzando un noto teorema di esistenza per le equazioni funzionali negli spazi di Banach [2] — si riconosce che, sussistendo (2), l'equazione variazionale (4) ha soluzione in $S_3(L^2_R(A))$ se esiste un numero positivo c tale da aversi [3]

$$\inf_{\boldsymbol{r} \in R} |||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}||| \leqslant c \|\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_{S_3(L^2_R(A))} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A}) .$$

Poichè la maggiorazione (2) ammessa in [1] implica, ovviamente, l'esistenza di un tale c, possiamo concludere che (4) ha soluzione in $S_3(L^2_R(A))$, cioè che Γ non è vuoto.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. Valent, *Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **50** (1973).

---

(1) Vedi [1], p. 145.

(2) Cfr. [2], Teorema II, p. 2, o [3], p. 14.

(3) Si tenga presente che $\mathfrak{R}$ è il nucleo dell'operatore lineare

$$\varepsilon : C^1_{R^3}(\bar{A}) \to S_3(L^2_R(A)) .$$

[2] S. FAEDO, *Su un principio di esistenza nell'Analisi lineare*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie III, **11** (1957).
[3] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems* Lecture notes in mathematics, **8**, Berlin - Heidelberg - New York: Sprin-, ger (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 giugno 1974.