RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALBERTO VENNI

Un problema ai limiti per un'equazione astratta del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 291-314

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__291_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Un problema ai limiti per un'equazione astratta del secondo ordine.

ALBERTO VENNI (*)

Introduction.

In this paper the following boundary value problem is studied:

$$(*)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt}-B\right)\left(\dfrac{d}{dt}+A\right)u=f & 0<t<T\,, \\ u(0)=u_0\,, \qquad u(T)=u_T & u_0\in X\,,\ u_T\in X\,, \end{cases}$$

where T is a positive real number, X is a complex Banach space and $-A$, $-B$ are infinitesimal generators of analytic semigroups of bounded linear operators from X to X.

Under suitable conditions, existence and uniqueness for the solution of the problem $(*)$ are proved. Such conditions consist in permutability of the operators A and B, in invertibility of the operator $A+B$, and (as for the existence) in a Hölder condition on the function f and in being T larger than a certain positive real number, depending only on A and B.

After a suitable definition, under the same hypotheses, existence and uniqueness of the Green's function for the problem $(*)$ are proved.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta San Donato, 5 - 40127 Bologna.

Durante la preparazione del presente lavoro, l'A. ha fruito di una borsa di studio del C.N.R.

The results of existence and uniqueness for the solution can be extended to the following, more general, case:

$$(**)\qquad \begin{cases} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}-B_j\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}+A_k\right)u=f \qquad 0<t<T\,, \\ u(0)=u_0,\,\ldots,\,\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(0)=u_{n-1}\,, \\ u(T)=v_0,\,\ldots,\,\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}(T)=v_{m-1}\,. \end{cases}$$

If the space X is one-dimensional, the operators $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ are identified with complex numbers and the equation which appears in (**) can be reduced, with the usual method, to the equation

$$(***)\qquad \frac{dU}{dt}=HU+F\,,$$

where $F=(0, \ldots, 0, f)$ and H is a square $(m+n)$-matrix. Then the solutions of the equation (***) are given by

$$U(t)=\exp(tH)\,C+\int_0^t \exp\big((t-s)H\big)F(s)\,ds\,,$$

where C is a constant $(m+n)$-vector and where the first row of the vector function U is the very scalar function u, solution of the equation which appears in (**). For instance, in the case $m=n=1$, we have

$$u(t)=C_1\exp(-tA)+C_2\frac{\exp(tB)-\exp(-tA)}{A+B}+ \\ +\int_0^t\frac{\exp\big((t-s)B\big)-\exp\big(-(t-s)A\big)}{A+B}f(s)\,ds\,.$$

The $m+n$ constants are determined by imposing the boundary conditions.

The matter, therefore, is to find such conditions that allow to

« transport » this solution to the infinite-dimensional case; in this respect, in comparison with the case $m = n = 1$, the case when m and n are arbitrary involves only formal complications.

1. Ipotesi e richiami di risultati noti.

Sono fissati uno spazio di Banach complesso $X \neq \{0\}$, un sottospazio vettoriale D di X, denso in X, e gli operatori lineari chiusi $A: D \to X$, $B: D \to X$. Come è d'uso si denotano con $\varrho(-A)$ e con $\varrho(-B)$ gl'insiemi risolventi degli operatori $-A$ e $-B$; se $\lambda \in \varrho(-A)$ (rispettivamente $\varrho(-B)$) si pone $R(\lambda; -A) = (\lambda I + A)^{-1}$ (rispettivamente $R(\lambda; -B) = (\lambda I + B)^{-1}$). Per ogni $\vartheta \in]0, \pi[$ poniamo $S_\vartheta = \{\lambda;\ \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \neq 0,\ |\arg \lambda| < \vartheta\}$ (dove è inteso che $-\pi \leqslant \arg \lambda < \pi$). Con $\overline{S}_\vartheta$ denotiamo la chiusura di S_ϑ.

1.1 IPOTESI. *Esistono* $\vartheta_0 \in]\pi/2, \pi[$ *e* $C_0 \in \mathbb{R}^+$ *tali che* $\overline{S}_{\vartheta_0} \subseteq \varrho(-A) \cap \varrho(-B)$ *e per ogni* $\lambda \in \overline{S}_{\vartheta_0}$ *risulta* $\max\{\|R(\lambda; -A)\|, \|R(\lambda; -B)\|\} \leqslant C_0(1 + |\lambda|)^{-1}$.

È noto che se vale l'ipotesi 1.1 $-A$ e $-B$ sono generatori infinitesimali di due semigruppi $t \to \exp(-tA)$, $t \to \exp(-tB)$, definiti in un settore aperto S_{ϑ_1} (con $\vartheta_0 - \pi/2 < \vartheta_1 < \pi/2$), a valori in $\mathfrak{L}(X, X)$ (algebra di Banach degli operatori lineari continui da X in X) e tali che:

1.1.1 *se* $E \in \{A, B\}$, $t \to \exp(-tE)$ *è analitica su* S_{ϑ_1} (*nella norma di* $\mathfrak{L}(X, X)$);

1.1.2 *se* $E \in \{A, B\}$, *ponendo* $\exp(-OE) = I$ *si ottiene che* $\forall x \in X$, $t \to \exp(-tE)x$ *è continua su* $\overline{S_{\vartheta_0 - \pi/2}}$;

1.1.3 *se* $E \in \{A, B\}$, $x \in X$ *e* $t \in S_{\vartheta_1}$, *allora* $\exp(-tE)x \in \mathfrak{D}(E^n)$, $\forall n \geqslant 1$;

1.1.4 *se* $E \in \{A, B\}$, *allora* $\forall t \in S_{\vartheta_1}$ *e per ogni* $n \geqslant 1$

$$\frac{d^n}{dt^n} \exp(-tE) = (-E)^n \exp(-tE)\ ;$$

1.1.5 *esiste una curva* Γ *continua e contenuta in* S_{ϑ_0}, *tale che se* $E \in \{A, B\}$ *e* $t \in S_{\vartheta_1}$, *allora*

$$\exp(-tE) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp(\lambda t) R(\lambda; -E)\, d\lambda\ ;$$

1.1.6 *esiste* $\delta \in \mathbb{R}^+$, *e per ogni* n *intero non negativo esiste* M_n *reale positivo tale che se* $E \in \{A, B\}$ *e* $t \in \overline{S_{\vartheta_0 - \pi/2}} \setminus \{0\}$, *allora* $\|E^n \exp(-tE)\| \leq M_n |t|^{-n} \exp(-\delta(\operatorname{Re} t))$;

1.1.7 *se* $E \in \{A, B\}$ *e* $x \in D$, *allora la funzione* $t \to \exp(-tE)x$ (*con* t *reale non negativo*) *è derivabile anche per* $t = 0$, *con derivata uguale a* $-Ex$;

1.1.8 *se* $E \in \{A, B\}$, $T \in \mathbb{R}^+$, $v: [0, T] \to X$ *è continua e tale che per* $t > 0$ $v(t) \in D$ *e* v *ha derivata uguale a* $-Ev(t)$, *allora* $\forall t \in [0, T]$ $v(t) = \exp(-tE)v(0)$.

(Per tutti questi risultati si veda [5], [6] e inoltre [2], [3], [4]).

1.2 Osservazione. Se vale l'ipotesi 1.1 non può essere $A + B = 0$. Infatti, se vale 1.1 e $A + B = 0$, allora $\varrho(-A) = \mathbf{C}$ e per ogni λ complesso $\|R(\lambda; -A)\| \leq C_0(1 + |\lambda|)^{-1}$. Poichè, come è noto, $\lambda \to R(\lambda; -A)$ è analitica su $\varrho(-A)$, allora (cfr. [1], pag. 232 e 237) si ha che per ogni λ complesso $R(\lambda; -A) = R(0; -A) = A^{-1}$. Dunque, essendo $\|A^{-1}\| \leq C_0(1 + |\lambda|)^{-1}$ $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, deve essere $A^{-1} = 0$, e ciò è possibile solo se $X = \{0\}$. Ma questo è stato esplicitamente escluso.

1.3 Osservazione. Supponiamo che valga 1.1. Allora esistono A^{-1} e B^{-1} e appartengono a $\mathcal{L}(X, X)$. Anche AB^{-1} e BA^{-1} appartengono a $\mathcal{L}(X, X)$. Pertanto, da $A + B = (AB^{-1} + I)B = (I + BA^{-1})A$, segue che se $\min\{\|AB^{-1}\|, \|BA^{-1}\|\} < 1$, allora $(A + B)^{-1}$ esiste e appartiene a $\mathcal{L}(X, X)$.

1.4 Ipotesi. $(A + B)^{-1}$ *esiste e appartiene a* $\mathcal{L}(X, X)$.

1.5 Ipotesi. $AB = BA$ (*cioè se* $x \in D$, *allora* $Ax \in D$ *se e solo se* $Bx \in D$ *e in tal caso* $ABx = BAx$).

Studieremo l'equazione

1.6
$$\left(\frac{d}{dt} - B\right)\left(\frac{d}{dt} + A\right) u = f$$

con riferimento al problema di valori ai limiti

1.7
$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt} - B\right)\left(\dfrac{d}{dt} + A\right) u = f & 0 < t < T\,, \\ u(0) = u_0\,, \quad u(T) = u_T & u_0 \in X\,, \quad u_T \in X\,. \end{cases}$$

Chiamerò soluzione dell'equazione 1.6 sull'intervallo $[0, T]$ ogni funzione $u: [0, T] \to X$, tale che:

1.8 *u è continua su $[0, T]$ e derivabile su $]0, T[$;*

1.9 $\forall t \in]0, T[, \ u(t) \in D$;

1.10 *la funzione $t \to (du/dt)(t) + Au(t)$, definita per $0 < t < T$, ha codominio contenuto in D, è derivabile e ammette prolungamento continuo a $[0, T]$;*

1.11 *l'equazione 1.6 è soddisfatta per $0 < t < T$.*

Si chiamerà soluzione del problema 1.7 ogni funzione u che sia soluzione su $[0, T]$ dell'equazione 1.6 e che sia tale che $u(0) = u_0$, $u(t) = u_T$.

2. Alcuni risultati preliminari.

2.1 Lemma. *Valga l'ipotesi 1.5 e λ appartenga a $\varrho(-B)$. Allora:*

2.1.1 $\forall x \in D, \ A \cdot R(\lambda; -B)x = R(\lambda; -B)Ax.$

Se in più vale anche l'ipotesi 1.1, allora:

2.1.2 *se $x \in D$ e $t \in \overline{S_{\vartheta_0 - \pi/2}}$, allora $A \exp(-tB)x = \exp(-tB)Ax$;*

2.1.3 *se $\lambda \in \varrho(-A)$ e $t \in \overline{S_{\vartheta_0 - \pi/2}}$, allora*

$$R(\lambda; -A) \exp(-tB) = \exp(-tB) R(\lambda; -A);$$

2.1.4 *se t e t' appartengono a $\overline{S_{\vartheta_0 - \pi/2}}$, allora*

$$\exp(-tA) \exp(-t'B) = \exp(-t'B) \exp(-tA) .$$

Infine tutti i risultati rimangono veri scambiando A con B.

Dimostrazione. Se vale l'ipotesi 1.5 e $\lambda \in \varrho(-B)$, $x \in D$, allora $x = \lambda R(\lambda; -B)x + B \cdot R(\lambda; -B)x$, e poichè $\lambda R(\lambda; -B)x \in D$, allora anche $B \cdot R(\lambda; -B)x \in D$; pertanto da 1.5 segue che $A \cdot R(\lambda; -B)x \in D$ e $AB \cdot R(\lambda; -B)x = BA \cdot R(\lambda; -B)x$. Dunque

$$Ax = A(\lambda I + B) R(\lambda; -B)x = (\lambda I + B) AR(\lambda; -B)x.$$

Se al primo e all'ultimo membro di questa uguaglianza si applica l'operatore $R(\lambda; -B)$, si ottiene 2.1.1.

Supponiamo che valga anche 1.1 e fissiamo $x \in D$, $t \in \overline{S_{\vartheta_0-\pi/2}}$. Se $t=0$, è ovvio che $A \exp(-tB)x = \exp(-tB)Ax$. Se $t \neq 0$, tenendo presente 2.1.1 e il fatto che A è chiuso, si ottiene

$$\exp(-tB)Ax = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp(\lambda t) R(\lambda; -B)Ax\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A(\exp(\lambda t) R(\lambda; -B)x)\, d\lambda = A \exp(-tB)x\,.$$

Se $\lambda \in \varrho(-A)$ e $t \in \overline{S_{\vartheta_0-\pi/2}}$, tenendo presente 2.1.2, $\forall x \in X$ si ha $\exp(-tB)x = (\lambda I + A)\exp(-tB)R(\lambda; -A)x$. Applicando a entrambi i membri l'operatore $R(\lambda; -A)$ si ottiene 2.1.3.

Se t e t' appartengono a $\overline{S_{\vartheta_0-\pi/2}}$ e $t=0$, allora l'uguaglianza di 2.1.4 è banale. Se $t \neq 0$, tenuto conto di 2.1.3, $\forall x \in X$ si ha

$$\exp(-tA)\exp(-t'B)x =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp(\lambda t) R(\lambda; -A)\exp(-t'B)x\, d\lambda = \exp(-t'B)\exp(-tA)x\,.$$

L'ultima affermazione è ovvia.

2.2 Lemma. *Supponiamo che valgano* 1.1 *e* 1.5 *e fissiamo* $t \in \mathbb{R}^+$. *Se* $x \in X$ *e* $\int_0^t \exp(-sA)\exp(-sB)x\, ds = 0$, *allora* $x = 0$.

Dimostrazione. Anzitutto da 1.1.2 segue facilmente che $s \to \exp(-sA)\exp(-sB)x$ è continua per $s \geqslant 0$. Sia $a \geqslant 0$, arbitrario. Tenuto conto di 2.1.4 si ha

$$\int_a^{a+t} \exp(-sA)\exp(-sB)x\, ds =$$

$$= \exp(-aA)\exp(-aB)\int_0^t \exp(-sA)\exp(-sB)x\, ds = 0\,.$$

Sia $0 < b \leqslant t$. Allora:

$$\int_a^{a+b} \exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds = \left(\int_a^{a+t} - \int_{a+b}^{a+t}\right)\exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds =$$

$$= -\int_{a+b}^{a+t}\exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds =$$

$$= -\left(\int_{a+b}^{a+b+t} - \int_{a+t}^{a+b+t}\right)\exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds = \int_{a+t}^{a+b+t}\exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds.$$

Da qui, per induzione su n, si ottiene che $\forall n \geqslant 0$

$$\int_0^b \exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds = \int_{nt}^{nt+b}\exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds\ .$$

Ma (per 1.1.6) $\left\|\int_{nt}^{nt+b}\exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds\right\| \leqslant bM_0^2\|x\|\exp(-2\delta nt)$ che tende a 0 per $n \to \infty$. Dunque $\forall b \in]0, t]$ $\int_0^b \exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds = 0$, perciò

$$0 = \lim_{b \to 0^+}\frac{1}{b}\int_0^b \exp(-sA)\exp(-sB)x\,ds = \exp(-0A)\exp(-0B)x = x\ .$$

2.3 Lemma. *Siano S e T spazi topologici compatti e $S\times T$ abbia la topologia prodotto. Siano Y, Z spazi di Banach e sia $F\colon S\times T \to \mathcal{L}(Y, Z)$ tale che $\forall y \in Y$ $(s, t) \to F(s, t)y$ sia continua su $S\times T$. Fissiamo $s_0 \in S$ e un compatto $K \subset Y$. Allora per $s \to s_0$ la convergenza di $F(s, t)y$ a $F(s_0, t)y$ è uniforme rispetto a $(t, y) \in T\times K$, cioè*

$$\lim_{s\to s_0}\Big(\sup_{(t,y)\in T\times K}\|F(s, t)y - F(s_0, t)y\|\Big) = 0\ .$$

Dimostrazione. Poichè $S\times T$ è compatto, dal teorema di Banach-Steinhaus segue che

$$\sup_{(s,t)\in S\times T}\|F(s, t)\| < C < +\infty\ .$$

Fissato $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\forall (t, y) \in T \times Y$ esistono un intorno $U(t, y)$ di s_0 e un intorno $V(t, y)$ di t, tali che

$$(s', t') \in U(t, y) \times V(t, y) \Rightarrow \|F(s', t')y - F(s_0, t)y\| \leqslant \tfrac{1}{2}\eta .$$

Sarà $T = \bigcup_{k=1}^{p} V(t_k, y)$ per certi $t_1, \dots, t_p \in T$; sia allora $U_y = \bigcap_{k=1}^{p} U(t_k, y)$. Se $(s, t) \in U_y \times T$, esisterà $k \in \{1, \dots, p\}$ tale che $(s, t) \in U(t_k, y) \times V(t_k, y)$. Dunque $\|F(s, t)y - F(s_0, t)y\| \leqslant \|F(s, t)y - F(s_0, t_k)y\| + \|F(s_0, t_k)y - F(s_0, t)y\| \leqslant \eta$. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$; allora esistono $y_1, \dots, y_q \in K$ tali che se $y \in K$ allora esiste $j \in \{1, \dots, q\}$ tale che $\|y - y_j\| \leqslant \varepsilon/3C$. Per quanto sopra visto è possibile trovare un intorno U_ε di s_0 tale che

$$(s, t) \in U_\varepsilon \times T \Rightarrow \|F(s, t)y_j - F(s_0, t)y_j\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall j \in \{1, \dots, q\} .$$

Dunque se $s \in U_\varepsilon$, quali che siano $t \in T$ e $y \in K$, scelto opportunamente j in $\{1, \dots, q\}$, si ha:

$$\|F(s, t)y - F(s_0, t)y\| \leqslant \big(\|F(s, t)\| + \|F(s_0, t)\|\big)\|y - y_j\| + \\ + \|F(s, t)y_j - F(s_0, t)y_j\| \leqslant \varepsilon .$$

2.4 Lemma *Sia $T \in R^+$ e sia $\Delta = \{(t, s); (t, s) \in [0, T] \times [0, T], t \neq s\}$. Sia $L: \Delta \to \mathfrak{L}(X, X)$ e valgano le seguenti proprietà:*

2.4.1 $\forall x \in X$ $(t, s) \to L(t, s)x$ *è continua su* Δ;

2.4.2 $\forall t \in [0, T]$, *esistono* $L^+(t, t)$ *e* $L^-(t, t)$ *in* $\mathfrak{L}(X, X)$ *tali che*

$$\forall x \in X \qquad L^+(t, t)x = \lim_{\substack{(\tau,\sigma)\to(t,t)\\ 0\leqslant\sigma<\tau\leqslant T}} L(\tau, \sigma)x \quad e \quad L^-(t, t)x = \lim_{\substack{(\tau,\sigma)\to(t,t)\\ 0\leqslant\tau<\sigma\leqslant T}} L(\tau, \sigma)x$$

(*per ragioni di comodità, invece di* $L(t, s)$ *scriverò anche* $L^+(t, s)$ *se* $0 \leqslant s < t \leqslant T$, *e* $L^-(t, s)$ *se* $0 \leqslant t < s \leqslant T$);

2.4.3 *se* $(t, s) \in \Delta$, *allora* $\exists d_1 L(t, s) \in \mathfrak{L}(X, X)$ *tale che*

$$\forall x \in X \qquad d_1 L(t, s)x = \lim_{h\to 0} \frac{L(t + h, s)x - L(t, s)x}{h} ;$$

2.4.4 *$\forall x \in X$ la funzione $(t, s) \to d_1 L(t, s)x$ è continua sull'insieme $\{(t, s); (t, s) \in]0, T[\times[0, T], t \neq s\}$;*

2.4.5 *esistono una funzione continua $\gamma\colon]0, T[\to \mathbb{R}^+$ e una costante reale $\beta \in [0, 2[$, tali che se $t \in]0, T[$, $s \in [0, T]$ e $t \neq s$, allora $\|d_1 L(t, s)\| \leqslant \gamma(t)|t-s|^{-\beta}$;*

2.4.6 *se $x \in X$ e $(t_0, t_1, t_2) \in]0, T[\times[0, T]\times[0, T]$, allora la funzione $s \to d_1 L(t_0, s)x$ è integrabile sull'intervallo di estremi t_1 e t_2 e $(t_0, t_1, t_2) \to \int_{t_1}^{t_2} d_1 L(t_0, s)x\,ds$ è continua su $]0, T[\times[0, T]\times[0, T]$.*

Ciò supposto, sia $\alpha > 0$, sia $\beta - 1 < \alpha \leqslant 1$ e sia $f\colon [0, T] \to X$ per cui esista $C' \in \mathbb{R}^+$ tale che $(t, s) \in [0, T]\times[0, T] \Rightarrow \|f(t) - f(s)\| \leqslant C'|t-s|^\alpha$. Allora $\forall t \in]0, T[$ la funzione $s \to d_1 L(t, s)f(s)$ è integrabile su $[0, T]$; inoltre, posto $v(t) = \int_0^T L(t, s)f(s)\,ds$ (per $0 < t < T$), si ha che v è derivabile e

$$\frac{dv}{dt}(t) = [L^+(t, t) - L^-(t, t)]f(t) + \int_0^T d_1 L(t, s)f(s)\,ds\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Le ipotesi 2.4.1 e 2.4.2 e la continuità di f assicurano che $\forall t \in [0, T]$ $s \to L^+(t, s)f(s)$ è continua su $[0, t]$ e $s \to L^-(t, s)f(s)$ è continua su $[t, T]$; perciò v è ben definita. A maggior ragione, per $0 \leqslant \varrho < T/2$, è ben definita su $[\varrho, T-\varrho]$ la funzione

$$t \to v_\varrho(t) = \int_0^{t-\varrho} L(t, s)f(s)\,ds + \int_{t+\varrho}^T L(t, s)f(s)\,ds\,.$$

È chiaro che $\forall t \in]0, T[$ $\lim_{\varrho\to 0^+} v_\varrho(t) = v(t)$. Si ha poi che, a causa di 2.4.6, $s \to d_1 L(t, s)f(t)$ è integrabile su $[0, T]$ e per 2.4.5 $\|d_1 L(t, s)\big(f(s) - f(t)\big)\| \leqslant C'\gamma(t)|t-s|^{\alpha-\beta}$: essendo $\alpha - \beta > -1$ ciò prova che (per t fissato in $]0, T[$) $s \to d_1 L(t, s)f(s)$ è integrabile su $[0, T]$.

Sia $0 < \varrho < T/2$ e calcoliamo $(d/dt)v_\varrho$. Sia $0 < |h| < \frac{1}{2}\varrho$; allora

$$\frac{v_\varrho(t+h) - v_\varrho(t)}{h} = \int_0^{t-\varrho} \frac{L(t+h, s) - L(t, s)}{h} f(s)\,ds +$$

$$+\int_{t+\varrho}^{T}\frac{L(t+h,s)-L(t,s)}{h}f(s)\,ds+\frac{1}{h}\int_{t-\varrho}^{t+h-\varrho}L(t,s)f(s)+$$
$$+\frac{1}{h}\int_{t+\varrho+h}^{t+\varrho}L(t,s)f(s)\,ds+\frac{1}{h}\int_{t-\varrho}^{t+h-\varrho}\big(L(t+h,s)-L(t,s)\big)f(s)\,ds+$$
$$+\frac{1}{h}\int_{t+\varrho+h}^{t+\varrho}\big(L(t+h,s)-L(t,s)\big)f(s)\,ds=\sum_{k=1}^{6}J_k(h)\,.$$

Da 2.4.1 segue

$$\lim_{h\to 0}J_3(h)=L^+(t,t-\varrho)f(t-\varrho)\,,\qquad \lim_{h\to 0}J_4(h)=-L^-(t,t+\varrho)f(t+\varrho)\,.$$

Dalla uniforme continuità di $(t,s)\to L^+(t,s)f(s)$ sul compatto $\{(t,s);\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$ e di $(t,s)\to L^-(t,s)f(s)$ sul compatto $\{(t,s);\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T\}$ segue

$$\lim_{h\to 0}J_5(h)=\lim_{h\to 0}J_6(h)=0\,.$$

Ai primi due integrali si può applicare il teorema di Lebesgue della convergenza dominata; infatti, tenendo conto del fatto che per $\varrho\leqslant t\leqslant T-\varrho$ e per $|h|<\varrho/2$ l'intervallo di estremi t, $t+h$ è contenuto in $[\varrho/2,\ T-\varrho/2]$, si ha

$$\left\|\frac{L(t+h,s)-L(t,s)}{h}f(s)\right\|=\left\|\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}d_1L(\xi,s)f(s)\,d\xi\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\max_{\varrho/2\leqslant t\leqslant T-\varrho/2}\gamma(t)\Big)\left(\frac{1}{2}\varrho\right)^{-\beta}\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|\Big)\,.$$

Dunque

$$\lim_{h\to 0}\big(J_1(h)+J_2(h)\big)=\int_0^{t-\varrho}d_1L(t,s)f(s)\,ds+\int_{t+\varrho}^{T}d_1L(t,s)f(s)\,ds\,.$$

Pertanto,

$$\forall t\in[\varrho,\ T-\varrho]\,,\qquad \frac{d}{dt}v_\varrho(t)=L^+(t,t-\varrho)f(t-\varrho)-$$
$$-L^-(t,t+\varrho)f(t+\varrho)+\left(\int_0^{t-\varrho}+\int_{t+\varrho}^{T}\right)L(t,s)f(s)\,ds\,.$$

La sopra menzionata uniforme continuità di $(t, s) \to L^+(t, s) f(s)$ e di $(t, s) \to L^-(t, s) f(s)$ assicurano che

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \left(L^+(t, t-\varrho) f(t-\varrho) - L^-(t, t+\varrho) f(t+\varrho)\right) = \left(L^+(t, t) - L^-(t, t)\right) f(t),$$

uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$. Sia poi W un compatto contenuto in $]0, T[$ e sia ϱ_0 un elemento di $]0, T/2[$ tale che sia $W \subset]\varrho_0, T-\varrho_0[$. Se $t \in W$ e se $0 \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant T$, allora, posto $C = \max_{s \in W} \gamma(s)$, risulta

$$\left\| \int_0^{t_1} d_1 L(t, s)\, x\, ds \right\| \leqslant C t_1 (t - t_1)^{-\beta} \|x\|,$$

$$\left\| \int_{t_2}^{T} d_1 L(t, s)\, x\, ds \right\| \leqslant C (T - t_2)(t_2 - t)^{-\beta} \|x\|,$$

cosicchè $x \to \int_0^{t_1} d_1 L(t, s)\, x\, ds$ e $x \to \int_{t_2}^{T} d_1 L(t, s)\, x\, ds$ appartengono a $\mathfrak{L}(X, X)$

Poichè per 2.4.6 esistono

$$\lim_{t_1 \to t^-} \int_0^{t_1} d_1 L(t, s)\, x\, ds = \int_0^{t} d_1 L(t, s)\, x\, ds$$

e

$$\lim_{t_2 \to t^+} \int_{t_2}^{T} d_1 L(t, s)\, x\, ds = \int_{t}^{T} d_1 L(t, s)\, x\, ds,$$

ne segue (per il teorema di Banach-Steinhaus) che $x \to \int_0^{t} d_1 L(t, s)\, x\, ds$ e $x \to \int_t^{T} d_1 L(t, s)\, x\, ds$ appartengono a $\mathfrak{L}(X, X)$, e infine $\forall (t, t_1, t_2) \in W \times [0, T] \times [0, T]$ la funzione $x \to \int_{t_1}^{t_2} d_1 L(t, s)\, x\, ds$ appartiene a $\mathfrak{L}(X, X)$.

Si può allora applicare il lemma 2.3 sostituendo i compatti S, T, K con $[0, \varrho_0]$, W, $f(W)$ e ponendo $F(\varrho, t)x = \int_{t-\varrho}^{t+\varrho} d_1 L(t, s)\, x\, ds$; otteniamo così

$$\lim_{\substack{\varrho\to 0^+\\ \varrho\leqslant\varrho_0}} \int_{t-\varrho}^{t+\varrho} d_1 L(t,s) f(t)\, ds = 0\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in W$. D'altra parte

$$\left\| \int_{t-\varrho}^{t+\varrho} d_1 L(t,s)(f(s)-f(t))\, ds \right\| \leqslant CC' \left(\int_{t-\varrho}^{t+\varrho} |t-s|^{\alpha-\beta} ds \right) = C'' \varrho^{\alpha-\beta+1} \xrightarrow[\varrho\to 0^+]{} 0\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in W$. Dunque, uniformemente rispetto a $t \in W$

$$\lim_{\substack{\varrho\to 0^+\\ \varrho\leqslant\varrho_0}} \frac{d}{dt} v_\varrho(t) = (L^+(t,t) - L^-(t,t)) f(t) + \int_0^T d_1 L(t,s) f(s)\, ds\,.$$

Ciò prova il lemma.

3. Definizione ed esistenza di una funzione di Green.

Chiameremo funzione di Green per il problema 1.7 ogni funzione $G\colon [0,T]\times[0,T] \to \mathfrak{L}(X,X)$, che goda delle seguenti proprietà:

3.1 $\forall s \in [0,T]$ $G(0,s) = G(T,s) = 0$;

3.2 $\forall x \in X$ $(t,s) \to G(t,s)x$ *è continua su* $[0,T]\times[0,T]$;

3.3 $\forall (t,s) \in \Delta$ (v. lemma 2.4), *esiste* $d_1 G(t,s)$ *in* $\mathfrak{L}(X,X)$ *tale che*

$$\forall x \in X \qquad d_1 G(t,s)x = \lim_{h\to 0} \frac{G(t+h,s)x - G(t,s)x}{h}\,;$$

3.4 $\forall t \in [0,T[$ *esiste* $d_1^+ G(t,t) \in \mathfrak{L}(X,X)$ *tale che*

$$\forall x \in X \qquad d_1^+ G(t,t)\, x = \lim_{h\to 0^+} \frac{G(t+h,t)x - G(t,t)x}{h}\,,$$

e $\forall t \in]0, T]$ *esiste* $d_1^- G(t, t) \in \mathcal{L}(X, X)$ *tale che*

$$\forall x \in X \qquad d_1^- G(t, t)x = \lim_{h \to 0^-} \frac{G(t+h, t)x - G(t, t)x}{h} ;$$

inoltre $\forall t \in]0, T[\;\; d_1^+ G(t, t) - d_1^- G(t, t) = I$;

3.5 *se per* $0 \leqslant s < t \leqslant T$ *poniamo* $d_1^+ G(t, s) = d_1 G(t, s)$, *per* $0 \leqslant t < s \leqslant T$ *poniamo* $d_1^- G(t, s) = d_1 G(t, s)$, *e se poniamo*

$$d_1^+ G(T, T) = d_1^- G(T, T) + I , \qquad d_1^- G(0, 0) = d_1^+ G(0, 0) - I ,$$

allora, $\forall x \in X$, $(t, s) \to d_1^+ G(t, s)x$ *è continua per* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *e* $(t, s) \to d_1^- G(t, s)x$ *è continua per* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$;

3.6 $\forall x \in X$ *e* $\forall (t, s) \in [0, T] \times [0, T]$, $G(t, s)x \in D$ *e* $\forall x \in X$ $(t, s) \to$ $\to AG(t, s)x$ *è continua su* $[0, T] \times [0, T]$;

3.7 $\forall x \in X$ *e* $\forall (t, s) \in \Delta$ $d_1 G(t, s)x + AG(t, s)x \in D$;

3.8 $\forall x \in X$ *la funzione* $(t, s) \to B(d_1 G(t, s)x + AG(t, s)x)$ *è continua sull'insieme* $\{(t, s); (t, s) \in]0, T[\times [0, T], t \neq s\}$; *inoltre* $\forall x \in X$ *e* $\forall (t, t_1, t_2) \in]0, T[\times [0, T] \times [0, T]$ *esiste*

$$\int_{t_1}^{t_2} B(d_1 G(t, s)x + AG(t, s)x)\, ds$$

e

$$(t, t_1, t_2) \to \int_{t_1}^{t_2} B(d_1 G(t, s)x + AG(t, s)x)\, ds$$

è continua su $]0, T[\times [0, T] \times [0, T]$;

3.9 *esistono una funzione continua* $\gamma \colon]0, T[\to \mathbf{R}^+$ *e una costante reale* $\beta \in [0, 2[$ *tali che se* $(t, s) \in]0, T[\times [0, T]$ *e* $t \neq s$ *allora*

$$\|B(d_1 G(t, s) + AG(t, s))\| \leqslant \gamma(t)|t - s|^{-\beta} ;$$

3.10 $\forall s \in [0, T]$ *e* $\forall x \in X$ *la funzione* $t \to d_1 G(t, s)x + AG(t, s)x$ *è derivabile su* $[0, s[\cup]s, T]$ *e la sua derivata è* $B(d_1 G(t, s)x + AG(t, s)x)$.

Vale allora il seguente teorema.

3.11 TEOREMA. *Valgano le ipotesi* 1.1, 1.4, 1.5 *e sia* $T > (1/\delta)\cdot$ $\cdot \log M_0 \geqslant 0$ (v. 1.1.6). *Se* $H = I - \exp(-TA)\exp(-TB)$, *allora* H *è un omeomorfismo lineare di* X *su* X. *Se poniamo*

3.11.1
$$G_0(t, s) = \big[\exp\big(-(T-s)A\big)\exp\big(-(T-t)B\big) - \\ - \exp(-TA)\exp\big(-(T+s-t)B\big) + \exp(-tA)\exp(-sB) - \\ - \exp\big(-(t-s)A\big)\big](A+B)^{-1}H^{-1} \qquad \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$$

3.11.2
$$G_0(t, s) = \big[\exp\big(-(T-s)A\big)\exp\big(-(T-t)B\big) - \\ - \exp\big(-(T+t-s)A\big)\exp(-TB) + \exp(-tA)\exp(-sB) - \\ - \exp\big(-(s-t)B\big)\big](A+B)^{-1}H^{-1} \qquad \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T,$$

allora G_0 *è una funzione di Green per il problema* 1.7.

DIMOSTRAZIONE. Per 1.1.6

$$\|\exp(-TA)\exp(-TB)\| \leqslant \big(M_0 \exp(-\delta T)\big)^2 < 1\ ,$$

e quindi H è un omeomorfismo lineare di X su X.

Per $t = s$ sia 3.11.1 che 3.11.2 danno

$$G_0(t, t) = \big[\exp\big(-(T-t)A\big)\exp\big(-(T-t)B\big) - \\ - \exp(-TA)\exp(-TB) + \exp(-tA)\exp(-tB) - I\big](A+B)^{-1}H^{-1}\ ;$$

perciò G_0 è ben definita.

(Proprietà 3.1) Che sia $G_0(0, s) = G_0(T, s) = 0$ si verifica immediatamente usando, rispettivamente, 3.11.2 e 3.11.1.

(Proprietà 3.2) La continuità di $(t, s) \to G_0(t, s)x$ si ottiene separatamente per $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ e per $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$, usando le definizioni di G_0 e 1.1.2.

(Proprietà 3.3, 3.4, 3.5)

a) Se $0 \leqslant s < t < T$, allora $T + s - t \geqslant T - t > 0$, $t \geqslant t - s > 0$;

perciò, tenendo conto del lemma 2.1, da 1.1.4 e dalla definizione 3.11.1

segue

$$
\begin{aligned}
d_1 G_0(t, s)x = {} & [\exp(-(T-s)A)\exp(-(T-t)B) - \\
& -\exp(-TA)\exp(-(T+s-t)B)]\cdot B(A+B)^{-1}H^{-1}x + \\
& +[\exp(-(t-s)A) - \exp(-tA)\exp(-sB)]\cdot A(A+B)^{-1}H^{-1}x\,.
\end{aligned}
$$

b) Se $0 \leqslant s < t = T$, allora $G_0(t, s) = 0$ e (per $s - T < h < 0$):

$$
\begin{aligned}
& \frac{G_0(t+h, s)x - G_0(t, s)x}{h} = \\
& = \frac{1}{h}[\exp(-(T-s)A)\exp(-(-h)B) - \exp(-TA)\exp(-(s-h)B) + \\
& + \exp(-(T+h)A)\exp(-sB) - \\
& - \exp(-(T+h-s)A)](A+B)^{-1}H^{-1}x = \\
& = \left[\frac{-\exp(-(T+h-s)A) + \exp(-(T-s)A)}{h} + \exp(-(T-s)A)\cdot\right. \\
& \cdot\frac{\exp(-(-h)B) - I}{h} + \frac{\exp(-(T+h)A) - \exp(-TA)}{h}\exp(-sB) + \\
& \qquad \left. + \exp(-TA)\frac{\exp(-sB) - \exp(-(s-h)B)}{h}\right](A+B)^{-1}H^{-1}x\,,
\end{aligned}
$$

e questo, poichè $(A+B)^{-1}H^{-1}x \in D$, per $h \to 0^-$ tende a

$$
[\exp(-(T-s)A) - \exp(-TA)\exp(-sB)]H^{-1}x\,.
$$

Dunque la formula che dà $d_1 G_0(t, s)$ per $0 \leqslant s < t < T$ vale in realtà per $0 \leqslant s < t \leqslant T$ e $(t, s) \to d_1 G_0(t, s)x$ è continua per $0 \leqslant s < t \leqslant T$.

c) Se $0 \leqslant s = t < T$ e $0 < h < T - t$, si ha:

$$
\begin{aligned}
& \frac{G_0(t+h, t)x - G_0(t, t)x}{h} = \\
& \quad = \left[\exp(-(T-t)A)\frac{\exp(-(T-t-h)B) - \exp(-(T-t)B)}{h} - \right. \\
& \quad - \exp(-TA)\frac{\exp(-(T-h)B) - \exp(-TB)}{h} +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\exp(-(t+h)A)-\exp(-tA)}{h}\exp(-tB)-\frac{\exp(-hA)-I}{h}\Bigg]\cdot$$

$$\cdot(A+B)^{-1}H^{-1}x\xrightarrow[h\to 0^+]{}\big[\exp(-(T-t)A)\exp(-(T-t)B)-$$

$$-\exp(-TA)\exp(-TB)\big]B(A+B)^{-1}H^{-1}x+$$

$$+[I-\exp(-tA)\exp(-tB)]\cdot$$

$$\cdot A(A+B)^{-1}H^{-1}x=\lim_{\substack{(\tau,\sigma)\to(t,t)\\ 0\leqslant\sigma<\tau\leqslant T}} d_1G_0(\tau,\sigma)x\,.$$

Ciò prova la continuità di $(t,s)\to d_1^+G_0(t,s)x$ per $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$.

d) Se $0<t<s\leqslant T$ allora $T-t\geqslant s-t>0$, $T-s+t\geqslant t>0$ perciò

$$d_1G_0(t,s)x=\big[\exp(-(T-s)A)\exp(-(T-t)B)-$$

$$-\exp(-(s-t)B)\big]B(A+B)^{-1}H^{-1}x+$$

$$+\big[\exp(-(T-s+t)A)\exp(-TB)-\exp(-tA)\exp(-sB)\big]\cdot$$

$$\cdot A(A+B)^{-1}H^{-1}x\,.$$

e) Se $0=t<s\leqslant T$, allora (per $0<h<s$):

$$\frac{G_0(t+h,s)x-G_0(t,s)x}{h}=\frac{1}{h}\big[\exp(-(T-s)A)\exp(-(T-h)B)-$$

$$-\exp(-(T+h-s)A)\exp(-TB)+\exp(-hA)\exp(-sB)-$$

$$-\exp(-(s-h)B)\big](A+B)^{-1}H^{-1}x=$$

$$=\Bigg[\exp(-(T-s)A)\frac{\exp(-(T-h)B)-\exp(-TB)}{h}+$$

$$+\frac{-\exp(-(T+h-s)A)+\exp(-(T-s)A)}{h}\exp(-TB)+$$

$$+\frac{\exp(-hA)-I}{h}\exp(-sB)+\frac{\exp(-sB)-\exp(-(s-h)B)}{h}\Bigg]\cdot$$

$$\cdot(A+B)^{-1}H^{-1}x\xrightarrow[h\to 0^+]{}\big[\exp(-(T-s)A)\exp(-TB)-\exp(-sB)\big]H^{-1}x\,;$$

pertanto la formula che dà $d_1G_0(t,s)$ per $0<t<s\leqslant T$ vale in realtà per $0\leqslant t<s\leqslant T$ e $(t,s)\to d_1G_0(t,s)x$ è continua per $0\leqslant t<s\leqslant T$.

f) Se $0 < t = s \leqslant T$ e $-t < h < 0$, allora

$$\frac{G_0(t+h,\,t)x - G_0(t,\,t)x}{h} =$$

$$= \Big[\exp\big(-(T-t)A\big)\,\frac{\exp\big(-(T-t-h)B\big) - \exp\big(-(T-t)B\big)}{h} -$$

$$-\frac{\exp\big(-(T+h)A\big) - \exp(-TA)}{h}\exp(-TB) +$$

$$+\frac{\exp\big(-(t+h)A\big) - \exp(-tA)}{h}\exp(-tB) - \frac{\exp\big(-(-h)B\big) - I}{h}\Big]\cdot$$

$$\cdot (A+B)^{-1}H^{-1}x \xrightarrow[h\to 0^-]{} [\exp(-TA)\exp(-TB) - \exp(-tA)\exp(-tB)]\cdot$$

$$\cdot A(A+B)^{-1}H^{-1}x + \big[\exp\big(-(T-t)A\big)\exp\big(-(T-t)B\big) - I\big]\cdot$$

$$\cdot B(A+B)^{-1}H^{-1}x = \lim_{\substack{(\tau,\sigma)\to(t,t)\\ 0\leqslant\tau<\sigma\leqslant T}} d_1G_0(\tau,\sigma)x\,.$$

Ciò prova la continuità di $(t, s) \to d_1^- G_0(t, s)x$ per $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$.

g) Che sia $d_1^+ G_0(t, t) - d_1^- G_0(t, t) = I$ si verifica senza difficoltà.

(Proprietà 3.6) Il fatto che $G_0(t, s)x \in D$ segue da 1.1.3 e dal fatto che, comunque, $(A + B)^{-1}H^{-1}x \in D$. Per questo stesso motivo, a causa del lemma 2.1, nelle espressioni che forniscono $AG_0(t, s)x$ si può « trasportare » l'operatore A fino al posto immediatamente a sinistra di $(A + B)^{-1}H^{-1}x$, ottenendo (a causa di 1.1.2) la continuità di $(t, s) \to \to AG_0(t, s)x$.

(Proprietà 3.7) Tenendo presente 1.1.3, si ha che per $0 \leqslant s < t \leqslant T$, essendo $0 < T - s \leqslant T$,

$$d_1G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x = \big[\exp\big(-(T-s)A\big)\exp\big(-(T-t)B\big) -$$

$$- \exp(-TA)\exp\big(-(T+s-t)B\big)\big]H^{-1}x \in D$$

e per $0 \leqslant t < s \leqslant T$, essendo $0 < s - t \leqslant T - t$,

$$d_1G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x =$$

$$= \big[\exp\big(-(T-t)B\big)\exp\big(-(T-s)A\big) - \exp\big(-(s-t)B\big)\big]H^{-1}x \in D\,.$$

(Proprietà 3.8) Tenendo presente il lemma 2.1, per $0 \leqslant s < t < T$:

$$B\big(d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x\big) = \big[\exp\big(-(T-s)A\big)B\exp\big(-(T-t)B\big) - \\ - B\exp\big(-(T+s-t)B\big)\exp(-TA)\big]H^{-1}x;$$

e per $0 < t < s \leqslant T$:

$$B\big(d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x\big) = \\ = \big[\exp\big(-(T-s)A\big)B\exp\big(-(T-t)B\big) - B\exp\big(-(s-t)B\big)\big]H^{-1}x\,.$$

Ciò prova la continuità sull'insieme $\{(t, s);\ (t, s) \in]0, T[\times[0, T],\ t \neq s\}$. L'integrabilità segue facilmente da 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.4 e si ha:

se $0 < t < T$ e $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant t$

$$\int_{t_1}^{t_2} B\big(d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x\big)\,ds = \\ = \int_{t_1}^{t_2}\exp\big(-(T-s)A\big)\,ds\cdot B\exp\big(-(T-t)B\big)H^{-1}x + \\ + \big[\exp\big(-(T+t_2-t)B\big)\exp(-TA) - \\ - \exp\big(-(T+t_1-t)B\big)\exp(-TA)\big]H^{-1}x$$

mentre se $0 < t < T$ e $t \leqslant t_1, t_2 \leqslant T$

$$\int_{t_1}^{t_2} B\big(d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x\big)\,ds = \\ = \int_{t_1}^{t_2}\exp\big(-(T-s)A\big)\,ds\cdot B\exp\big(-(T-t)B\big)H^{-1}x + \\ + \big[\exp\big(-(t_2-t)B\big) - \exp\big(-(t_1-t)B\big)\big]H^{-1}x\,.$$

È immediato constatare che se $W_1 = \{(t, t_1, t_2);\ 0 < t < T,\ 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant t\}$, $W_2 = \{(t, t_1, t_2);\ 0 < t < T,\ 0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant T\}$, $W_3 = \{(t, t_1, t_2);\ (t, t_2, t_1) \in W_2\}$, $W_4 = \{(t, t_1, t_2);\ 0 < t < T,\ t \leqslant t_1, t_2 \leqslant T\}$, allora $\bigcup_{k=1}^{4} W_k =$

$=]0, T[\times[0, T]\times[0, T]$, W_k $(k=1,2,3,4)$ è chiuso relativamente a $]0, T[\times[0, T]\times[0, T]$ e su W_k $(k=1,2,3,4)$ la funzione $(t, t_1, t_2)\to$ $\to \int_{t_1}^{t_2} B\big(d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x\big)\,ds$ è continua.

(Proprietà 3.9) Se $0 \leqslant s < t < T$, allora (v. 1.1.6)

$$\|B(d_1 G_0(t, s) + AG_0(t, s)\|\,|t-s| \leqslant M_0 M_1 \|H^{-1}\| \left[\frac{t-s}{T-t} + \frac{t-s}{T+s-t}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2M_0 M_1 \|H^{-1}\| \frac{t}{T-t};$$

se $0 < t < s \leqslant T$, allora

$$\|B(d_1 G_0(t, s) + AG_0(t, s)\|\,|t-s| \leqslant M_0 M_1 \|H^{-1}\| \left[\frac{s-t}{T-t} + \frac{s-t}{s-t}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2M_0 M_1 \|H^{-1}\|\,.$$

Dunque vale 3.9 con $\beta = 1$ e con $\gamma(t) = 2M_0 M_1 \|H^{-1}\|$ per $0 < t \leqslant T/2$, $\gamma(t) = 2M_0 M_1 \|H^{-1}\| t/(T-t)$ per $T/2 \leqslant t < T$.

(Proprietà 3.10) Per $0 \leqslant s < t \leqslant T$ si può scrivere

$$d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x = \exp\big(-(T-t)B\big)\exp\big(-(T-s)A\big)H^{-1}x -$$
$$-\exp\big(-(T+s-t)B\big)\exp(-TA)H^{-1}x$$

(lemma 2.1). Poichè $0 < T-s \leqslant T$ si ha che $\exp\big(-(T-s)A\big)H^{-1}x \in D$ $\exp(-TA)H^{-1}x \in D$; perciò $t \to d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x$ si può derivare, con derivata uguale a $B\big(d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x\big)$, su tutto $]s, T]$ (cfr. 1.1.7).

Se $0 \leqslant t < s \leqslant T$, allora

$$d_1 G_0(t, s)x + AG_0(t, s)x =$$
$$= \big[\exp\big(-(T-t)B\big)\exp\big(-(T-s)A\big) - \exp\big(-(s-t)B\big)\big]H^{-1}x\,,$$

e poichè $0 < s-t \leqslant T-t$, da 1.1.4 segue il risultato.

4. Esistenza di una soluzione.

4.1 Teorema. *Sia $T \in \mathbb{R}^+$ e sia $G\colon [0, T]\times[0, T] \to \mathcal{L}(X, X)$ una funzione di Green per il problema 1.7. Con riferimento al numero reale β*

della proprietà 3.9, *sia* $\beta - 1 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha > 0$. *Sia* $f\colon [0, T] \to X$ *tale che esista* $C \in \mathbb{R}^+$ *tale che* $\forall (t, s) \in [0, T] \times [0, T]$ *risulti* $\|f(t) - f(s)\| \leqslant \leqslant C|t-s|^\alpha$. *Se* $\forall t \in [0, T]$, $u(t) = \int_0^T G(t, s) f(s)\, ds$, *allora* u *è soluzione del problema* 1.7 *con* $u_0 = u_T = 0$.

Dimostrazione. Dalle proprietà 3.2, 3.5, 3.6 e dal teorema di Banach-Steinhaus segue che esiste $C' \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$4.1.1 \qquad \max\Big\{ \sup_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} \|G(t, s)\|,\ \sup_{0\leqslant s \leqslant t \leqslant T} \|d_1^+ G(t, s)\|,$$
$$\sup_{0\leqslant t \leqslant s \leqslant T} \|d_1^- G(t, s)\|,\ \sup_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} \|AG(t, s)\|\Big\} \leqslant C' .$$

Dalla proprietà 3.2 e dalla continuità di f segue la continuità di $s \to \to G(t, s) f(s)$, e quindi u è ben definita. Per la proprietà 3.2 $\lim_{t\to t_0} G(t, s) \cdot \cdot f(s) = G(t_0, s) f(s)$ e la convergenza è dominata $\big($su $[0, T]\big)$ a causa di 4.1.1 e della limitatezza di f.

Dunque u è continua su $[0, T]$. Per 3.1 $u(0) = u(T) = 0$. Inoltre,

$$\forall t \in [0, T], \qquad \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \int_0^T \frac{G(t+h, s) - G(t, s)}{h} f(s)\, ds ;$$

per $h \to 0$ l'integrando tende puntualmente (se $s \neq t$) a $d_1 G(t, s) f(s)$ e poichè

$$\left\| \frac{G(t+h, s) - G(t, s)}{h} f(s) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} d_1 G(\xi, s) f(s)\, d\xi \right\| \leqslant C' \max_{0\leqslant s \leqslant t} \|f(s)\| ,$$

la convergenza è dominata e

$$\frac{du}{dt}(t) = \int_0^T d_1 G(t, s) f(s)\, ds .$$

Se $t \to t_0$, per $s \neq t_0$, $d_1 G(t, s) f(s) \to d_1 G(t_0, s) f(s)$ (v. 3.5) e ancora per 4.1.1 la convergenza è dominata. Dunque du/dt è continua su $[0, T]$.

Da 3.6 segue che $\forall t \in [0, T]$ esiste $\int_0^T AG(t, s) f(s)\, ds$ e che

$$t \to \int_0^T AG(t, s) f(s)\, ds$$

è continua su $[0, T]$: poichè A è chiuso ciò prova che, $\forall t \in [0, T]$, $u(t) \in D$ e $t \to Au(t)$ è continua su $[0, T]$.

Ora, per $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$, $t \neq s$, poniamo $L(t, s) = d_1 G(t, s) + AG(t, s)$, e facciamo vedere che sono soddisfatte le ipotesi del lemma 2.4.

La condizione 2.4.1 segue subito da 3.5 e da 3.6. Dalla proprietà 3.5 segue anche la condizione 2.4.2 con $L^+(t, t) = d_1^+ G(t, t) + AG(t, t)$, $L^-(t, t) = d_1^- G(t, t) + AG(t, t)$. La condizione 2.4.3 è diretta conseguenza della proprietà 3.10. Le proprietà 3.10 e 3.8 assicurano il verificarsi di 2.4.4 e di 2.4.6. Infine, tenuto conto della 3.10, la proprietà 3.9 assicura la condizione 2.4.5. Perciò valgono le conclusioni del lemma 2.4. In particolare, $\forall t \in]0, T[$, è integrabile su $[0, T]$ la funzione $s \to (\partial/\partial t)(d_1 G(t, s) + AG(t, s)) f(s)$, che, per $s \neq t$, coincide con

$$s \to B(d_1 G(t, s) + AG(t, s)) f(s)$$

(v. 3.10). Da qui e dal fatto che B è chiuso segue che per $0 < t < T$ $(du/dt)(t) + Au(t) \in D$ e applicando 3.10 e il lemma 2.4 si ha:

$$B\left(\frac{du}{dt}(t) + Au(t)\right) = \int_0^T B(d_1 G(t, s) + AG(t, s)) f(s)\, ds =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}(t) + Au(t)\right) - (L^+(t, t) - L^-(t, t)) f(t)\,.$$

Ma in questo caso per 3.4, $L^+(t, t) - L^-(t, t) = d_1^+ G(t, t) - d_1^- G(t, t) = I$.

4.2 Teorema. *Valgano le ipotesi* 1.1, 1.4 *e* 1.5 *e sia* $T > (1/\delta) \log M_0$. *Sia* $H = I - \exp(-TA) \exp(-TB)$ *e siano* $u_0 \in X$, $u_T \in H(D)$. *Allora la funzione*

$$t \to u(t) = [\exp(-tA) - \exp(-(T - t)B) \exp(-TA)] H^{-1} u_0 +$$
$$+ [\exp(-(T - t)B) - \exp(-tA) \exp(-TB)] H^{-1} u_T\,,$$

definita su $[0, T]$, *è soluzione su* $[0, T]$ *del problema* 1.7, *con* $f = 0$.

Dimostrazione. La continuità su $[0, T]$, le uguaglianze $u(0) = u_0$ e $u(T) = u_T$, la derivabilità su $]0, T[$ e il fatto per che $t \in]0, T[$ $u(t)$ appartenga a D seguono immediatamente da 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3.

Poichè $H^{-1}u_T \in D$, per 1.1.4 e per il lemma 2.1, se $0 < t < T$, si ha:

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = \exp(-(T-t)B)(A+B)\exp(-TA)H^{-1}u_0 + \\ + \exp(-(T-t)B)(A+B)H^{-1}u_T\,.$$

Dopo di che, da 1.1.2 segue l'esistenza del prolungamento continuo a $[0, T]$, e un'applicazione della proprietà 1.1.4 conclude la dimostrazione.

4.3 Corollario. *Valgano le ipotesi* 1.1, 1.4, 1.5 *e siano* C, α, T *numeri reali positivi tali che* $\alpha \leqslant 1$ *e* $T > (1/\delta)\log M_0$. *Sia* $f\colon [0, T] \to X$ *tale che* $\forall (t, s) \in [0, T] \times [0, T]$ *si abbia* $\|f(t) - f(s)\| \leqslant C|t-s|^{\alpha}$.

Sia infine $H = I - \exp(-TA)\exp(-TB)$. *Se* $u_0 \in X$ *e* $u_T \in H(D)$, *allora il problema* 1.7 *ha soluzione.*

Dimostrazione. Segue subito dai teoremi 3.11, 4.1, 4.2 tenendo conto del fatto che per la funzione di Green esibita col teorema 3.11 era $\beta = 1$.

5. Unicità.

5.1 Teorema. *Valgano le ipotesi* 1.1, 1.5 *e sia* $u\colon [0, T] \to X$ (*dove* $T \in \mathbb{R}^+$) *una soluzione del problema* 1.7 *con* $u_0 = u_T = 0$, $f = 0$. *Allora* $u = 0$.

Dimostrazione. Per 1.10 esiste $v\colon [0, T] \to X$, continua e tale che $\forall t \in]0, T[$ $v(t) = (du/dt)(t) + Au(t)$. Poichè $u(0) = 0$, deve essere, in base a 1.1.8, $u(t) = \int_0^t \exp(-(t-s)A)\,v(s)\,ds$ $\forall t \in [0, T]$. D'altra parte, per $0 < t < T$ si ha $(dv/dt)(t) = Bv(t)$ e la continuità di v su $[0, T]$, unitamente a 1.1.8, assicura che $v(s) = \exp(-(T-s)B)\,v(T)$. Pertanto $u(t) = \int_0^t \exp(-(t-s)A)\exp(-(T-s)B)\,v(T)\,ds$ e in particolare

$$0 = u(T) = \int_0^T \exp\big(-(T-s)A\big)\exp\big(-(T-s)B\big)v(T)\,ds =$$
$$= \int_0^T \exp(-sA)\exp(-sB)v(T)\,ds\,.$$

Ma allora (lemma 2.2) $v(T) = 0$ e ciò prova il teorema.

5.2 TEOREMA. *Valgano le ipotesi* 1.1, 1.5 *e sia* $T \in \mathbb{R}^+$. *Siano* $G_1\colon [0, T]\times[0, T] \to \mathcal{L}(X, X)$, $G_2\colon [0, T]\times[0, T] \to \mathcal{L}(X, X)$ *funzioni di Green per il problema* 1.7. *Allora* $G_1 = G_2$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = G_1 - G_2$. A causa della proprietà 3.2 basterà provare che per $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < s < T$ è $G(t, s) = 0$. Fissiamo $x \in X$ e $s \in]0, T[$.

Sia $u\colon [0, T] \to X$, $u(t) = G(t, s)x$. Proverò che u è soluzione del problema 1.7 con $u_0 = u_T = 0$, $f = 0$; questo, per il teorema 5.1, proverà il presente teorema. La continuità di u segue da 3.2 e $u(0) = u(T) = 0$ a causa di 3.1. $\forall t \in [0, T]$ $u(t) \in D$ e $t \to Au(t)$ è continua su $[0, T]$ (3.6). Per $t \neq s$ u è derivabile e du/dt è continua su $[0, s[\, \cup\,]s, T]$ (3.3 e 3.5). Inoltre nel punto s la funzione u ammette derivata da destra e da sinistra (3.4) e queste coincidono con i limiti di $(du/dt)(t)$ rispettivamente per $t \to s^+$ e per $t \to s^-$ (3.5). Ma si ha anche che

$$\frac{d^+}{dt}u(s) = \big(d_1^+ G_1(s, s) - d_1^+ G_2(s, s)\big)x = \big(d_1^- G_1(s, s) + I -$$
$$- d_1^- G_2(s, s) - I\big)x = \frac{d^-}{dt}u(s)\,.$$

Perciò du/dt esiste ed è continua su tutto $[0, T]$.

Sia $h\colon [0, T] \to X$, $h(t) = (du/dt)(t) + Au(t)$; allora (3.7 e 3.10) per $t \neq s$ $h(t) \in D$ e $(dh/dt)(t) = Bh(t)$. A causa di 1.1.8, per $s < t \leqslant T$, $h(t) = \exp\big(-(T-t)B\big)h(T)$ e la continuità di h fa sì che $h(s) = \exp\big(-(T-s)B\big)h(T)$. Dunque $h(s) \in D$ (1.1.3) e $(d^+/dt)h(s) = Bh(s)$. Analogamente, per $0 \leqslant t \leqslant s$ è $h(t) = \exp\big(-(s-t)B\big)h(s)$, e poichè $h(s) \in D$, da 1.1.7 segue che $(d^-/dt)h(s) = Bh(s)$. Ciò prova il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Tome I: *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris (1969).
[2] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1969).
[3] E. Hille - R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Providence (1957).
[4] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence (1972).
[5] M. Z. Solomjak, *Applicazione della teoria dei semigruppi allo studio delle equazioni differenziali negli spazi di Banach* (in russo), Dokl. Akad. Nauk SSSR, **122** (1958), pp. 766-769.
[6] K. Yosida, *On the differentiability of semigroups of linear operators*, Proc. Japan Acad., **34** (1958), pp. 337-340.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 marzo 1975.