RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

Ancora sulle diseguaglianze di Wirtinger concernenti la derivata seconda

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 335-362

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__335_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Ancora sulle diseguaglianze di Wirtinger concernenti la derivata seconda.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - Some problems on ordinary differential equations involve Wirtinger inequalities of second order for functions with three zeros. Extrema and monotony properties of the eigenvalue $\lambda(\tau)$ of the inequality

$$\int_0^\pi [y'(t)]^2 dt \leqslant \lambda(\tau) \int_0^\pi [y''(t)]^2 dt , \qquad (y(0) = y(\tau) = y(\pi) = 0) ,$$

are discussed and a short table of $\lambda(\tau)$ is given. This paper is a continuation of our previous work [10].

Introduzione.

Come in [10] indicherò nel seguito con il simbolo $A[0, \pi]$ lo spazio lineare delle funzioni dotate di derivata prima assolutamente continua in $[0, \pi]$ e derivata seconda in $L^2[0, \pi]$.

Nel già citato lavoro [10] ho studiato la diseguaglianza

$$(0) \qquad \int_0^\pi y^2(t)\, dt \leqslant \lambda \int_0^\pi [y''(t)]^2 dt ,$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

dove $y \in A[0, \pi]$ e soddisfa alle condizioni

$$(1') \qquad y(0) = y(\tau) = y(\pi) = 0 \qquad (0 < \tau < \pi),$$

oppure ad una delle condizioni limiti

$$(1'') \qquad y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0,$$

$$(1''') \qquad y(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0.$$

In questo lavoro studio il problema analogo al precedente per la diseguaglianza

$$(1) \qquad \int_0^\pi [y'(t)]^2\, dt \leqslant \lambda \int_0^\pi [y''(t)]^2\, dt,$$

dove $y \in A[0, \pi]$ e soddisfa la (1') oppure una delle (1'') o delle (1'''). I risultati relativi sono esposti nei teoremi I e II. Il paragrafo 4 è dedicato al calcolo numerico di λ in funzione di τ.

Il paragrafo 5, ripresa anche la diseguaglianza

$$\int_0^\pi y^2(t)\, dt \leqslant \lambda \int_0^\pi [y'(t)]^2\, dt,$$

contiene un confronto fra i valori di λ relativi alle tre diseguaglianze considerate.

Per considerazioni relative allo spazio ambiente scelto $A[0, \pi]$ si veda l'introduzione di [10].

Risultano così dimostrate le proposizioni enunciate da Richard in [7] e quindi la relativa limitazione sugli zeri consecutivi delle soluzioni di una equazione lineare omogenea del terzo ordine.

1. Teorema I.

1.1 *Enunciato.*

1.11 PREMESSA. Sia $\lambda = \lambda(\tau)$ la soluzione del problema

$$(1) \qquad \int_0^\pi [y'(t)]^2\, dt \leqslant \lambda \int_0^\pi [y''(t)]^2\, dt$$

con le condizioni

$$(1') \qquad y(0) = y(\tau) = y(\pi) = 0 \,, \qquad (0 < \tau < \pi).$$

Tenuto conto che la sostituzione $u = \pi - t$ muta il problema in sè, si ha $\lambda(\tau) = \lambda(\pi - \tau)$; possiamo quindi limitarci ad enunciare i risultati per $0 < \tau \leqslant \pi/2$. Per la stessa ragione è sufficiente completare lo studio del problema (1) con la condizione limite

$$(1'') \qquad y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0$$

senza riconsiderare il problema con l'altra condizione

$$(1''') \qquad y(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0 \,.$$

Il problema (1) con le sole condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$ porge $\lambda = 1$ e le estremali $y = c \sin t$. Infatti, posto

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \qquad \text{in } L^2,$$

la diseguaglianza (1) si riduce subito a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^2} \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \,,$$

ciò che comporta appunto la soluzione $\lambda = 1$ con le estremali $y = c \sin t$.

Poichè queste ultime non soddisfano nè le (1′) nè le (1″) posso affermare che se il problema (1) con le condizioni (1′) o (1″) ammette estremali si avrà $0 < \lambda(\tau) < 1$.

1.12 Suddividiamo l'enunciato in tre proposizioni.

Proposizione *a*). Se $0 < \tau < \pi/2$ la soluzione $\lambda(\tau)$ del problema (1) con le condizioni (1′) coincide con la massima radice $\hat{\lambda}(\tau)$ dell'equazione

$$(2) \qquad f(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2(1 - \lambda n^2)} = 0$$

e le corrispondenti estremali sono date da

$$y = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\tau}{n^2[1-\lambda(\tau)n^2]} \sin nt \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi) . \tag{3}$$

La funzione $\lambda(\tau)$ è continua in $]0, \pi/2[$.

Proposizione *b*). Se $\tau = \pi/2$ la soluzione del problema (1) con le condizioni (1′) è data da $\lambda(\pi/2) = \frac{1}{4}$ e le corrispondenti estremali sono date da

$$y = k \sin 2t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Poichè

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{4},$$

e $\lambda(\tau)$ è simmetrica rispetto a $\pi/2$, essa è continua per $\tau = \pi/2$ (quindi in $]0, \pi[$).

Inoltre risulta

$$\lambda(\tau) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}(\pi - 2\tau)^2 \qquad \text{per } \tau \to \frac{\pi}{2} .$$

Proposizione *c*). Per $\tau \to 0$ dalla (2) si ottiene l'equazione limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda n^2} = 0 . \tag{4}$$

La massima radice l_0 di questa equazione è la soluzione del problema (1) con le condizioni

$$y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0 . \tag{1″}$$

Le corrispondenti funzioni estremali sono date da

$$y = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1-l_0 n^2)} \sin nt \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi) . \tag{3′}$$

Si vede inoltre che

$$l_0 = \lim_{\tau \to 0+} \lambda(\tau) ,$$

quindi $\lambda(\tau)$ è prolungabile per continuità in $\tau = 0$. Più precisamente si trova

$$\lambda(\tau) \sim l_0 \left(1 - \frac{4}{3\pi}\tau\right) \qquad \text{per } \tau \to 0+ .$$

1.2 *Dimostrazione della proposizione a).*

1.21 LEMMA. Esistenza di $\hat{\lambda}(\tau)$.

Fissato un valore τ_0 della variabile τ, con $0 < \tau_0 < \pi/2$, si ottiene

$$(5) \qquad f_\lambda(\tau_0, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau_0}{(1 - \lambda n^2)^2}, \qquad \left(\lambda \neq 0 \, , \lambda \neq \frac{1}{n^2} \text{ con } n = 1, 2, \ldots\right).$$

Di modo che $f_\lambda(\tau_0, \lambda) > 0$ per $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1/n^2$. Da ciò e dal comportamento di $f(\tau_0, \lambda)$ nell'intorno dei punti $\lambda = 1/n^2$ segue che per ogni τ fissato e compreso strettamente fra zero e $\pi/2$ esiste uno ed un solo valore $\hat{\lambda}(\tau_0)$ tale che

$$\frac{1}{4} < \hat{\lambda}(\tau_0) < 1 \, , \qquad f(\tau_0, \hat{\lambda}(\tau_0)) = 0 \, .$$

Tale valore $\hat{\lambda}(\tau_0)$ è la massima radice della (2) perchè per $\lambda > 1$ si ha $f(\tau_0, \lambda) < 0$.

Per note proprietà delle funzioni implicite, la funzione $\lambda = \hat{\lambda}(\tau)$ così ottenuta è continua in $]0, \pi/2[$.

1.22 DIMOSTRAZIONE. Poichè $y'' \in L^2[0, \pi]$, si può porre in media quadratica

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \, .$$

Dalla assoluta continuità di $y'(t)$ e dalle condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$ segue

$$y'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nt \, , \qquad y(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin nt \, ,$$

ed entrambe queste serie convergono uniformemente in $[0, \pi]$. La (1) diviene allora

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^2} \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \, ,$$

mentre la condizione $y(\tau)=0$ fornisce il vincolo

$$b_1 \sin\tau = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau \,. \tag{7}$$

Pertanto, ricordando che $0<\tau<\pi/2$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^2} = \frac{1}{\sin^2\tau}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin n\tau\right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n^2}{n^2}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\sin^2\tau}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin n\tau\right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \,. \tag{9}$$

Eliminato così il vincolo, la diseguaglianza (6) diviene

$$\frac{1-\lambda}{\sin^2\tau}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin n\tau\right)^2 \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda - \frac{1}{n^2}\right) b_n^2 \,. \tag{10}$$

Osservo che, supposto (in accordo con i risultati del Lemma 1.21) sia $\frac{1}{4}<\lambda<1$, si ha

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin n\tau\right)^2 = \left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(b_n\sqrt{\lambda-\frac{1}{n^2}}\right)\cdot\left(\frac{\sin n\tau}{n^2\sqrt{\lambda - 1/n^2}}\right)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2\left(\lambda-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2(\lambda n^2-1)},$$

da cui segue

$$\frac{1-\lambda}{\sin^2\tau}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin n\tau\right)^2 \leqslant \frac{1-\lambda}{\sin^2\tau}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2(\lambda n^2-1)}\cdot\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2\left(\lambda-\frac{1}{n^2}\right). \tag{11}$$

Poichè nella (11) il segno uguale ha luogo soltanto per

$$b_n = c\,\frac{\sin n\tau}{\lambda n^2-1}, \qquad \text{n} = 2, 3, \ldots;\ c \text{ costante arbitraria},$$

condizione necessaria e sufficiente perchè sia valida la (10) è che riesca

$$\frac{1-\lambda}{\sin^2\tau}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2(\lambda n^2-1)} \leqslant 1 \,.$$

Anzi, perchè anche nella (10) si verifichi il caso di eguaglianza, deve essere

$$\frac{1-\lambda}{\sin^2\tau}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2(\lambda n^2-1)}=1\,,$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2(1-\lambda n^2)}=0\,.$$

Lo studio fatto nel Lemma 1.21 di questa equazione ci assicura che soltanto la sua massima radice $\hat{\lambda}(\tau)$ è compresa fra $\frac{1}{4}$ ed 1; è anche immediato verificare che per $\hat{\lambda}(\tau)<\lambda<1$ si ha

$$\frac{1-\lambda}{\sin^2\tau}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2(\lambda n^2-1)}<1\,.$$

La prima parte della dimostrazione è terminata: $\lambda(\tau)=\hat{\lambda}(\tau)$.

Restano da scrivere esplicitamente le estremali. Dalle considerazioni svolte segue che il segno uguale ha luogo nella (10) per

$$b_n=c\,\frac{\sin n\tau}{\lambda(\tau)n^2-1}\qquad (n=2,3,\ldots)\,.$$

Sostituendo questi valori di b_n nell'equazione del vincolo (7) si ottiene

$$b_1=c\,\frac{\sin\tau}{\lambda(\tau)-1}$$

e le estremali sono proprio date da (3).

1.3 *Dimostrazione della proposizione b).*

1.31 Dai già citati risultati relativi alla (1) con le sole condizioni $y(0)=y(\pi)=0$, segue che se $y\in A[0,\pi/2]$ ed $y(0)=y(\pi/2)=0$ si ha

$$\int_0^{\pi/2}[y'(t)]^2\,dt\leqslant\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}[y''(t)]^2\,dt\,,$$

e le estremali sono date da $y=c\sin 2t$ per $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

Analogamente se $y \in A[\pi/2, \pi]$ ed $y(\pi/2) = y(\pi) = 0$, si ha

$$\int_{\pi/2}^{\pi} [y'(t)]^2 \, dt \leqslant \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} [y''(t)]^2 \, dt \, ,$$

e le estremali sono date da $y = k \sin 2t$ per $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$.

Nell'enunciato della proposizione *b*) $y \in A[0, \pi]$ e soddisfa le condizioni $y(0) = y(\pi/2) = y(\pi) = 0$; pertanto si ha

$$\int_{0}^{\pi} [y'(t)]^2 \, dt \leqslant \frac{1}{4} \int_{0}^{\pi} [y''(t)]^2 \, dt \, .$$

Ne segue $\lambda(\pi/2) = \frac{1}{4}$ e le estremali sono date da $y = k \sin 2t$ per $0 \leqslant t \leqslant \pi$. L'identificazione delle costanti c, k è resa necessaria dall'ipotesi di continuità di $y'(t)$.

1.32 Dimostriamo ora che

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{4} \, .$$

Dalla proposizione *a*) è noto che per $0 < \tau < \pi/2$ si ha identicamente

$$f(\tau, \lambda(\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2[1 - \lambda(\tau) n^2]} = 0 \qquad \text{dove } \frac{1}{4} < \lambda(\tau) < 1 \, . \tag{12}$$

Moltiplicando questa identità per $1 - 4\lambda(\tau)$ e passando al limite per $\tau \to \pi/2 - 0$, ottengo

$$\lim_{\tau \to \pi/2 - 0} \{1 - 4\lambda(\tau)\} \left\{ \frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2[1 - \lambda(\tau) n^2]} \right\} = 0 \, . \tag{13}$$

Osservando che

$$\frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} > \frac{\sin^2 \tau}{1 - \frac{1}{4}} \, , \qquad (0 < \tau < \pi/2) \, , \tag{14}$$

$$\frac{\sin^2 n\tau}{n^2[n^2 \lambda(\tau) - 1]} \leqslant \frac{\sin^2 n\tau}{n^2(n^2/4 - 1)} \qquad (n = 3, 4, \ldots) \, , \tag{15}$$

ottengo

$$\frac{\sin^2\tau}{1-\lambda(\tau)}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2[1-\lambda(\tau)n^2]}\geqslant\frac{4}{3}\sin^2\tau-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4\sin^2 n\tau}{n^2(n^2-4)}.$$

Da ciò segue facilmente

$$\min\lim_{\tau\to\pi/2-0}\left\{\frac{\sin^2\tau}{1-\lambda(\tau)}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2[1-\lambda(\tau)n^2]}\right\}\geqslant \tag{16}$$

$$\geqslant\frac{4}{3}-\sum_{h=1}^{\infty}\frac{4}{(2h+1)^2[(2h+1)^2-4]}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Dalla (13) e dalla (16) si ottiene

$$\lim_{\tau\to\pi/2-0}[1-4\lambda(\tau)]=0\,. \tag{17}$$

Ora che è noto il valore del limite di $\lambda(\tau)$ per $\tau\to\pi/2-0$, e quindi per simmetria per $\tau\to\pi/2$, possiamo facilmente ottenere una formula asintotica di $\lambda(\tau)$ per $\tau\to\pi/2$.

È infatti lecito passare al limite per $\tau\to\pi/2$ nella serie

$$\frac{\sin^2\tau}{1-\lambda(\tau)}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2[1-\lambda(\tau)n^2]},$$

migliorando il risultato dato dalla (16) ed ottenendo

$$\lim_{\tau\to\pi/2}\left\{\frac{\sin^2\tau}{1-\lambda(\tau)}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin^2 n\tau}{n^2[1-\lambda(\tau)n^2]}\right\}=\frac{\pi^2}{8} \tag{18}$$

e quindi

$$\lim_{\tau\to\pi/2}\frac{\sin^2 2\tau}{1-4\lambda(\tau)}=-\frac{\pi^2}{2},$$

da cui

$$\lambda(\tau)\sim\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi^2}\sin^2 2\tau\sim\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi^2}(\pi-2\tau)^2\qquad\text{per }\tau\to\frac{\pi}{2}.$$

1.33 Osservazione. Vista la continuità di $\lambda(\tau)$ per $\tau=\pi/2$, ci si può chiedere se anche le relative estremali $y=k\sin 2t$ si raccordino con continuità a quelle fornite da (3) relative a $0 < \tau < \pi/2$. La risposta è affermativa, purchè nella (3) si esprima la costante arbitraria c in funzione di τ e precisamente si ponga

$$c(\tau) = h \sin 2\tau \qquad h \text{ costante.}$$

Le estremali sono allora date da

$$y(t, \tau) = h \sin 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\tau}{n^2[1 - \lambda(\tau)n^2]} \sin nt \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi) .$$

Passando al limite per $\tau \to \pi/2$ si ottiene

$$\lim_{\tau \to \pi/2} y(t, \tau) = -h\frac{\pi^2}{8} \sin 2t ,$$

ed era ciò che si voleva. Questo artificio dispensa da una normalizzazione della famiglia delle estremali, quale si potrebbe ottenere imponendo la condizione

$$\int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt = 1 .$$

1.4 *Dimostrazione della proposizione c).*

1.41 Lemma. Studio della equazione (4).

Procedendo in modo analogo a quello del Lemma 1.21, si vede che l'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda n^2} = 0 \tag{4}$$

possiede una ed una sola radice l_0 compresa fra $\frac{1}{4}$ ed 1; essa è anche la massima radice dell'equazione (4).

Per calcolarla pongo $\alpha = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ ed ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{2}[\alpha\pi \operatorname{cotg} \alpha\pi - 1] .$$

Pertanto la massima radice l_0 dell'equazione (4) si ottiene in corrispondenza alla minima radice positiva $a_0\pi$ dell'equazione

$$\operatorname{cotg} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi}.$$

Si trova

$$a_0\pi = 4{,}49340\,94579\ ,$$

$$a_0 \ = 1{,}43029\,66531\ ,$$

$$l_0 \ = \frac{1}{a_0^2} = 0{,}48881\,86364\ .$$

1.42 Verifico ora che

$$\int_0^\pi [y'(t)]^2\,dt \leqslant l_0 \int_0^\pi [y''(t)]^2\,dt$$

se $y \in A[0, \pi]$ e soddisfa alle condizioni $y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0$. Se il problema ammette estremali si ha $l_0 < 1$ (cfr. 1.11), la dimostrazione è strettamente analoga a quella della proposizione a).

Pongo, in media quadratica

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt\ ,$$

da cui, tenendo conto delle condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$, ottengo le serie, uniformemente convergenti in $[0, \pi]$,

$$y'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nt\ , \qquad y(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin nt\ .$$

Infine la condizione $y'(0) = 0$ fornisce il vincolo

$$b_1 = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \tag{19}$$

Usando la (19) la diseguaglianza da dimostrare (1) diviene

$$(1-\lambda)\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^2}\right). \tag{20}$$

Supposto (in accordo con il Lemma 1.41) $\frac{1}{4} < \lambda < 1$, posso scrivere

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}\right)^2 = \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(b_n \sqrt{\lambda - \frac{1}{n^2}}\right)\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda - 1/n^2}}\right)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda n^2 - 1},$$

da cui segue

$$(21) \qquad (1-\lambda)\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^2}\right) \cdot (1-\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda n^2 - 1}.$$

Poichè nella (21) il segno uguale ha luogo per

$$b_n = c\frac{n}{\lambda n^2 - 1} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \ c \text{ costante arbitraria},$$

condizione necessaria e sufficiente perchè sia valida la (20) è che riesca

$$(1-\lambda)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda n^2 - 1} \leqslant 1 .$$

Anzi, perchè anche nella (20) si verifichi il segno di eguaglianza deve essere

$$(1-\lambda)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda n^2 - 1} = 1 ,$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda n^2} = 0 .$$

Sapendo dal Lemma 1.41 che soltanto la massima radice l_0 di questa equazione è compresa fra $\frac{1}{4}$ ed 1 la dimostrazione termina come in 1.22. Restano da ricavare le estremali; dalle considerazioni svolte segue che il segno uguale ha luogo nella (20) quando

$$b_n = c\frac{n}{l_0 n^2 - 1}, \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

mentre b_1 si ottiene dall'equazione del vincolo (19). Si vede così che le estremali sono proprio date da (3').

1.43 Vogliamo ora dimostrare che

$$\lim_{\tau\to 0+} \lambda(\tau) = l_0 .$$

Noi sappiamo che per $0 < \tau < \pi/2$ la soluzione $\lambda(\tau)$ del problema (1) con le condizioni (1') è definita implicitamente dall'equazione

$$f(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2(1-\lambda n^2)} = 0 .$$

Per studiare il comportamento di $\lambda(\tau)$ per $\tau \to 0^+$ sostituiamo l'equazione $f(\tau, \lambda) = 0$ con l'altra

$$f^*(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[U_{n-1}(\cos\tau)]^2}{n^2(1-\lambda n^2)} = 0 , \tag{22}$$

dove

$$U_{n-1}(\cos\tau) = \frac{\sin n\tau}{\sin\tau}$$

è il polinomio di Čebyšev.

Questa equazione per $\tau = 0$ fornisce l'equazione limite (4), perciò

$$f^*(0, l_0) = 0 .$$

Applicando il teorema del Dini alla (22) in un intorno del punto $(0, l_0)$ con ragionamenti analoghi a quelli svolti in [10] si conclude che

$$\lim_{\tau\to 0+} \lambda(\tau) = l_0 .$$

Perciò la funzione $\lambda(\tau)$ si può prolungare per continuità nel punto $\tau = 0$ e da questo momento in poi, quando useremo $\lambda(\tau)$, la penseremo sempre così prolungata, di modo che $\lambda(\tau)$ risulta continua in $[0, \pi/2]$ (e quindi per simmetria in $[0, \pi]$).

Per la dimostrazione della formula asintotica di $\lambda(\tau)$ in un intorno destro dello zero rimandiamo al paragrafo 3.

2. Teorema II.

2.1 *Enunciato.*

La funzione $\lambda(\tau)$ è decrescente in $[0, \pi/2]$ e quindi, per simmetria, crescente in $[\pi/2, \pi]$.

2.2 *Schema della dimostrazione.*

Posto, come già nel Lemma 1.41, $\alpha = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, e quindi $\alpha(\tau) = [\lambda(\tau)]^{-\frac{1}{2}}$, dimostrerò che $\alpha(\tau)$ è crescente in $[0, \pi/2]$. A tale scopo mostrerò che $\alpha'(\tau) > 0$ in $]0, \pi/2[$. Posto

$$F(\tau, \alpha) = f(\tau, \alpha^{-2}) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \pi/2,\ 1 < \alpha < 2)\,, \tag{23}$$

tenendo conto della (5), si ottiene

$$F_\alpha(\tau, \alpha) < 0 \qquad (0 < \tau < \pi/2,\ 1 < \alpha < 2)\,.$$

Dobbiamo quindi verificare che

$$F_\tau\big(\tau, \alpha(\tau)\big) > 0 \qquad (0 < \tau < \pi/2)\,.$$

La dimostrazione è un po' lunga perchè $F_\tau(\tau, \alpha)$ cambia segno nel rettangolo R

$$R = \{(\tau, \alpha)\colon 0 < \tau < \pi/2,\ 1 < \alpha < 2\}\,.$$

Essa si può suddividere in tre parti.

Parte I: somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2(1 - \lambda n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sin^2 n\tau}{n^2(\alpha^2 - n^2)}$$

e quindi espressione in termini finiti di $F(\tau, \alpha)$.

Parte II: determinazione del segno di $F_\tau(\tau, \alpha)$ in alcune zone del rettangolo R. Se ne deduce in particolare che il luogo Γ_1 di equazione

$F_\tau(\tau, \alpha) = 0$ (per $0 < \tau < \pi/2$) è contenuto nella regione (*)

$$H = \{(\tau, \alpha) : \pi < \alpha(\pi - 2\tau) < a_0\pi,\ a_0 < \alpha < 2\}.$$

Si osserva a questo punto che $F_\tau(\tau, \alpha(\tau)) > 0$ almeno in $\pi/4 < \tau < \pi/2$ e che quindi la dimostrazione del teorema II si può ricondurre al fatto che le curve di equazioni $\alpha = \alpha(\tau)$, $F_\tau(\tau, \alpha) = 0$ con $0 < \tau < \pi/2$ non abbiano punti comuni in H e quindi in R.

Parte III: il luogo Γ_1 è un arco di Jordan prolungabile fino alla frontiera del rettangolo R con estremi $(0, a_0)$ e $(\pi/4, 2)$. Poichè la curva Γ di equazione $\alpha = \alpha(\tau)$ raggiunge anch'essa la frontiera di R con estremi $(0, a_0)$ e $(\pi/2, 2)$, si dimostra che le curve Γ e Γ_1 non hanno punti comuni all'infuori di $(0, a_0)$.

2.3 *Dimostrazione della parte I.*

Considero per $1 < \alpha < 2$ le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\cos \alpha\pi - \cos \alpha(\pi - 2\tau)}{\alpha \sin \alpha\pi}\right], \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2} = \frac{\pi\tau - \tau^2}{2}, \tag{25}$$

convergenti uniformemente in τ per $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$.

Sommando ottengo

$$F(\tau, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sin^2 n\tau}{n^2(\alpha^2 - n^2)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\cos \alpha\pi - \cos \alpha(\pi - 2\tau)}{\alpha \sin \alpha\pi}\right] + \frac{\pi\tau - \tau^2}{2}. \tag{26}$$

2.4 *Dimostrazione della parte II.*

2.41 LEMMA. La funzione $v = (\sin u)/u$ per $\pi \leqslant u \leqslant 2\pi$.

Si ha $v(\pi) = v(2\pi) = 0$, mentre $v(u) < 0$ per $\pi < u < 2\pi$. In $[\pi, 2\pi]$ l'equazione $v'(u) = 0$ ammette una sola soluzione che coincide con la

---

(*) La regione H (simile a quella rappresentata nella fig. 2 di [10]) è delimitata da due segmenti e da due archi di iperbole; $\alpha(\pi - 2\tau)$ è un prodotto e non un simbolo funzionale.

minima radice positiva dell'equazione $\operatorname{cotg} u = 1/u$ cioè, come è noto dal Lemma 1.41, con $u = a_0\pi$. Il valore $(\sin a_0\pi)/(a_0\pi)$ fornisce il minimo assoluto della funzione in esame nell'intervallo considerato.

2.42 Esamino ora $F_\tau(\tau, \alpha)$ in R. Dalla (26) ottengo

$$F_\tau(\tau, \alpha) = \frac{1}{2}\left[-\pi \frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\sin \alpha\pi} + (\pi - 2\tau)\right]. \tag{27}$$

Osservo che $\sin \alpha\pi < 0$, mentre $\sin \alpha(\pi - 2\tau)$ cambia segno in R.

Consideriamo alcuni sottoinsiemi di R nei quali si può facilmente dedurre il segno di $F_\tau(\tau, \alpha)$.

Sottoinsieme A: $0 < \alpha(\pi - 2\tau) \leqslant \pi$. Si ha ovviamente $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$.

Sottoinsieme B: $\pi < \alpha(\pi - 2\tau) < \alpha\pi \leqslant a_0\pi$. Si ha ancora $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$.

Infatti la funzione $v = (\sin u)/u$ decresce in $[\pi, a_0\pi]$, da cui segue

$$\frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\alpha(\pi - 2\tau)} > \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}$$

e quindi $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$.

Sottoinsieme C: $a_0\pi \leqslant \alpha(\pi - 2\tau) < \alpha\pi < 2\pi$. Si ha invece $F_\tau(\tau, \alpha) < 0$.

Infatti la funzione $v = (\sin u)/u$ cresce in $[a_0\pi, 2\pi]$.

Resta da esaminare il segno di $F_\tau(\tau, \alpha)$ quando

$$\pi < \alpha(\pi - 2\tau) < a_0\pi < \alpha\pi < 2\pi ,$$

cioè nella regione H. Come si comprende dal grafico della funzione $v = (\sin u)/u$ esistono in H valori per cui la funzione $F_\tau(\tau, \alpha)$ si annulla cioè valori tali che

$$\frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\alpha(\pi - 2\tau)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}.$$

Inoltre in H $F_\tau(\tau, \alpha)$ cambia segno. Da queste considerazioni e dal comportamento di $F_\tau(\tau, \alpha)$ negli insiemi A, B, C segue che il luogo Γ_1 è contenuto in H.

Consideriamo ora $F_\tau(\tau, \alpha(\tau))$ in $]0, \pi/2[$ ed osserviamo che essa è positiva in $]\pi/4, \pi/2[$, in quanto per τ variabile in quest'ultimo intervallo $(\tau, \alpha(\tau))$ appartiene ad A.

Dal momento che $F_\tau(\tau, \alpha(\tau))$ è continua in $]0, \pi/2[$ l'esistenza di un punto in cui essa è negativa implicherebbe l'esistenza di un punto in cui essa è nulla; in tal caso la curva Γ di equazione $\alpha = \alpha(\tau)$ avrebbe un punto in comune con Γ_1 (ovviamente nella regione H).

Per dimostrare che $F_\tau(\tau, \alpha(\tau)) > 0$ in $]0, \pi/2[$ basterà quindi verificare che Γ e Γ_1 non hanno punti comuni nella regione H.

2.5 *Dimostrazione della parte* III

2.51 Eseguo la trasformazione birazionale $\mathcal{T}$

$$x = \alpha\pi \qquad y = \alpha(\pi - 2\tau)\,, \tag{28}$$

la cui inversa è

$$\alpha = \frac{x}{\pi}\,, \qquad \tau = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{y}{x}\right). \tag{28'}$$

Questa trasformazione muta il rettangolo R nel trapezio

$$\mathcal{T}(R) = \{(x, y) : \pi < x < 2\pi,\ 0 < y < x\}\,.$$

La regione H a cui appartiene il luogo Γ_1 si trasforma nel rettangolo

$$\mathcal{T}(H) = \{(x, y) : a_0\pi < x < 2\pi,\ \pi < y < a_0\pi\}\,.$$

L'equazione di $\mathcal{T}(\Gamma_1)$ diviene

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{\sin x}{x} \qquad (x, y) \in \mathcal{T}(H)\,. \tag{29}$$

Il grafico della funzione $(\sin u)/u$ in $[\pi, 2\pi]$ mostra che la $y(x)$ definita implicitamente dalla (29) è funzione continua decrescente di x in $]a_0\pi, 2\pi[$.

Inoltre

$$\lim_{x \to a_0\pi + 0} y(x) = a_0\pi\,, \qquad \lim_{x \to 2\pi - 0} y(x) = \pi\,,$$

e quindi $\mathcal{T}(\Gamma_1)$ è nel piano (x, y) un arco di Jordan prolungato negli estremi $(a_0\pi, a_0\pi)$, $(2\pi, \pi)$

Pertanto nel piano (τ, α) il luogo Γ_1 è un arco di Jordan prolungato negli estremi $(0, a_0)$, $(\pi/4, 2)$ i quali soltanto appartengono alla frontiera di H (e di R).

Ricordiamo che l'arco Γ di equazione $\alpha = \alpha(\tau)$ è definito implicitamente dall'equazione

$$F(\tau, \alpha) = 0 \qquad (\tau, \alpha) \in R ,$$

con $F(\tau, \alpha)$ data dalla (26), ed è stato prolungato negli estremi $(0, a_0)$ e $(\pi/2, 2)$; pertanto $\mathcal{T}(\Gamma)$ verifica l'equazione

$$\frac{\cos x - \cos y}{(x^2/2) - (y^2/2)} = -\frac{\sin x}{x}, \qquad (x, y) \in \mathcal{T}(R) , \tag{30}$$

e le coordinate dei suoi estremi sono $(a_0\pi, a_0\pi)$ e $(2\pi, 0)$.

2.52 Dimostriamo ora che le curve $\mathcal{T}(\Gamma)$, $\mathcal{T}(\Gamma_1)$ non hanno punti comuni all'infuori dell'estremo $(a_0\pi, a_0\pi)$, cioè che il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\sin y}{y} = \dfrac{\sin x}{x}, \\[2mm] \dfrac{\cos x - \cos y}{(x^2/2) - (y^2/2)} = -\dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$$

non ha soluzioni in $\mathcal{T}(H)$.

Applicando il teorema di Cauchy al primo membro della seconda equazione ottengo

$$\frac{\sin \xi}{\xi} = \frac{\sin x}{x} \qquad (\pi < y < \xi < x < 2\pi) .$$

Pertanto il sistema equivale a

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \xi}{\xi} \qquad (\pi < y < \xi < x < 2\pi) .$$

È ora evidente che questo sistema non ammette soluzioni in $\mathcal{T}(H)$, visto l'andamento della funzione $(\sin u)/u$ in $[\pi, 2\pi]$.

Si conclude che anche le curve Γ e Γ_1 del piano (τ, α) non hanno punti comuni fuori dell'estremo $(0, a_0)$ e la dimostrazione del teorema II è conclusa.

3. Formula asintotica per $\lambda(\tau)$ in un intorno dell'origine.

3.1 *Enunciato*

Per semplicità di calcolo conviene operare sulla corrispondente funzione $\alpha = \alpha(\tau) = [\lambda(\tau)]^{-\frac{1}{2}}$; troveremo

$$\alpha(\tau) \sim a_0\left(1 + \frac{2}{3\pi}\tau\right) \qquad \text{per } \tau \to 0+ , \tag{31}$$

quindi

$$\lambda(\tau) \sim l_0\left(1 - \frac{4}{3\pi}\tau\right) \qquad \text{per } \tau \to 0+ .$$

La formula (31) per $\alpha(\tau)$ equivale alla conoscenza della retta tangente alla curva Γ nell'estremo $(0, a_0)$.

3.2 *Dimostrazione*

L'equazione $F(\tau, \alpha) = 0$, con $F(\tau, \alpha)$ data da (26), determina Γ nell'aperto R. La parte di frontiera di R definita da $\tau = 0$, $1 < \alpha < 2$ verifica pure l'equazione $F(\tau, \alpha) = 0$. Il punto $(0, a_0)$ è comune a Γ ed a questa parte di frontiera. È ora lecito semplificare il calcolo sostituendo $F(\tau, \alpha)$ con

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, \alpha) &= \sin\alpha\pi\cdot F(\tau, \alpha) = \\ &= \frac{\pi}{4\alpha}[\cos\alpha\pi - \cos\alpha(\pi - 2\tau)] + \frac{\pi\tau - \tau^2}{2}\sin\alpha\pi .\end{aligned} \tag{32}$$

Poichè $\varphi(0, \alpha) = 0$, $\varphi_\tau(0, \alpha) = 0$, sviluppando $\varphi(\tau, \alpha)$ in serie di Mac Laurin, per ora della sola τ, si ottiene

$$\varphi(\tau, \alpha) = \frac{1}{2!}\tau^2\varphi_{\tau\tau}(0, \alpha) + \frac{1}{3!}\tau^3\varphi_{\tau\tau\tau}(0, \alpha) + \dots . \tag{33}$$

Eliminata la componente doppia $\tau = 0$, l'equazione dell'arco Γ nell'intervallo $0 \leqslant \tau < \pi/2$ è affidata alla rappresentazione analitica

$$\varphi_{\tau\tau}(0, \alpha) + \frac{1}{3}\tau\varphi_{\tau\tau\tau}(0, \alpha) + \dots = 0 , \tag{34}$$

infatti $\varphi_{\tau\tau}(0, a_0) = 0$.

Sviluppando ora il primo membro della (34) anche secondo le potenze di $\alpha - a_0$, si trova per la tangente all'arco Γ nel punto $(0, a_0)$ l'equazione

$$(\alpha - a_0)\cdot\varphi_{\tau\tau\alpha}(0, a_0) + \frac{1}{3}\tau\cdot\varphi_{\tau\tau\tau}(0, a_0) = 0 . \tag{35}$$

Completando i calcoli si ottiene la (31).

4. Valutazioni numeriche di $\lambda(\tau)$.

4.1 *Maggiorante di* $\lambda(\tau)$.

4.11 ENUNCIATO. Si ha

$$\lambda(\tau) \leqslant \max\left[\frac{\tau^2}{\pi^2}, \frac{(\pi-\tau)^2}{\pi^2}\right] \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \pi) \; ;$$

il segno uguale vale soltanto per $\tau = \pi/2$.

4.12 D'accordo con l'introduzione diciamo $W[a, b]$ lo spazio lineare delle funzioni $y \in A[a, b]$, nulle per $t = a$, $t = b$.

Diciamo inoltre $W_\tau[0, \pi]$ la classe delle funzioni che, oltre ad appartenere a $W[0, \pi]$, verificano una delle condizioni

$$\begin{aligned} y(\tau) &= 0 \qquad \text{per } 0 < \tau < \pi , \\ y'(0) &= 0 \qquad \text{per } \tau = 0 , \\ y'(\pi) &= 0 \qquad \text{per } \tau = \pi . \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\int_0^\pi [y'(t)]^2\,dt \leqslant \lambda(\tau)\int_0^\pi [y''(t)]^2\,dt \qquad y \in W_\tau[0, \pi]$$

essendo la funzione $\lambda(\tau)$ determinata per $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$ nell'enunciato del teorema I (paragrafi 1.11, 1.12).

Consideriamo ora per $0 < \tau < \pi$ la classe $W_\tau^{(1)}[0, \pi]$ di funzioni definite in $[0, \pi]$ e tali che le loro restrizioni negli intervalli $[0, \tau]$ e $[\tau, \pi]$ appartengano rispettivamente a $W[0, \tau]$ e $W[\tau, \pi]$.

Nel caso sia $\tau = 0$ oppure $\tau = \pi$ identifichiamo $W_\tau^{(1)}[0, \pi]$ con $W[0, \pi]$. In ogni caso $W_\tau^{(1)}[0, \pi]$ è una estensione propria di $W_\tau[0, \pi]$.

Ne segue che, se il nostro problema è risolubile nello spazio $W_\tau^{(1)}[0, \pi]$, si ha

$$\int_0^\pi [y'(t)]^2\, dt \leqslant \lambda^{(1)}(\tau) \int_0^\pi [y''(t)]^2\, dt \qquad y \in W_\tau^{(1)}[0, \pi], \tag{36}$$

con $\lambda^{(1)}(\tau) \geqslant \lambda(\tau)$.

Vedremo che $\lambda^{(1)}(\tau) > \lambda(\tau)$, salvo che per $\tau = \pi/2$; più precisamente dimostreremo che

$$\lambda^{(1)}(\tau) = \max\left[\frac{\tau^2}{\pi^2}, \frac{(\pi-\tau)^2}{\pi^2}\right]. \tag{37}$$

4.13 Dimostrazione. Sappiamo che, se $y \in W[0, \tau]$, o rispettivamente $y \in W[\tau, \pi]$, si ha (cfr. 1.31)

$$\int_0^\tau [y'(t)]^2\, dt \leqslant \frac{\tau^2}{\pi^2} \int_0^\tau [y''(t)]^2\, dt,$$

$$\int_\tau^\pi [y'(t)]^2\, dt \leqslant \frac{(\pi-\tau)^2}{\pi^2} \int_\tau^\pi [y''(t)]^2\, dt.$$

Quindi se $y \in W_\tau^{(1)}[0, \pi]$ si conclude immediatamente che vale la (36) con $\lambda^{(1)}(\tau)$ data da (37).

Se $\pi/2 < \tau \leqslant \pi$ le estremali sono date da

$$y_1(t) = \begin{cases} c \sin \dfrac{\pi t}{\tau} & (0 \leqslant t \leqslant \tau), \\ 0 & (\tau \leqslant t \leqslant \pi). \end{cases} \tag{38}$$

Se $0 \leqslant \tau < \pi/2$ le estremali sono date da

$$
(39) \qquad y_2(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant t \leqslant \tau) , \\ c \sin\left(\dfrac{\pi - t}{\pi - \tau}\pi\right) & (\tau \leqslant t \leqslant \pi) . \end{cases}
$$

Per $\tau = \pi/2$ esistono le estremali $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$.

Resta da verificare ora per $\tau \neq \pi/2$ la diseguaglianza in senso stretto tra $\lambda(\tau)$ e $\lambda^{(1)}(\tau)$.

Osserviamo che

$$
l_0 = \lambda(0) < \lambda^{(1)}(0) = 1 , \qquad l_0 = \lambda(\pi) < \lambda^{(1)}(\pi) = 1 .
$$

Sia ora $0 < \tau < \pi$. Se $\tau \neq \pi/2$ le estremali (38), (39) non sono derivabili per $t = \tau$ e non appartengono quindi a $W_\tau[0, \pi]$; poichè anche il problema (1) ammette estremali, ciò comporta senz'altro

$$
\lambda(\tau) < \lambda^{(1)}(\tau) .
$$

Finalmente se $\tau = \pi/2$, esistono nello spazio $W^{(1)}_{\pi/2}[0, \pi]$ le estremali $y = c \sin 2t$, coincidenti con le estremali dello spazio $W_{\pi/2}[0, \pi]$. Si ha infatti

$$
\lambda(\pi/2) = \lambda^{(1)}(\pi/2) = \tfrac{1}{4} .
$$

Per qualche considerazione sugli spazi funzionali sopra introdotti si veda 4.14 di [10].

4.2 *Minorante di* $\lambda(\tau)$.

4.21 Enunciato. Si ha

$$
(40) \qquad \lambda(\tau) \geqslant \frac{1 + \cos^2 \tau}{4 + \cos^2 \tau} \qquad \text{per } 0 \leqslant \tau \leqslant \pi ;
$$

Il segno uguale vale soltanto per $\tau = \pi/2$.

4.22 Dimostrazione. Vista la simmetria rispetto *a* $\tau = \pi/2$ dei due membri della (40), basta verificare la diseguaglianza per $0 \leqslant \tau \leqslant \pi/2$.

Poichè $\lambda(\tau)$, per $0 < \tau < \pi/2$, verifica l'equazione (2) ed inoltre

$\frac{1}{4} < \lambda(\tau) < 1$ si ha

$$\frac{\sin^2 \tau}{1-\lambda(\tau)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^2[n^2\lambda(\tau)-1]} > \frac{\sin^2 2\tau}{4[4\lambda(\tau)-1]} \qquad (0<\tau<\pi/2)\,.$$

Risolvendo si trova appunto

$$\lambda(\tau) > \frac{1+\cos^2\tau}{4+\cos^2\tau}\,.$$

Si verifica immediatamente che la diseguaglianza rimane vera per $\tau=0$, mentre si trasforma in una eguaglianza per $\tau=\pi/2$. La dimostrazione è terminata.

4.3 *Tabulazione di* $\lambda(\tau)$ *per* $0 \leqslant \tau \leqslant \pi/2$.

La tavola è stata calcolata per

$$\tau = n\frac{\pi}{32}\,, \qquad (n=0,1,\ldots,16)\,.$$

Tolti i valori estremi di $\alpha(\tau)$, $\lambda(\tau)$, calcolati in precedenza (1.41, 1.31), ci si è serviti dell'equazione

$$F(\tau,\alpha)=0$$

con $F(\tau,\alpha)$ data dalla (26).

Le limitazioni ottenuta in 4.1, 4.2 per $\lambda(\tau)$ si traducono per $\alpha(\tau)$ nelle

$$\frac{\pi}{\pi-\tau} < \alpha(\tau) < \left(\frac{4+\cos^2\tau}{1+\cos^2\tau}\right)^{1/2} \qquad (0<\tau<\pi/2)$$

e permettono una facile applicazione del metodo dicotomico alla risoluzione dell'equazione $F(\tau,\alpha)=0$ per

$$\tau = n\frac{\pi}{32} \qquad (n=1,2,\ldots,15)\,.$$

Se ne sono poi ricavati i valori di $\lambda(\tau)$.

τ	$\alpha(\tau)$	$\lambda(\tau)$
0	1,4302 9665 31	0,4888 1863 64
$\pi/32$	1,4608 8327	0,4685 6405
$2\pi/32$	1,4930 9753	0,4485 6320
$3\pi/32$	1,5270 1015	0,4288 6061
$4\pi/32$	1,5626 8071	0,4095 0527
$5\pi/32$	1,6001 4831	0,3905 5260
$6\pi/32$	1,6394 1682	0,3720 6706
$7\pi/32$	1,6804 3211	0,3541 2620
$8\pi/32$	1,7230 4629	0,3368 2639
$9\pi/32$	1,7669 6198	0,3202 9163
$10\pi/32$	1,8116 4600	0,3046 8658
$11\pi/32$	1,8561 9931	0,2902 3567
$12\pi/32$	1,8991 7416	0,2772 4927
$13\pi/32$	1,9383 5954	0,2661 5298
$14\pi/32$	1,9706 5219	0,2575 0166
$15\pi/32$	1,9923 1514	0,2519 3235
$16\pi/32$	2,0000 0000	0,2500 0000

5. Confronto fra alcune diseguaglianze di Wirtinger.

5.1 *Enunciato.*

5.11 PREMESSA. Accanto alle diseguaglianze

$$\int_0^\pi y^2(t)\,dt \leqslant \lambda_{02}(\tau)\int_0^\pi [y''(t)]^2\,dt\,, \qquad y \in W_\tau[0,\pi]\,, \tag{41}$$

$$\int_0^\pi [y'(t)]^2\,dt \leqslant \lambda_{12}(\tau)\int_0^\pi [y''(t)]^2\,dt\,, \qquad y \in W_\tau[0,\pi]\,, \tag{42}$$

stabilite per le funzioni (*) dello spazio $W_\tau[0,\pi]$, la prima in [10], la seconda in questo lavoro, consideriamo nello stesso spazio anche la

(*) Per la definizione di $W_\tau[0,\pi]$ si veda il paragrafo 4.12.

diseguaglianza

$$\int_0^\pi y^2(t)\,dt \leqslant \lambda_{01}(\tau)\int_0^\pi [y'(t)]^2\,dt\,, \qquad y \in W_\tau[0,\pi]\,. \tag{43}$$

Se $0<\tau<\pi$, indichiamo con $V_\tau[0,\pi]$ lo spazio delle funzioni assolutamente continue in $[0,\pi]$ con derivata prima in $L^2[0,\pi]$ e nulle per $t=0$, $t=\tau$ e $t=\pi$. Se $\tau=0$ oppure $\tau=\pi$, indichiamo con $V_\tau[0,\pi]$ lo spazio delle funzioni assolutamente continue in $[0,\pi]$ con derivata prima in $L^2[0,\pi]$ e nulle per $t=0$ e $t=\pi$. In ogni caso $V_\tau[0,\pi]$ è una estensione propria di $W_\tau[0,\pi]$.

La diseguaglianza del tipo (43) è stata studiata in [9] nello spazio $V_\tau[0,\pi]$ e si è trovato

$$\int_0^\pi y^2(t)\,dt \leqslant \lambda_{01}^{(1)}(\tau)\int_0^\pi [y'(t)]^2\,dt\,, \qquad y \in V_\tau[0,\pi]\,, \tag{43'}$$

con

$$\lambda_{01}^{(1)}(\tau) = \max\left[\frac{\tau^2}{\pi^2}, \frac{(\pi-\tau)^2}{\pi^2}\right]. \tag{43''}$$

Se $0\leqslant\tau\leqslant\pi/2$ le estremali di (43') sono date da

$$y = \begin{cases} 0 & (0\leqslant t\leqslant\tau)\,, \\ c\sin\dfrac{\pi(\pi-t)}{\pi-\tau} & (\tau\leqslant t\leqslant\pi)\,. \end{cases} \tag{44}$$

Se $\pi/2\leqslant\tau\leqslant\pi$ le estremali di (43') sono date da

$$y = \begin{cases} c\sin\dfrac{\pi t}{\tau} & (0\leqslant t\leqslant\tau)\,, \\ 0 & (\tau\leqslant t\leqslant\pi)\,. \end{cases} \tag{45}$$

Tutte le estremali corrispondenti a $\tau=\pi/2$ si ottengono combinando linearmente le (44) e (45); fra esse sono da segnalare le $y=c\sin 2t$

che appartengono a $W_{\pi/2}[0, \pi]$ e pertanto già fin d'ora si può dire che

$$\lambda_{01}(\pi/2) = \lambda_{01}^{(1)}(\pi/2) = \tfrac{1}{4}\,.$$

Per $\tau \neq \pi/2$ le estremali sopra scritte non appartengono mai a $W_\tau[0, \pi]$.

5.12 Nonostante quanto detto, vale il seguente teorema.

ENUNCIATO. Si ha:

$$\lambda_{01}(\tau) = \lambda_{01}^{(1)}(\tau) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \pi)\,, \tag{46}$$

restando $\lambda_{01}(\tau)$ l'estremo superiore del problema variazionale (43) (il massimo soltanto per $\tau = \pi/2$).

Per la dimostrazione si rinvia al paragrafo 5.2.

5.13 COROLLARIO. Si ha:

$$\lambda_{02}(\tau) < \lambda_{01}(\tau)\cdot\lambda_{12}(\tau) \qquad (\text{per } \tau \neq \pi/2)\,,$$

con $\lambda_{01}(\tau)$ dato dalle (46) e (43″), mentre

$$\frac{1}{16} = \lambda_{02}(\pi/2) = \lambda_{01}(\pi/2)\cdot\lambda_{12}(\pi/2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\,.$$

5.2 *Dimostrazione.*

5.21 Abbiamo già visto che la formula da dimostrare (46) è vera per $\tau = \pi/2$. Vista la simmetria del problema rispetto a $\pi/2$, possiamo limitarci alla sua dimostrazione per $0 \leqslant \tau < \pi/2$.

La prima parte della dimostrazione è dedicata al caso $0 < \tau < \pi/2$, la seconda al caso $\tau = 0$.

5.22 Sia dunque $0 < \tau < \pi/2$, poniamo $c = 1$ nella (44) e diciamo $\bar{y}(t)$ la corrispondente estremale.

Scelto un arbitrario valore δ, con $0 < \delta < \tau$, definiamo la variazione

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{(\pi-\tau)\delta^2}\,(t-\tau)[t-(\tau-\delta)]^2 & \text{per } \tau-\delta \leqslant t \leqslant \tau\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

La funzione $z(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t)$ appartiene allo spazio $W_\tau[0, \pi]$, e per essa si trova

$$\int_0^\pi \left(z^2 - \lambda_{01}^{(1)}(\tau)\, z'^2\right) dt = \int_{\tau-\delta}^{\tau} \left(\varepsilon^2 - \lambda_{01}^{(1)}(\tau)\, \varepsilon'^2\right) dt = \left(\frac{\pi}{\pi - \tau}\right)^2 \frac{\delta}{15}\left[\frac{\delta^2}{7} - 2\lambda_{01}^{(1)}(\tau)\right] < 0 .$$

Poichè

$$\int_0^\pi z'^2\, dt > \frac{\pi^2}{2(\pi - \tau)},$$

si conclude che

$$0 < \lambda_{01}^{(1)}(\tau) - \frac{\int_0^\pi z^2\, dt}{\int_0^\pi z'^2\, dt} < \delta$$

e la prima parte della dimostrazione è terminata.

5.23 Dimostriamo ora che

$$\lambda_{01}(0) = \lambda_{01}^{(1)}(0)\,,$$

cioè che

$$\lambda_{01}(0) = 1\,.$$

Accanto alla estremale $y = \sin t$, ottenuta dalla (44) ponendo $c = 1$, $\tau = 0$, consideriamo, per $0 < \delta < \pi/2$, la funzione « variata »

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{(\pi - \delta)\delta^2}\, t^2(t - \delta) & (0 \leqslant t \leqslant \delta)\,, \\ \sin \dfrac{\pi(t - \delta)}{\pi - \delta} & (\delta \leqslant t \leqslant \pi)\,. \end{cases}$$

La funzione $u(t)$ appartiene a $W_0[0, \pi]$ e si ha

$$\int_0^\pi (u^2 - u'^2)\, dt = \frac{\pi^2 \delta}{(\pi - \delta)^2 \cdot 15}\left[\frac{\delta^2}{7} - 2\right] + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\delta - 2\pi}{\pi - \delta} < 0\,,$$

mentre

$$\int_0^\pi u'^2\,dt > \int_\delta^\pi \left(\frac{\pi}{\pi-\delta}\right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi(t-\delta)}{\pi-\delta}\,dt = \frac{\pi^2}{2(\pi-\delta)},$$

quindi

$$0 < 1 - \frac{\int_0^\pi u^2\,dt}{\int_0^\pi u'^2\,dt} < \delta$$

e la seconda parte della dimostrazione è terminata.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. H. Hardy - J. E. Littlewood - G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, II ed. (1959).

[2] E. F. Beckenbach - R. Bellman, *Inequalities*, Springer, Berlin (1965).

[3] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer, Berlin (1970).

[4] Ky Fan - O. Taussky - J. Todd, *Discrete analogs of inequalities of Wirtinger*, Monatshefte für Mathematik, **59** (1955), pp. 73-90.

[5] M. P. Colautti, *Sulla maggiorazione « a priori » delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine*, Le Matematiche (Catania), **11** (1956), pp. 8-99.

[6] P. R. Beesack, *Integral inequalities of the Wirtinger type*, Duke Mathematical Journal, **25** (1958), pp. 477-498.

[7] U. Richard, *Metodi diversi per ottenere diseguaglianze alla De La Vallée Poussin nelle equazioni differenziali ordinarie del secondo e terzo ordine*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino, **27** (1967-68), pp. 35-68.

[8] U. Richard, *Sur des inégalités du type de Wirtinger et leur application aux équations différentielles ordinaires, Analyse fonctionnelle et applications*, Comptes rendus du Colloque d'Analyse, Rio de Janeiro, 1972, Hermann, Paris (1975), pp. 233-244.

[9] A. M. Bresquar, *Sulla diseguaglianza di Wirtinger*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, **51** (1974).

[10] A. M. Bresquar, *Sulle diseguaglianze di Wirtinger concernenti la derivata seconda*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, **52** (1974).

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 luglio 1975.