Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

U. Massari

L. Pepe

Sulla curvatura di Gauss delle superfici dei capillari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 69-82

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__69_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Sulla curvatura di Gauss delle superfici dei capillari.

U. MASSARI - L. PEPE (*)

In questo lavoro dimostreremo una maggiorazione integrale della somma dei quadrati delle curvature principali delle superfici di equilibrio nei tubi capillari e delle superfici di curvatura media assegnata.

Questa stima, nel caso bidimensionale, è equivalente ad una valutazione integrale della *curvatura di Gauss* delle suddette superfici (cfr. Osserman ([8])). I risultati ottenuti sono anche una generalizzazione di una maggiorazione di Miranda per le curvature delle ipersuperfici minimali.

Il § 1 contiene richiami ed osservazioni preliminari, nel § 2 sono provati alcuni lemmi. Il § 3 è dedicato allo studio del problema dei capillari e contiene anche la dimostrazione della limitatezza globale della soluzione, già ottenuta, in modo diverso, da Concus e Finn ([1]) e Gerhardt ([3]); nel § 4 si studiano le superfici di curvatura media assegnata nel caso cartesiano e non cartesiano.

Ringraziamo Mario Miranda, con il quale abbiamo discusso i risultati di questo lavoro.

1. Preliminari.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, g una funzione di classe $C^\infty(\Omega)$ con $|Dg(x)| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |D_i g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ per ogni x di Ω. Se $S = \{x: x \in \Omega\,,\ g(x) = 0\}$, il

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico, Università degli Studi, Via Savonarola 9, 44100 Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito dello G.N.A.F.A.

versore normale ad S in x ha come componenti:

$$\nu_i(x) = \frac{D_i g(x)}{|Dg(x)|}\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1\,.$$

Poniamo come in ([5]):

$$\delta_i = D_i - \nu_i \sum_{i=1}^{n+1} \nu_h D_h \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{1.1}$$

Gli operatori di derivazione δ_i dipendono solo dalla superficie S, e per essi, valgono le seguenti regole di calcolo (cfr. ([5]) proposizioni 1 e 2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \delta_i = 0\;; \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \delta_h \nu_i = 0\;; \qquad h = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{1.3}$$

$$\delta_i \nu_j = \delta_j \nu_i\;; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{1.4}$$

$$\delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i = \sum_{h=1}^{n+1} (\nu_i \delta_j \nu_h - \nu_j \delta_i \nu_h)\,\delta_h\;; \qquad i, j = 1, \ldots, n+1\,. \tag{1.5}$$

Alla matrice simmetrica $(\delta_i \nu_j)_{i,j=1,\ldots,n+1}$ sono legate le seguenti proprietà geometriche (invarianti per isometrie di $\mathbb{R}^{n+1}$) della superficie S:

i) gli autovalori: $0, k_1(x), k_2(x), \ldots, k_n(x)$, di $(\delta_i \nu_j(x))_{i,j=1,\ldots,n+1}$ sono le *curvature principali di S in x*;

ii) la *curvatura media* di S in x è data da:

$$nH(x) = \sum_{i=1}^{n+1} D_i \nu_i(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \nu_i(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x)\,; \tag{1.6}$$

iii) *la somma dei quadrati delle curvature principali di S in x* ha la seguente espressione (cfr. ([5]) lemma I e teorema 1):

$$c^2(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x) = \sum_{i,j=1}^{n+1} |\delta_i \nu_j(x)|^2 \tag{1.7}$$

Infine in S vale la seguente formula di *integrazione per parti* (cfr. ([5]) lemma 2):

Se $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha|_S$ ha supporto compatto si ha [1]:

$$\int_S \delta_i \alpha \, dH_n = n \int_S \alpha H \nu_i \, dH_n \tag{1.8}$$

2. Alcune maggiorazioni.

In questo paragrafo dimostriamo due lemmi che verranno utilizzati per provare le valutazioni integrali della somma dei quadrati delle curvature principali.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$; $B_\varrho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < \varrho\}$; $A(x, t)$ una funzione continua con le sue derivate prime in $\Omega \times \mathbb{R}$, non decrescente rispetto a t per ogni $x \in \Omega$; f una soluzione dell'equazione differenziale $\big(f \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\big)$:

$$\sum_{i=1}^n D_i \left(\frac{D_i f}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = A(x, f) \qquad \forall x \in \Omega \,. \tag{2.1}$$

Se si considera la superficie $S = \{(x, t) : t - f(x) = 0 \; x \in \Omega)$, allora:

$$\nu_i = - \frac{D_i f}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \,; \qquad i = 1, \ldots, n \,; \qquad \nu_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \,.$$

In termini dei ν_i, usando gli operatori δ_i, definiti nel § 1, la (2.1) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_i \nu_i = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \nu_i = - A(x, t) \;; \qquad \forall (x, t) \in S \,. \tag{2.2}$$

Derivando (2.2) rispetto a δ_{n+1} si ha:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i \nu_{n+1} + \sum_{i,j=1}^{n+1} (\delta_i \nu_j)^2 \nu_{n+1} = - \delta_{n+1} A(x, t) \;; \qquad \forall (x, t) \in S. \tag{2.3}$$

---

[1] H_s è la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$.

Ponendo $\nu_{n+1} = e^{-w}$, per il fatto che $D_{n+1}A \geqslant 0$, risulta:

$$(2.4)\quad \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i w - \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i w) - \sum_{i,j=1}^{n+1} (\delta_i \nu_j)^2 \geqslant - \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h A(x, t) \; ; \qquad \forall (x, t) \in S$$

Se indichiamo con c^2 la somma dei quadrati delle curvature principali di S (cfr. (1.3)) e con:

$$(2.5)\qquad A_\varrho = \sup_{B_\varrho(x^0, t^0)} \left\{ \sum_{h=1}^{n} |D_h A(x, t)| \right\} \; ; \qquad \forall \varrho < \operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega)$$

si ha il seguente risultato:

LEMMA 1. *Se* $(x^0, t^0) \in \Omega \times \mathbb{R}$, *per ogni* $\varrho \in \sigma$ *tali che*: $0 < \varrho < \sigma < $ $< d = \operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega)$ *si ha*:

$$(2.6)\qquad \int_{S_\varrho(x^0, t^0)} c^2 \, dH_n \leqslant \left(A_\sigma + \frac{1}{(\sigma - \varrho)^2} \right) H_n(S_\sigma)$$

dove $S_\varrho(x^0, t^0) = S \cap B_\varrho(x^0, t^0)$.

DIM. Per la (2.4) si ha per ogni $(x, t) \in S_\sigma$:

$$(2.7)\qquad \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i w \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i w)^2 + c^2 - A_\sigma$$

Sia $\{\varphi_h\}_h$ una successione di funzioni φ_h di classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, tali che:

$$(2.8)\qquad 0 \leqslant \varphi_h \leqslant 1 \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R} \, .$$

$$(2.9)\qquad \varphi_h(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{in } B_\varrho(x^0, t^0) \, , \\ 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R} - B_\sigma(x^0, t^0) \, . \end{cases}$$

$$(2.10)\qquad \lim_{h \to \infty} \max_{\Omega \times \mathbb{R}} |D\varphi_h| = \frac{1}{\sigma - \varrho} \, .$$

moltiplicando la (2.7) per φ_h^2 e integrando su S per (1.2) ed (1.8) risulta:

$$(2.11)\qquad \int_S \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_h^2 \delta_i \delta_i w \, dH_n = -2 \int_S \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_h \delta_i w \delta_i \varphi_h \, dH_n \, .$$

e quindi:

$$(2.12)\qquad -2\int_S \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_h \delta_i w \delta_i \varphi_h \, dH_n \geqslant \int_S \varphi_h^2 \left(c^2 + \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i w)^2 - A_\sigma\right) dH_n .$$

Usando la diseguaglianza di Schwartz e la maggiorazione:

$$-2ab \leqslant a^2 + b^2$$

risulta:

$$(2.13)\qquad \int_S c^2 \varphi_h^2 \, dH_n \leqslant \int_S \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i \varphi_h)^2 \, dH_n + \int_S A_\sigma \varphi_h^2 \, dH_n$$

da questa si ottiene:

$$(2.14)\qquad \int_S c^2 \varphi_h^2 \, dH_n \leqslant \int_S \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i \varphi_h)^2 \, dH_n + A_\sigma \int_S \varphi_h^2 \, dH_n \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\Omega \times \mathbb{R}} |D\varphi_h|^2 H_n(S_\sigma(x^0, t^0)) + A_\sigma \int_S \varphi_h^2 \, dH_n .$$

e passando al limite per $h \to \infty$, in quest'ultima relazione si ricava la (2.6).

Lemma 2. *Per ogni* $x^0 \in \Omega$ *e per ogni* $\varrho < \operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega)$ *si ha*:

$$(2.15)\qquad \int_{\{x:|x-x^0|^2+|f(x)-f(x^0)|^2<\varrho^2\}} \sqrt{1+|Df|^2}\, dx \leqslant \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{2} \varrho^n + \int_{B_\varrho(x^0)} dx \int_{f(x^0)-\varrho}^{f(x^0)+\varrho} |A(x,t)| \, dt .$$

Dim. Il funzionale:

$$(2.16)\qquad \mathfrak{J}_A(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2}\, dx + \int_\Omega dx \int_0^f A(x,t)\, dt .$$

è strettamente convesso in $C^2(\Omega)$, dato che $A(x,t)$ è non decrescente rispetto a t. Allora, per i teoremi classici del calcolo delle variazioni, la soluzione f dell'equazione di Eulero di $\mathfrak{J}_A(\varphi)$:

$$\sum_{n+1}^{i=1} \delta_i \nu_i = -A(x, \varphi) \qquad \forall x \in \Omega.$$

verifica per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ la diseguaglianza:

$$(2.17) \qquad \int_\Omega \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx + \int_\Omega dx \int_0^f A(x, t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \sqrt{1 + |D(f + \varphi)|^2}\, dx + \int_\Omega dx \int_0^{f+\varphi} A(x, t)\, dt .$$

Quindi, per ogni $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ [2] $g = f$ in $\Omega - B_\varrho(x^0)$ si ha:

$$(2.18) \qquad \int_{B_\varrho(x^0)} \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx + \int_{B_\varrho(x^0)} dx \int_0^f A(x, t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{B_\varrho(x^0)} \sqrt{1 + |Dg|^2} + \int_{B_\varrho(x^0)} dx \int_0^g A(x, t)\, dt .$$

Ne segue, per la proposizione 2 di ([7]) che, posto $E = \{(x, t) : t \leqslant f(x)\}$ per ogni compatto K di $B_\varrho(x^0) \times \mathbf{R}$, se M è un insieme di Caccioppoli [3] che coincide con E fuori di K:

$$(2.19) \qquad \int_K |D\varphi_E| + \int_K A(x, t)\, \varphi_E(x, t)\, dx\, dt \leqslant \int_K |D\varphi_M| + \int_K A(x, t)\, \varphi_M(x, t)\, dx\, dt$$

Allora, per la (2.5) di ([6]) risulta:

$$(2.20) \qquad \int_{B_\varrho(x^0, f(x^0))} |D\varphi_E| \leqslant \frac{(n + 1)\, \omega_{n+1}}{2}\, \varrho^n + \int_{B_\varrho(x^0, f(x^0))} |A(x, t)|\, dx\, dt$$

e da questa segue immediatamente la tesi.

---

(2) $BV_{\text{loc}}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, le cui derivate nel senso delle distribuzioni sono misure in Ω. Se le derivate di f sono, inoltre finite su tutto Ω, si dice che $f \in BV(\Omega)$.

(3) E si dice di Caccioppoli in Ω, se la sua funzione caratteristica $\varphi_E \in BV(\Omega)$ ([7]). $\int |D\varphi_E|$ è la variazione totale di φ_E.

3. Capillarità.

I lemmi provati nel paragrafo precedente consentono di dare una valutazione integrale della somma dei quadrati delle curvature principali (e quindi se $n = 2$ della curvatura di Gauss) della superficie libera dei capillari.

Premettiamo la dimostrazione di una limitazione globale della soluzione del problema dei capillari, con il calcolo effettivo della costante, che può essere considerata come un complemento ai risultati di Emmer ([2]) e Pepe ([9]). La tecnica della dimostrazione è quella seguita da Gerhardt in ([3]).

TEOREMA 1. *Se Ω é un aperto di $\mathbb{R}^n$ con frontiera localmente lipschitziana di costante L ed f minimizza in $BV(\Omega)$ il funzionale dei capillari* ([2]):

$$(3.1)\quad \mathfrak{L}_\nu(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2} + \int_\Omega f^2(x)\,dx + \nu\int_{\partial\Omega} f(x)\,dH_{n-1}\,, \qquad 0 \geqslant \nu > (1+L^2)^{-\frac{1}{2}},$$

risulta:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \eta(n, \Omega, \nu, L)$$

dove:

$$\eta(n, \Omega, \nu, L) = \frac{\gamma(\Omega)}{\sqrt{1+L^2}} + \frac{C(n, \Omega)(\text{mis}\,\Omega)^{1/n}2^{n+1}}{1-\nu\sqrt{1+L^2}} + 1\,.$$

DIM. Se $0 \geqslant \nu > (1+L^2)^{-\frac{1}{2}}$, la funzione f che rende minimo $L_\nu(f)$ è non negativa in Ω. Sia k un numero reale maggiore o uguale a 0 e sia:

$$(3.2)\qquad A(k) = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant k\}$$

Se $v = \varphi \wedge k$, confrontando f e v, si ha:

$$(3.3)\qquad \int_{A(k)} (\sqrt{1+|Df|^2} + f^2)\,dx + \nu\int_{\partial\Omega} f\,dH_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A(k)} (\sqrt{1+|Dv|^2} + v^2)\,dx + \nu\int_{\partial\Omega} v\,dH_{n-1}\,.$$

e ricordando che in $A(k)$ $v = k$:

$$\int_{A(k)} \sqrt{1+|Df|^2} + \int_{A(k)} (f^2 - k^2)\, dx + \nu \int_{\partial\Omega} (f - v)\, dH_{n-1} \leqslant \operatorname{mis} A(k)\,. \tag{3.4}$$

Per maggiorare il terzo integrale al primo membro della (3.4), usiamo la maggiorazione (1.4) di ([2]), ottenendo:

$$|\nu| \left| \int_{\partial\Omega} (f - \nu)\, dH_{n-1} \right| \leqslant (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |D(f - v)| + |\nu| \gamma(\Omega) \int_{\Omega} (f - v)\, dx\,. \tag{3.5}$$

dove $\varepsilon_0 = 1 - |\nu|\sqrt{1 + L^2}$ e $\gamma(\Omega)$ è una costante che dipende soltanto da Ω e da L.

Quindi si ha:

$$\int_{A(k)} \sqrt{1+|Df|^2} + \int_{A(k)} (f^2 - k^2)\, dx - (1 - \varepsilon_0) \int_{A(k)} |Df| - \\ - |\nu| \gamma(\Omega) \int_{A(k)} (f - k)\, dx \leqslant \operatorname{mis} A(k)\,. \tag{3.6}$$

Da cui si ricava che:

$$\varepsilon_0 \int_{A(k)} |Df| + \int_{A(k)} (f^2 - k^2)\, dx - |\nu| \cdot \gamma(\Omega) \int_{A(k)} (f - k)\, dx \leqslant \operatorname{mis} A(k)\,. \tag{3.7}$$

D'altra parte:

$$\int_{A(k)} (f + k - |\nu| \cdot \gamma(\Omega))(f - k)\, dx \geqslant \inf_{\Omega} (f + k - |\nu| \gamma(\Omega)) \int_{A(k)} (f - k)\, dx\,. \tag{3.8}$$

Applicando a $f - v$ la diseguaglianza di Sobolev (Morrey ([11]) teorema 3.5.4) e tenendo conto della (3.8) si ricava che:

$$\frac{\varepsilon_0}{c(n, \Omega)} \left(\int_{\Omega} |f - v|^{n/(n-1)}\, dx \right)^{(n-1)/n} + \\ + \inf_{A(k)} (f + k - |\nu| \delta\gamma\Omega) - \varepsilon_0) \int_{\Omega} (f - k)\, dx \leqslant \operatorname{mis} ((k))\,. \tag{3.9}$$

dove $c(n, \Omega)$ è la costante della diseguaglianza di Sobolev.

Inoltre, usando la diseguaglianza di Hölder per $k \geqslant k_0 = |\nu|\gamma(\Omega) + \varepsilon_0$, si ottiene:

$$\int_{A(k)} (f - k)\, dk \leqslant \frac{c(n, \Omega)}{\varepsilon_0} (\operatorname{mis} A(k))^{1/n+1} . \tag{3.10}$$

Allora, per ogni $h > k > k_0$ si ha:

$$\int_{A(k)} (f - k)\, dx \geqslant \int_{A(h)} (f - k)\, dx \geqslant (h - k) \operatorname{mis} A(h) . \tag{3.11}$$

Infine, se si pone: $\varphi(t) = \operatorname{mis} A(t)$, $\varphi(t)$ risulta essere una funzione non negativa e non crescente e, per ogni $h > k \geqslant k_0$ si ha:

$$\varphi(h) \leqslant \frac{c(n, \Omega)}{\varepsilon_0} \frac{(\varphi(k))^{1+1/n}}{(h - k)} . \tag{3.12}$$

Allora per il lemma 4.1 $\big(([10])$ pag. $93\big)$ vale: $\varphi(k_0 + d) = 0$ dove:

$$d = \frac{c(n, \Omega)}{\varepsilon_0} \varphi(k_0)^{1/n} 2^{n+1} .$$

E quindi da (3.2) segue che:

$$f(x) \leqslant k_0 + d \; ; \qquad \forall x \in \Omega \tag{3.13}$$

Dal teorema 1 si ricava la seguente maggiorazione integrale per la somma dei quadrati delle curvature principali della superficie libera dei capillari:

TEOREMA 2: *Se f minimizza in $BV(\Omega)$ il funzionale dei capillari $L_\nu(f)$; se $S = \{(x, f(x))\, x \in \Omega\}$, $x^0 \in \Omega$, $0 < \varrho < \operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega)$, posto*

$$S_\varrho\big(x^0, f(x^0)\big) = S \cap B\big(x^0, f(x^0)\big) ,$$

vale la maggiorazione:

$$\int_{S_\varrho(x^0, f(x^0))} c^2\, dH_n \leqslant c(n, \Omega, \nu, L) \left(\frac{d}{d - \varrho}\right)^2 \varrho^{n-2} . \tag{3.14}$$

DIM. Come nel teorema 1 consideriamo il caso in cui $f \geqslant 0$. Per i risultati di ([9]), f è analitica in Ω e quindi verifica l'equazione:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\frac{D_i f}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = 2f(x) \qquad \forall x \in \Omega . \tag{3.15}$$

In questo caso la (2.4) diventa:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i w \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i w)^2 + c^2 . \tag{3.16}$$

Allora, come nel lemma 1, si ottiene che:

$$\int_{S_\varrho(x^0, f(x^0))} c^2\, dH_n \leqslant \frac{H_n(S_\sigma)}{(\sigma-\varrho)^2}, \qquad 0<\varrho<\sigma<\operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega) . \tag{3.17}$$

D'altra parte, per il lemma 2, si ha:

$$H_n(S_\sigma) \leqslant \left\{\frac{\omega_{n+1}(n+1)}{2}\,\sigma^n + 4\omega_n f(x^0)\,\sigma^{n+1}\right\} . \tag{3.18}$$

Da queste due ultime relazioni segue (se $\delta(\Omega)$ è il diametro di Ω):

$$\int_{S_\varrho(x^0, f(x^0))} c^2\, dH_n \leqslant \left\{\frac{\omega_{n+1}(n+1)}{2} + 4\omega_n \eta(n, \Omega, \nu, L)\,\delta(\Omega)\right\}\frac{\sigma^n}{(\sigma-\varrho)^2}, \tag{3.19}$$
$$0<\varrho<\sigma<d=\operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega) .$$

Allora, se $n=2$, la (3.14) è vera se:

$$c(n, \Omega, \nu, L) = \frac{(n+1)\,\omega_{n+1}}{2} + 4\omega_n \eta(n, \Omega, \nu, L) .$$

Se $n>2$, dato che $g(\sigma)=\sigma^n/(\sigma-\varrho)^2$ ha un unico minimo in $(\varrho, +\infty)$ nel punto $(n/(n-2))\,\varrho$ (cfr. ([5]) pag. 104) la (3.14) è vera se:

$$c(n, \Omega, \nu, L) = \frac{n^n\{\omega_{n+1}(h+1) + 8\omega_n \delta(\Omega)\eta(n, \Omega, \nu, L)\}}{8\cdot(n-2)^{n-2}} .$$

4. Superfici di curvatura media assegnata.

Cominciamo con il provare un risultato analogo a quello contenuto nel teorema 2, per le superfici cartesiane di curvatura media assegnata.

TEOREMA 3. *Se* $f \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *minimizza il funzionale*:

$$\mathfrak{J}_A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_\Omega A(x)\, u(x)\, dx \tag{4.1}$$

nella classe delle funzioni u *di* $BV(\Omega)$ *che hanno la stessa traccia di* f *sulla frontiera di* Ω; *se* $S = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$, $0 < \varrho <$ dist $(x^0, \partial\Omega)$, *vale la maggiorazione*:

$$\int_{S_\varrho(x^0, f(x^0))} c^2\, dH_n < \gamma(n) \left\{ (A\delta^2(\Omega) + 1) \left(\frac{\omega_{n+1}(n+1)}{2} + \omega_n A \delta(\Omega) \right) \right\} \cdot \left(\frac{d}{d - \varrho^2} \right)^2 \varrho^{n-2} \tag{4.2}$$

dove $A = \sup_{\bar{\Omega}} \{|A| + \sum_{i=1}^{n} |D_i A|\}$ *e* $S_\varrho(x^0, f(x^0)) = B_\varrho(x^0, f(x^0)) \cap S$.

DIM. Per il lemma 1, se $0 < \varrho < \sigma < d =$ dist $(x^0, \partial\Omega)$ si ha:

$$\int_{S_\varrho(x^0, f(x^0))} c^2\, dH_n \leqslant \left(A + \frac{1}{(\sigma - \varrho)^2} \right) H_n(S_\sigma)\,. \tag{4.3}$$

D'altra parte, per il lemma 2, risulta:

$$H_n(S_\sigma) \leqslant \frac{(n+1)\,\omega_{n+1}}{2}\, \sigma^n + \omega_n A \sigma^{n+1}\,. \tag{4.4}$$

Quindi, se $0 < \varrho < \sigma <$ dist $(x^0, \partial\Omega)$ si ha:

$$\int_{S_\varrho(x^0, f(x^0))} c^2\, dH_n \leqslant (A(\sigma - \varrho)^2 + 1)\, \frac{\omega_{n+1}(n+1) + 2\omega_n A \sigma}{2} \cdot \frac{\sigma^n}{(\sigma - \varrho)^2}\,. \tag{4.5}$$

Allora, se $\delta(\Omega)$ è il diametro di Ω vale:

$$(4.6)\qquad \int\limits_{S_\varrho(x^0,f(x^0))} c^2\, dH_n \leqslant \frac{(A\delta^2(\Omega)+1)(\omega_{n+1}(n+1)+\omega_n A\delta(\Omega))}{2}\cdot\frac{\sigma^n}{(\sigma-\varrho)^2}$$

La tesi del teorema 3 si ricava da quest'ultima diseguaglianza, ragionando come nel teorema 2.

Valutazioni integrali della somma dei quadrati delle curvature principali, possono essere provate, grazie ai teoremi di convergenza di ([7]), per le frontiere di insiemi di Caccioppoli di curvatura media assegnata, approssimabili con grafici di soluzioni dell'equazione:

$$(4.7)\qquad \sum_{i=1}^n D_i\left(\frac{D_i f}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = A(x)\,.$$

Se Ω è un aperto $\mathbb{R}^n$, E un insieme di Caccioppoli di curvatura media $A(x)\in \operatorname{Lip}(\Omega)$, per i risultati di Massari ([6]) ed i teoremi di regolarizzazione per le soluzioni delle equazioni uniformemente ellittiche (([4]) pag. 284, teorema 6.4), la frontiera ridotta di E in Ω: $\partial^* E\cap\Omega$ è una ipersuperficie di classe $C^{2,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ e quindi per essa risulta ben definita la somma c^2 dei quadrati delle curvature principali.

Indichiamo con γ_E la misura positiva:

$$(4.8)\qquad \gamma_E(B) = \int\limits_{\gamma^* E\cap B} c^2\, dH_{n-1} \qquad \forall B\subset\Omega \text{ bareliano.}$$

Vale il seguente teorema di semicontinuità:

TEOREMA 4. *Sia $\{E_h\}_h$ una successione di insiemi di Caccioppoli di curvatura media $A_h(x)\subset \operatorname{Lip}(\Omega)$, E un insieme di Caccioppoli di curvatura media $A(x)\in\operatorname{Lip}(\Omega)$;*

Se:

$$(4.9)\qquad \varphi_{E_h}\to\varphi_E \quad \textit{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

$$(4.10)\qquad A_h\to A \quad \textit{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

e per ogni compatto K di Ω, esiste una costante $\bar\gamma(K)$ tale che: $\|A\|_{L^p(K)}\leqslant\bar\gamma(K)$

Allora, per ogni aperto Ω_0 di Ω si ha, se $p > n$:

$$\gamma_E(\Omega_0) \leqslant \min_{h\to\infty} \lim \gamma_{E_h}(\Omega_0) \,. \tag{4.11}$$

DIM. Dato che Ω_0 è aperto:

$$\gamma_E(\Omega_0) = \sup \left\{ \int g \, d\gamma_E ; \; g \in C_0(\Omega_0 - (\partial E - \partial^* E)) ; \; |g| \leqslant 1 \right\}. \tag{4.12}$$

Se $\xi \in \operatorname{supp} g$ o $\xi \notin \partial E \cap \Omega_0$ oppure $\xi \in \Omega_0 \cap \partial^* E$. Nel primo caso esiste un aperto $\Omega(\xi)$ contenuto in Ω_0 ed un indice $h(\xi)$ tale che per ogni $h > h(\xi)$: $\partial E_h \cap \Omega(\xi) = \phi$. Nel secondo caso $\partial E_h \cap \Omega(\xi)$ è grafico di una funzione f_h e la successione $\{f_h\}_h$ converge uniformemente con le sue derivate prime e seconde ad una funzione f il cui grafico in $\Omega(\xi)$ è ∂E ([5]).

Mediante una partizione dell'unità ci si può ridurre al caso che supp g sia contenuto in $\Omega(\xi)$, quindi:

$$\lim_{h\to\infty} \int g \, d\gamma_{E_h} = \int g \, d\gamma_E \,. \tag{4.13}$$

D'altra parte esiste h_0 tale che per ogni $h > h_0$, $g \in C_0(\Omega_0 - (\partial E_h - \partial^* E_h))$ per la proposizione 1 di ([7]). Allora:

$$\int g \, d\gamma_E \leqslant \min_{h\to\infty} \lim \gamma_{E_h}(\Omega_0) \tag{4.14}$$

da cui segue la (4.11).

COROLLARIO 1. *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $S_h = \{(x, f_h(x)), x \in \Omega\}$ ed f_h è soluzione di:*

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\frac{D_i f}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = A_h(x) \,. \tag{4.15}$$

Se $A_h \in C^1(\Omega)$; $A_h \to A \in C^1(\Omega)$ uniformemente con le derivate prime; se $E_h = \{(x, t), x \in \Omega, t \leqslant f_h(x)\}$ converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$ a $E = \{(x, t) : x \in \Omega$ $t \leqslant f(x)\}$. Allora per ogni $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varrho < d(x_0, \partial\Omega)$ risulta:

$$\gamma(B_\varrho(x_0, t_0)) \leqslant k(n, A, \delta(\Omega)) \frac{d^2}{(d - \varrho)^2} \varrho^{n-2} \,. \tag{4.16}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Concus - R. Finn, *On capillary free surfaces in a gravitational field,* in corso di stampa.

[2] M. Emmer, *Esistenza, unicità e regolarità delle superfici di equilibrio nei capillari,* Annali di Ferrara, **18** (1973).

[3] C. Gerhardt, *Existence and regularity of capillary surfaces,* in corso di stampa.

[4] O. Ladyzhenskaya - N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations,* Academic Press.

[5] M. Miranda, *Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **38** (1967).

[6] U. Massari, *Esistenza e regolarità delle supersuperfici di curvatura media assegnata,* in corso di stampa su Archive R.M.A.

[7] U. Massari - L. Pepe, *Successioni convergenti di ipersuperfici di curvatura media assegnata,* in corso di stampa.

[8] R. Osserman, *Minimal surfaces,* Van Nostrand (1969).

[9] L. Pepe, *Analiticità delle superfici di equilibrio dei capillari in ogni dimensione,* in corso di stampa su Symposia Mathematica (1973).

[10] G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Sem. de Math. Sup., Université de Montréal (1965).

[11] C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations,* Springer-Verlag (1966).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 maggio 1974.