

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OSCAR STEFANI

ALESSANDRA ZANARDO

**Alcune caratterizzazioni di una sottoalgebra di
 $C^*(X)$ e compattezza ad essa associate**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 53 (1975), p. 363-367

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__363_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Alcune caratterizzazioni di una sottoalgebra di $C^*(X)$ e compattificazioni ad essa associate.

OSCAR STEFANI e ALESSANDRA ZANARDO (*)

Sia X uno spazio $T_{3\frac{1}{2}}$. In [N.R.] si definisce $C^\#(X)$ come il sottoinsieme di $C(X)$ formato dalle funzioni f tali che $M(f)$ è reale per ogni ideale massimale M di $C(X)$. Si verifica facilmente che $C^\#(X)$ è una sottoalgebra di $C^*(X)$ reticolarmente ordinata e con unità.

Questa nota si propone di dare delle caratterizzazioni di $C^\#(X)$, che vengono esposte nel Teorema del § 1; di queste la più interessante sembra essere il fatto che $f \in C^\#(X)$ se e solo se f^β è localmente costante su $\beta X \setminus vX$.

Nel § 2 si studiano alcuni casi in cui $C^\#(X)$ individua una compattificazione e, con l'ipotesi aggiuntiva della realcompattezza nei casi non banali, si trovano anche le compattificazioni associate.

Il § 2 è stato suggerito dal fatto che in alcuni casi $C^\#(X)$ non individua la topologia di X : lo spazio studiato in [S.Z.] è connesso, metrico separabile e quindi gode di altre proprietà, quali normalità, realcompattezza, essere a base numerabile, ecc., eppure tutte le funzioni di $C^\#(X)$ sono costanti.

Per terminologia e notazioni si fa riferimento a [G.J.], con l'unica eccezione della definizione di spazio 0-dimensionale.

Chiameremo spazi 0-dimensionali gli spazi con una base di chiusa-aperti e fortemente 0-dimensionali quelli che in [G.J.] si definiscono 0-dimensionali.

Ricordiamo che uno spazio X ha una compattificazione 0-dimensionale se e solo se X è 0-dimensionale e che con ζX si indica la massima

(*) Indirizzo degli A.A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

tra queste; ζX risulta essere associata ad A_0 (dove A_0 è la sottoalgebra di $C^*(X)$ delle funzioni a immagine finita) e si può ottenere identificando tra loro i punti di ciascuna componente connessa di $\beta X \setminus X$. [B].

§ 1. LEMMA 1. Se S è C -immerso in X ed $f \in C^\#(X)$, allora $f|_S \in C^\#(S)$.

DIM. Vedi [S.Z.].

LEMMA 2. Se $f \in C^\#(X)$, $f[X]$ è compatto.

DIM. Sia $r \in \text{cl } f[X] \setminus f[X]$ e si consideri per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = f^{-1}[r - 1/n, r + 1/n]$. La famiglia $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'intersezione finita ma non la proprietà dell'intersezione numerabile e perciò è contenuta in uno z -ultrafiltro associato ad un ideale massimale iper-reale M . Si ha $r - 1/n \leq M(f) \leq r + 1/n$ e $M(f) \neq r$, da cui l'assurdo.

TEOREMA. Se $f \in C(X)$, sono equivalenti:

- a) $f \in C^\#(X)$;
- b) per ogni S C -immerso in X , $f[S]$ è compatto;
- c) per ogni copia D di N C -immersa in X , $f[D]$ è compatto;
- d) per ogni copia D di N C -immersa in X , $f[D]$ è finito;
- e) $f \in C^*(X)$ e f^β è localmente costante su $\beta X \setminus vX$, cioè per ogni $x \in \beta X \setminus vX$ esiste un intorno di x in βX su cui f^β è costante;
- f) $f \in C^*(X)$ e $\forall r \in \mathbb{R}$, $Z(f^\beta - r) = \text{cl}_{\beta X} Z_x(f - r)$.

Ricordiamo che la caratterizzazione c) è esposta in [N.R.]

DIM.

a) \Rightarrow b). Segue dei Lemmi 1 e 2.

b) \Rightarrow c). Ovvio.

c) \Rightarrow d). Sia $f[D] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ infinito: esistono allora un r reale ed una sottosuccessione di $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente ad r , i cui termini sono tutti diversi da r . Le antimmagini in D degli elementi di detta sottosuccessione formano una copia D' di N con $f[D']$ non compatto.

d) \Rightarrow e). L'implicazione della limitatezza di f è ovvia; per l'altra parte, sia f^β non localmente costante in $x \in \beta X \setminus vX$ e sia $g \in C(\beta X)$ tale che $x \in Z(g) \subset \beta X \setminus vX$. Costruiamo una successione come segue:

scegliamo $x_1 \in g^{\leftarrow} - 1, 1[\cap X$ con $f(x_1) \neq f(x) = r$ e $x_{n+1} \in f^{\beta \leftarrow} r - \delta_n, r + \delta_n[\cap g^{\leftarrow} - 1/n, 1/n[\cap X$ dove $\delta_n = |f(x_n) - r|, f(x_{n+1}) \neq r, \forall n \in N$.

Chiaramente $D = \{x_n : n \in N\}$ è una copia di N C -immersa in X ma $f[D]$ non è finito.

$e) \Rightarrow f)$. Basta far vedere l'inclusione non banale $Z(f^\beta) \subset \text{cl}_{\beta X} Z(f)$. Infatti $p \in Z(f^\beta) \cap vX \Rightarrow f^\beta(p) = 0 \Rightarrow f \in M^P \Rightarrow$ (per il Teor. di Gelfand-Kolmogorov) $p \in \text{cl}_{\beta X} Z(f)$; se invece $p \in Z(f^\beta) \setminus vX, f^\beta$ è localmente costante su p cioè $Z(f^\beta)$ è un intorno di p , ma allora segue subito $p \in \text{cl}_{\beta X} Z(f)$.

$f) \Rightarrow a)$. Preso comunque un ideale massimale iper-reale M^P , se $f^\beta(p) = r$ allora $p \in Z(f^\beta - r) = \text{cl}_{\beta X} Z_X(f - r)$ e per il teor. di Gelfand-Kolmogorov $f - r \in M^P$. c.v.d.

COROLLARIO 1. Se X è discreto allora $C^\#(X) = A_0$.

DIM. Segue banalmente da $d)$ e dal fatto che $A_0 \subset C^\#(X)$.

COROLLARIO 2. Sia $f \in C^\#(X), C$ un chiuso di $\beta X, C \subset \beta X \setminus vX$. Allora $f^\beta[C]$ è finito. Pertanto se X è localmente compatto e realcompatto, ed $f \in C^\#(X), f^\beta[\beta X \setminus X]$ è finito.

DIM. Segue da $e)$ e da un ovvio argomento di compattezza.

COROLLARIO 3. Se $f \in C^\#(X)$ ed f^β è costante su un sottoinsieme $E \subset \beta X \setminus vX$, allora è costante su tutto un intorno di E .

DIM. Segue ovviamente dalla $e)$.

PROP. 1. Sia X localmente compatto e realcompatto. Allora $f \in C^\#(X)$ se e solo se $f \in C^*(X)$ e ogni componente connessa di $\beta X \setminus X$ ammette un intorno su cui f^β è costante.

DIM. *Necessità:* segue dei Corollari 2-3.

Sufficienza: segue dalla $e)$ del Teorema.

Nota. La Prop. 1 permette una descrizione immediata di $C^\#(R^n), \forall n \in N$.

§ 2. È noto che c'è una biiezione naturale tra le compattificazioni T di uno spazio X e le sottoalgebre A_T di $C^*(X)$ dotate delle seguenti proprietà: $a)$ contenere le costanti, $b)$ separare punti e chiusi di X , $c)$ essere chiuse rispetto alla convergenza uniforme in $C^*(X)$.

L'algebra A_T associata alla compattificazione T in questa biiezione è formata esattamente da quelle funzioni di $C^*(X)$ che si pos-

sono estendere con continuità a T ; $C(T)$ e A_T sono isomorfe in modo naturale.

Se una sottoalgebra $A \subset C^*(X)$ possiede le proprietà $a)$, $b)$, la compattificazione ad essa associata è quella che la biiezione di cui sopra associa a cl A .

$C^\#(X)$ gode della proprietà $a)$ per ogni spazio X , perciò individuerà una compattificazione di X se e solo se gode della proprietà $b)$.

PROP. 2. Dato uno spazio X , ciascuna delle prime tre proprietà implica la quarta:

- 1) X è pseudocompatto.
- 2) X è localmente compatto.
- 3) X è 0-dimensionale.
- 4) $C^\#(X)$ separa punti e chiusi.

DIM. 1) \Rightarrow 4). Ovvio, poichè $C^\#(X) = C(X) = C^*(X)$.

2) \Rightarrow 4). Segue dal fatto che $C_X(X) \subset C^\#(X)$ e che $C_X(X)$ separa punti e chiusi.

3) \Rightarrow 4). Segue dal fatto che $A_0 \subset C^\#(X)$ e che A_0 separa punti e chiusi.

Detta $X^\#$ la compattificazione associata a $C^\#(X)$, diamone una descrizione in alcuni dei casi citati nella Prop. 2.

PROP. 3. $a)$ X pseudocompatto $\Rightarrow X^\# = \beta X$.

$b)$ X fortemente 0-dimensionale $\Rightarrow X^\# = \beta X$.

$c)$ X 0-dimensionale e realcompatto $\Rightarrow X^\# = \zeta X$.

$d)$ Se X è localmente compatto e realcompatto, $X^\#$ si ottiene identificando i punti delle componenti connesse di $\beta X \setminus X$.

DIM. $a)$ Ovvvia.

$b)$ Segue subito dal fatto che cl $A_0 = C^*(X)$ se e solo se X è fortemente 0-dimensionale ([G.J.], 16.A.2.).

$c)$ Se $f \in C^\#(X)$, f^β è costante sulle componenti connesse di $\beta X \setminus X$ (segue dall'ipotesi e dalla $e)$ del Teor. a § 1); pertanto esiste $h \in C(\zeta X)$ tale che $f^\beta = h \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di βX su ζX . Poichè π lascia fissi i punti di X , h è un'estensione di f a ζX . Ricordiamo che ζX

è individuata da $\text{cl } A_0$; segue che $C^\#(X) \subset \text{cl } A_0$ ed essendo $A_0 \subset C^\#(X)$, $\text{cl } C^\#(X) = \text{cl } A_0$.

d) Si può dimostrare facilmente che lo spazio compatto ottenuto identificando i punti delle componenti connesse di $\beta X \setminus X$ è uno spazio T_2 e quindi una compattificazione T di X . Con un ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione di c) si fa vedere che ogni $f \in C^\#(X)$ si estende in modo continuo a T ; chiamiamo $C_T^\#$ l'algebra delle funzioni di $C^\#(X)$ così estese. È evidente che $C_T^\#$ contiene le costanti; mostriamo che separa i punti di T . L'unico caso non banale si verifica quando $x, y \in T \setminus X$. Se x, y provengono da C_x, C_y componenti connesse distinte di $\beta X \setminus X$, un noto argomento di compattezza mostra che $\beta X \setminus X$ si spezza in due chiusi aperti disgiunti C_1 e C_2 , contenenti rispettivamente C_x e C_y . Essendo C_1, C_2 chiusi disgiunti nello spazio normale βX , esistono due aperti $A_1 \supset C_1, A_2 \supset C_2$ tali che $\text{cl}_{\beta X} A_1 \cap \text{cl}_{\beta X} A_2 = \emptyset$. Esiste dunque $g \in C(\beta X)$ tale che $g[\text{cl } A_1] = \{0\}$ e $g[\text{cl } A_2] = \{1\}$; ovviamente g risulta localmente costante su $\beta X \setminus vX$, quindi (vedi e) del Teor.) $g|X \in C^\#(X)$ e la sua estensione a T separa x e y .

Il Teor. di Stone-Weierstrass assicura che $\text{cl } C_T^\# = C(T)$ e quindi $\text{cl } C^\#(X)$ è precisamente l'algebra delle funzioni f di $C^\#(X)$ che si estendono a T , da cui $X^\# = T$.

BIBLIOGRAFIA

- [B.] B. BANASCHEWSKI, *Über nulldimensionale Räume*, Math. Nachr., **13** (1955), pp. 129-140.
- [G.J.] L. GILLMAN - M. JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York (1960).
- [N.R.] L. D. NEL - D. RIORDAN, *Note on a subalgebra of $C(X)$* , Canad. Math. Bull., **5** (4) (1972), pp. 607-608.
- [S.Z.] O. STEFANI - A. ZANARDO, *Un'osservazione su una sottoalgebra di $C(X)$* , in corso di stampa su Rend. Sem. Univ. Padova, **53** (1975).
- [W.] R. C. WALKER, *The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, New York (1974).

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 luglio 1975.