RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO OBRECHT

Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche astratte di ordine *n*

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 231-256

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__231_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche astratte di ordine n.

ENRICO OBRECHT (*)

SUMMARY - In this paper, we study the Cauchy problem for n-th order linear homogeneous abstract parabolic equations. An existence and uniqueness theorem is proven and an application to boundary value problems for parabolic (in the sense of Petrovskii) partial differential equations is given.

1. Introduzione e notazioni.

Il problema di Cauchy per l'equazione differenziale lineare astratta

$$u' = A(t)\,u + f(t) \tag{1}$$

è stato ampiamente studiato (cfr., per es., [8]). Non altrettanto si può dire per le equazioni di ordine superiore, anche nel caso in cui gli operatori siano indipendenti dal tempo. Recentemente, Dubinskii [3] ha dato una classificazione per equazioni del tipo

$$u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k u^{(k)} = f \tag{2}$$

e ha studiato, con metodi analoghi a quelli di Grisvard [5], diversi problemi relativi a questa equazione.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Piazza di Porta S. Donato, 5 - Bologna.

In questo lavoro, studiamo il problema di Cauchy per l'equazione omogenea

$$u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k u^{(k)} = 0 , \tag{3}$$

nel caso che essa sia parabolica. Le ipotesi che faremo sono state suggerite dalla possibilità di applicare i risultati ottenuti allo studio di problemi al contorno in un cilindro per operatori parabolici secondo Petrovskii di ordine superiore nel tempo, a coefficienti indipendenti dal tempo. Questi problemi sono stati studiati con metodi astratti da Da Prato [2], Grisvard [5], Jakubov [6], Lagnese [9]. Tutti questi autori, ad eccezione di Jakubov che, però, opera in uno spazio di Hilbert, trasformano preliminarmente l'equazione « concreta » in un sistema di equazioni del primo ordine. I nostri metodi, invece, sono essenzialmente « di ordine n » e sono simili a quelli utilizzati nello studio dei semigruppi analitici. Nel caso $n = 1$, si riottengono i risultati noti per le equazioni paraboliche del primo ordine (cfr., per es., [7]).

Fissiamo, ora, alcune notazioni che useremo sempre in seguito.

Indicheremo con $A_0, \ldots, A_{n-1}$ degli operatori lineari con domini contenuti nello spazio di Banach complesso X e a valori in X e, per comodità di scrittura, porremo $A_n = I$, l'operatore identità in X. Con $\mathcal{D}(A_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ indicheremo il dominio dell'operatore A_j. Posto

$$\mathcal{D}(P) = \bigcap_{k=0}^{n} \mathcal{D}(A_k) , \qquad P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k , \qquad \lambda \in \mathbf{C} ,$$

indicheremo con $P^{-1}(\lambda)$ l'inverso di $P(\lambda)$, quando esiste.

Se X e Y sono spazi di Banach, indicheremo con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari limitate da X a Y; se $X = Y$, porremo $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X)$. Se non vi sarà possibilità di equivoco, indicheremo con $\|\cdot\|$ tanto la norma in X, quanto quella in $\mathcal{L}(X)$ (munito della topologia della convergenza uniforme).

Diamo, ora, un breve riassunto del lavoro.

Nel n. 2 studiamo alcune semplici proprietà spettrali degli operatori $P(\lambda)$ che saranno utili nel seguito e delle quali non abbiamo trovato menzione nella letteratura (cfr., nel caso $n = 2$, [10]). Per una ampia bibliografia su questioni analoghe, si veda [4].

Nel n. 3 studiamo diverse proprietà di una famiglia di operatori che serviranno per costruire la soluzione del problema di Cauchy.

Nel caso $n=1$, si riottengono note proprietà dei semigruppi analitici.

Nel n. 4 costruiamo una soluzione « indebolita » (nel senso di [8]) del problema di Cauchy per la (3), definiremo degli spazi, connessi coi domini degli operatori A_j, adatti a studiare la regolarità della soluzione ottenuta e, per mezzo di questa, dimostreremo l'unicità della soluzione.

Infine, nel n. 5, applichiamo i risultati ottenuti allo studio dei problemi al contorno per operatori parabolici secondo Petrovskii, riottenendo i risultati di Lagnese [9] nel caso dell'equazione omogenea.

2. Un risultato di analisi spettrale.

DEFINIZIONE 1. Chiamiamo insieme risolvente della n-pla di operatori $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ l'insieme

$$\varrho(A_0, \ldots, A_{n-1}) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \exists P^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)\}\ .$$

OSSERVAZIONE. Se $\lambda \in \varrho(A_0, \ldots, A_{n-1})$, allora $P(\lambda)$ è un operatore chiuso.

DEFINIZIONE 2. Chiamiamo funzione risolvente della n-pla di operatori $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ la funzione, definita in $\varrho(A_0, \ldots, A_{n-1})$, $\lambda \to P^{-1}(\lambda)$.

PROPOSIZIONE 1. *$\forall \lambda,\ \mu \in \varrho(A_0, \ldots, A_{n-1})$, vale l'« equazione risolvente »*

$$(4)\qquad P^{-1}(\mu) - P^{-1}(\lambda) = (\lambda - \mu) P^{-1}(\mu) \Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{h=0}^{k-1} \lambda^{k-h-1} \mu^h\Big) A_k\Big] P^{-1}(\lambda)\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in X$. Allora,

$$\begin{aligned} P^{-1}(\mu)\, x = P^{-1}(\mu) &\Big[\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k\Big] P^{-1}(\lambda)\, x = \\ &= P^{-1}(\mu) \Big[\sum_{k=0}^{n} (\lambda^k - \mu^k) A_k + \sum_{k=0}^{n} \mu^k A_k\Big] P^{-1}(\lambda)\, x = \\ &= P^{-1}(\mu) \Big[(\lambda - \mu) \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{h=0}^{k-1} \lambda^{k-h-1} \mu^h\Big) A_k + \sum_{k=0}^{n} \mu^k A_k\Big] P^{-1}(\lambda)\, x = \\ &= (\lambda - \mu) P^{-1}(\mu) \Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{h=0}^{k-1} \lambda^{k-h-1} \mu^h\Big) A_k\Big] P^{-1}(\lambda)\, x + P^{-1}(\lambda)\, x\ ; \end{aligned}$$

di qui segue la (4).

Facciamo ora un'ipotesi che supporremo sempre verificata nel seguito.

IPOTESI 1. *Gli operatori* A_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ *sono chiusi.*

PROPOSIZIONE 2. *L'insieme* $\varrho(A_0, \ldots, A_{n-1})$ *è aperto e la funzione* $\lambda \to P^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \varrho(A_0, \ldots, A_{n-1})$ *è analitica.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\varrho(A_0, \ldots, A_{n-1}) = \emptyset$ non vi è nulla da dimostrare. Sia, perciò, $\lambda \in \varrho(A_0, \ldots, A_{n-1})$. Osserviamo che, in tal caso, gli operatori $A_k P^{-1}(\lambda)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sono limitati, perchè gli A_k sono chiusi, $P^{-1}(\lambda)$ è limitato e il suo codominio è $\mathfrak{D}(P) \subseteq \mathfrak{D}(A_k)$. Poniamo

$$S(\mu) = P^{-1}(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^m \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=0}^{k-1} \lambda^{k-h-1} \mu^h \right) A_k P^{-1}(\lambda) \right]^m . \tag{5}$$

Cominciamo col provare che questa serie è totalmente convergente in un intorno di λ. Posto $\mu = \lambda + \varepsilon \exp(i\theta)(\varepsilon \in \mathbb{R}^+)$, risulta:

$$\begin{aligned} &\left\| (\lambda - \mu) \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=0}^{k-1} \lambda^{k-h-1} \mu^h \right) A_k P^{-1}(\lambda) \right\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=0}^{k-1} |\lambda|^{k-h-1} |\lambda + \varepsilon \exp(i\theta)|^h \, \|A_k P^{-1}(\lambda)\| . \end{aligned} \tag{6}$$

Ponendo $\Lambda_\lambda = \max\{1, |\lambda|^{n-1}\}$, $B_\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|A_k P^{-1}(\lambda)\|$ e tenendo presente che esiste $C \in \mathbb{R}^+$, tale che $|\lambda + \varepsilon \exp(i\theta)|^h \leqslant C(|\lambda|^h + \varepsilon^h)$, $(h = 0, 1, \ldots, n-1)$, il secondo membro della (6) si maggiora con

$$\varepsilon n \Lambda_\lambda B_\lambda C \sum_{h=0}^{n-1} (|\lambda|^h + \varepsilon^h) \leqslant \varepsilon n \Lambda_\lambda B_\lambda C \left(\sum_{h=1}^{n-1} \varepsilon^h + n\Lambda_\lambda + 1 \right) .$$

Scegliendo $\varepsilon \leqslant 1$, risulta $\varepsilon^h \leqslant 1$ $(h = 1, \ldots, n-1)$ e quindi

$$\left\| (\lambda - \mu) \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=0}^{k-1} \lambda^{k-h-1} \mu^h \right) A_k P^{-1}(\lambda) \right\| \leqslant \varepsilon n^2 \Lambda_\lambda B_\lambda C (\Lambda_\lambda + 1) .$$

Perciò, la serie (5) converge totalmente nel disco $\{\mu \in \mathbb{C};\ |\lambda - \mu| \leqslant \leqslant \min\{1, (2n^2 \Lambda_\lambda B_\lambda C(\Lambda_\lambda + 1))^{-1}\}\}$, come volevasi.

Poichè i termini della serie sono operatori limitati in X e analitici in μ, anche $S(\mu) \in \mathfrak{L}(X)$ e la funzione $\mu \to S(\mu)$ è analitica. Resta da provare che $S(\mu) = P^{-1}(\mu)$. Sia $x \in X$. Allora, tenendo presente quanto provato nel corso della dimostrazione della Proposizione 1, si ha:

$$P(\mu)\,S(\mu)\,x=\Big[P(\lambda)-(\lambda-\mu)\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_k\Big]\cdot$$

$$\cdot P^{-1}(\lambda)\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^m\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kP^{-1}(\lambda)\Big]^m x=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^m\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kP^{-1}(\lambda)\Big]^m x-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^{m+1}\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kP^{-1}(\lambda)\Big]^{m+1}x=x\,.$$

Analogamente, sia $x\in\mathfrak{D}(P)$. Allora,

$$S(\mu)\,P(\mu)\,x=P^{-1}(\lambda)\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^m\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kP^{-1}(\lambda)\Big]^m\cdot$$

$$\cdot\Big[P(\lambda)-(\lambda-\mu)\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_k\Big]x=$$

$$=x+P^{-1}(\lambda)\Big[\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda-\mu)^m\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kP^{-1}(\lambda)\Big]^{m-1}\Big]\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kx-$$

$$-P^{-1}(\lambda)\Big[\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^{m+1}\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kP^{-1}(\lambda)\Big]^{m}\Big]\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{k-1}\lambda^{k-h-1}\mu^{h}\Big)A_kx=x\,.$$

Perciò, $S(\mu)=P^{-1}(\mu)$.

COROLLARIO 1. Le funzioni $\lambda\to A_kP^{-1}(\lambda)$, $\lambda\in\varrho(A_0,\dots,A_{n-1})$, sono analitiche $(k=0,\dots,n-1)$.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Proposizione 2.

3. Preliminari al problema di Cauchy.

Se $\omega \in]0, \pi[$, poniamo

$$S_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{0\};\ |\arg \lambda| < \omega\}.$$

Facciamo, ora, un'ulteriore ipotesi sugli operatori $A_0, \dots, A_{n-1}$.

IPOTESI 2. *Esistono* $\theta \in]0, \pi/2[$ *e* $M \in \mathbb{R}^+$, *tali che*:

a) $S_{\theta+\pi/2} \subseteq \varrho(A_0, \dots, A_{n-1})$;

b) $\|A_j P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M|\lambda|^{-j}$, $\forall \lambda \in S_{\theta+\pi/2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Fissiamo $\theta' \in]0, \theta[$. Nel seguito, indicheremo sempre con Γ la curva orientata in $\mathbb{C}$ che ammette come parametrizzazione la funzione $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tale che

$$\varphi(t) = -t \exp\left[-i\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad \text{se } t \in]-\infty, -1[,$$

$$\varphi(t) = \exp\left[i\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)t\right], \qquad \text{se } t \in [-1, 1],$$

$$\varphi(t) = t \exp\left[i\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad \text{se } t \in]1, +\infty[.$$

OSSERVAZIONE. Per l'Ipotesi 2, la curva Γ è contenuta in $\varrho(A_0, \dots, A_{n-1})$.

LEMMA 1. Gli operatori

$$U_k(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^k \exp(\lambda t) P^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

appartengono a $\mathcal{L}(X)$, $\forall k \in I$ *e* $\forall t \in S_{\theta'}$.

Inoltre, le funzioni $t \to U_k(t)$, $t \in S_{\theta'}$, *sono analitiche*, $\forall k \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 2, le funzioni $\lambda \to \lambda^k \exp(\lambda t) \cdot P^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \varrho(A_0, \dots, A_{n-1}) - \{0\}$ sono analitiche e, quindi, continue nella topologia di $\mathcal{L}(X)$, $\forall k \in I$ e $\forall t \in \mathbb{C}$. Perciò, detta Γ_r la parte di Γ contenuta nel disco chiuso di centro l'origine e raggio r, orientata con l'orientamento indotto da Γ, esistono gli integrali

$$(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_r}\lambda^k \exp(\lambda t)\, P^{-1}(\lambda)\, d\lambda\,,$$

$\forall r\in[1, +\infty[$, $\forall t\in S_{\theta'}$ e $\forall k\in I$ e questi risultano essere operatori limitati in X. Inoltre, le funzioni

$$t\to(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_r}\lambda^k \exp(\lambda t)\, P^{-1}(\lambda)\, d\lambda\,,\qquad t\in S_{\theta'},$$

sono analitiche, $\forall r\in[1, +\infty[$ e $\forall k\in I$.

Sia K un compatto contenuto in $S_{\theta'}$. Allora, esiste $\varepsilon_K\in\mathbb{R}^+$, tale che, per ogni $t=\sigma\exp(i\tau)\in K$, risulta $-\theta'+\varepsilon_K\leqslant\tau\leqslant\theta'-\varepsilon_K$, cioè $\varepsilon_K\leqslant\tau+ +\theta'\leqslant 2\theta'-\varepsilon_K$. Detto $\Gamma_{r_1r_2}$ $(1<r_1<r_2)$ l'arco di Γ contenuto nella corona circolare $\{\lambda\in\mathbb{C};\, r_1\leqslant|\lambda|\leqslant r_2\}$, si ha:

$$\left\|(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_{r_1r_2}}\lambda^k \exp(\lambda t)P^{-1}(\lambda)\, d\lambda\right\|\leqslant(2\pi)^{-1}\int_{\Gamma_{r_1r_2}}|\lambda|^k \exp[\mathrm{Re}\,(\lambda t)]\,\|P^{-1}(\lambda)\|\, d|\lambda|\leqslant$$

$$\leqslant M\pi^{-1}\int_{r_1}^{r_2}\varrho^{k-n}\exp\left[\varrho\sigma\cos\left(\theta'+\tau+\frac{\pi}{2}\right)\right]d\varrho=$$

$$=M\pi^{-1}\int_{r_1}^{r_2}\varrho^{k-n}\exp[-\varrho\sigma\,\mathrm{sen}\,(\theta'+\tau)]\, d\varrho\,.$$

D'altra parte, posto $H=\min_{t\in K}|t|$, risulta

$$\sigma\,\mathrm{sen}\,(\theta'+\tau)\geqslant H\min\{\mathrm{sen}\,\varepsilon_K,\ \mathrm{sen}\,(2\theta'-\varepsilon_K)\}=L>0\,,\qquad \forall t=\sigma\exp(i\tau)\in K.$$

Allora,

$$\left\|(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_{r_1r_2}}\lambda^k \exp(\lambda t)P^{-1}(\lambda)\, d\lambda\right\|\leqslant M\pi^{-1}\int_{r_1}^{r_2}\varrho^{k-n}\exp(-\varrho L)\, d\varrho\xrightarrow[r\ r_2\to+\infty]{}0\,,$$

uniformemente su K, $\forall k\in I$. Di qui segue che le funzioni

$$r\to(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma}\lambda^k \exp(\lambda t)\, P^{-1}(\lambda)\, d\lambda\,,\qquad r\in[1, +\infty[\,,$$

convergono nella topologia di $\mathcal{L}(X)$, uniformemente sui compatti di $S_{\theta'}$, quando $r \to +\infty$, $\forall k \in I$. Il lemma è dimostrato.

Lemma 2. *Risulta*

$$U_p^{(k)}(t) = U_{p+k}(t)\,, \qquad \forall p \in I,\ \forall k \in N,\ \forall t \in S_{\theta'}\,. \tag{7}$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione rispetto a k. Siano $t \in S_{\theta'}$ e $h \in \mathbf{C} - \{0\}$, tali che $t + h \in S_{\theta'}$. Allora,

$$h^{-1}[U_p(t+h) - U_p(t)] - U_{p+1}(t) = \\ = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \lambda^p \exp(\lambda t)\left[h^{-1}(\exp(\lambda h) - 1) - \lambda\right]P^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,.$$

Poichè

$$|h^{-1}[\exp(\lambda h) - 1] - \lambda| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k h^{k-1}(k!)^{-1}\right| \leqslant |\lambda|^2 |h| \exp(|\lambda h|)\,,$$

risulta

$$\|\lambda^p \exp(\lambda t)\left[h^{-1}(\exp(\lambda h) - 1) - \lambda\right]P^{-1}(\lambda)\| \leqslant \\ \leqslant M|\lambda|^{p-n+2}|h| \exp(|\lambda h|)|\exp(\lambda t)|\,.$$

Ora, se $\lambda \in \Gamma$ e $t = \sigma \exp(i\tau) \in S_{\theta'}$, il secondo membro dell'ultima disuguaglianza si maggiora con $M|h|\exp(|h| + \sigma)$, quando $|\lambda| = 1$, con

$$M\varrho^{p-n+2}|h| \exp\left[\varrho(|h| - \sigma \operatorname{sen}(\theta' + \tau))\right] \leqslant C \exp[-\tfrac{1}{4}\sigma\varrho \operatorname{sen}(\theta' + \tau)]\,,$$

se $|h| < \frac{1}{2}\sigma \operatorname{sen}(\theta' + \tau)$, dove C è una opportuna costante positiva, quando $\lambda = \varrho \exp[i(\theta' + \pi/2)]$. Analoga maggiorazione si ottiene quando $\lambda = \varrho \exp[-i(\theta' + \pi/2)]$. Poichè $|\tau| < \theta' < \pi/2$, risulta $\operatorname{sen}(\theta' + \tau) > 0$. È lecito, perciò, passare al limite sotto al segno di integrale e abbiamo

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}[U_p(t+h) - U_p(t)] = U_{p+1}(t)\,, \qquad \forall t \in S_{\theta'} \text{ e } \forall p \in I\,.$$

Quindi, la (7) è vera per $k = 1$, $\forall p \in I$ e $\forall t \in S_{\theta'}$. Supponiamo ora vera la (7) per $k = l$, $\forall p \in I$ e $\forall t \in S_{\theta'}$. Allora, per l'ipotesi induttiva e per quanto già dimostrato,

$$U_p^{(l+1)}(t) = \frac{d}{dt} U_p^{(l)}(t) = \frac{d}{dt} U_{p+l}(t) = U_{p+l+1}(t)$$

e, quindi, la (7) è vera anche per $k = l+1$, $\forall p \in I$ e $\forall t \in S_{\theta'}$.
Allora, la (7) è vera $\forall k \in N$, $\forall p \in I$ e $\forall t \in S_{\theta'}$.

LEMMA 3. *Sia* $x \in X$. *Allora,*

$$U_k(t)\, x \in \mathfrak{D}(P)\,, \qquad \forall k \in I,\ \forall t \in S_{\theta'}$$

e inoltre

$$A_j U_k(t)\, x = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)\, x\, d\lambda\,,$$

$\forall k \in I$, $\forall t \in S_{\theta'}$ *e* $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè abbiamo già provato (Lemma 1) che gli integrali $U_k(t)\, x$ ($k \in I$, $t \in S_{\theta'}$) sono convergenti e poichè (Ipotesi 1) gli operatori A_j sono chiusi, è sufficiente provare che sono convergenti gli integrali

$$(8) \qquad (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)\, x\, d\lambda\,,$$

$\forall k \in I$, $\forall t \in S_{\theta'}$ e $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Utilizziamo le notazioni del Lemma 1. Innanzitutto, esistono gli integrali

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_r} \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)\, d\lambda\,,$$

$\forall k \in I$, $\forall t \in S_{\theta'}$, $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $\forall r \in [1, +\infty[$, perchè, per il Corollario 1, le funzioni $\lambda \to \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \varrho(A_0, \ldots, A_{n-1}) - \{0\}$ sono analitiche e, quindi, continue nella topologia di $\mathfrak{L}(X)$.

Per provare il lemma, basterà, allora, far vedere che

$$\left\| (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{r_1 r_2}} \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)\, d\lambda \right\| \xrightarrow[r_1, r_2 \to +\infty]{} 0\,,$$

$\forall k \in I$, $\forall t \in S_{\theta'}$ e $\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Se $t = \sigma \exp(i\tau) \in S_{\theta'}$, si ha, per l'Ipotesi 2,

$$\left\| (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{r_1 r_2}} \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant \left(\frac{M}{\pi}\right) \int_{r_1}^{r_2} \varrho^{k-j} \exp[-\varrho\sigma \operatorname{sen}(\theta' + \tau)]\, d\varrho .$$

Poichè $\operatorname{sen}(\theta' + \tau) > 0$, l'ultimo integrale scritto tende a zero e, perciò, il lemma è dimostrato.

LEMMA 4. *Sussiste la relazione*

$$\sum_{h=0}^{n} A_h U_k^{(h)}(t)\, x = 0 ,$$

$\forall x \in X$, $\forall k \in I^+ \cup \{0\}$ *e* $\forall t \in S_{\theta'}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per i Lemmi 2 e 3,

$$\sum_{h=0}^{n} A_h U_k^{(h)}(t) x = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \lambda^k \exp(\lambda t) \left(\sum_{h=0}^{n} \lambda^h A_h \right) P^{-1}(\lambda) x\, d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \lambda^k \exp(\lambda t) x\, d\lambda = 0 ,$$

$\forall x \in X$, $\forall k \in I^+ \cup \{0\}$ e $\forall t \in S_{\theta'}$.

LEMMA 5. *Gli operatori* $A_j U_k(t)$ *appartengono a* $\mathfrak{L}(X)$, $\forall t \in S_{\theta'}$, $\forall k \in I$ *e* $\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Inoltre, le funzioni

$$t \to A_j U_k(t) , \qquad t \in S_{\theta'} , \tag{9}$$

sono analitiche e risulta

$$\frac{d^h}{dt^h} A_j U_k(t) = A_j U_{k+h}(t) , \tag{10}$$

$\forall t \in S_{\theta'}$, $\forall k \in I$, $\forall h \in N$ *e* $\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue subito dai Lemmi 1 e 3, tenendo presente che gli A_j sono chiusi.

La dimostrazione dell'analiticità si effettua ripetendo quella del Lemma 1, ma utilizzando il Corollario 1, anzichè la Proposizione 2. Dall'analiticità segue la derivabilità delle funzioni (9) e la (10) segue allora dal Lemma 2 e dal fatto che gli A_j sono chiusi.

LEMMA 6. *$\forall \varepsilon \in]0, \theta'[$, $\forall k \in I$ e $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\exists C(\varepsilon, k, j) \in \mathbb{R}^+$, tale che*

$$\|A_j U_k(t)\| \leqslant C(\varepsilon, k, j)|t|^{j-k-1}, \qquad \forall t \in \overline{S_{\theta'-\varepsilon}} - \{0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Chiamiamo $\Gamma'(t)$ la curva ottenuta da Γ mediante la trasformazione $t \to |t|\lambda$. È evidente che $\Gamma'(t)$ è contenuta in $\varrho(A_0, \ldots, A_{n-1}) - \{0\}$, $\forall t \in \overline{S_{\theta'}} - \{0\}$. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia ora $t \in \overline{S_{\theta'-\varepsilon}} - \{0\}$. Allora,

$$A_j U_k(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^k \exp(\lambda t) A_j P^{-1}(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma'(t)} \left(\lambda'^k/|t|^{k+1}\right) \exp[(\lambda' t)/|t|] A_j P^{-1}\left(\lambda'/|t|\right) d\lambda' .$$

Le parti di Γ e $\Gamma'(t)$ che sono contenute nel disco chiuso di centro l'origine e raggio $\max\{1, |t|\}$ formano una curva regolare a tratti, semplice e chiusa $\Gamma''(t)$; se la orientiamo con gli orientamenti indotti da Γ e da $-\Gamma'(t)$, per il Teorema di Cauchy risulta

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma''(t)} \left(\lambda'^k/|t|^{k+1}\right) \exp[(\lambda' t)/|t|] A_j P^{-1}\left(\lambda'/|t|\right) d\lambda' = 0 .$$

D'altra parte, poichè, fuori del disco suddetto, Γ e $\Gamma'(t)$ coincidono, si ha

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma'(t)} \left(\lambda'^k/|t|^{k+1}\right) \exp\left[(\lambda' t)/|t|\right] A_j P^{-1}\left(\lambda'/|t|\right) d\lambda' =$$
$$= (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \left(\lambda^k/|t|^{k+1}\right) \exp\left[(\lambda t)/|t|\right] A_j P^{-1}\left(\lambda/|t|\right) d\lambda .$$

Ne viene che

$$\|A_j U_k(t)\| \leqslant (M/2\pi)|t|^{j-k-1} \int_\Gamma |\lambda|^{k-j} \left|\exp\left[(\lambda t)/|t|\right]\right| |d|\lambda| .$$

Poichè la funzione

$$z \to (M/2\pi)\int_{\Gamma} |\lambda|^{k-j} |\exp(\lambda z)| d|\lambda|$$

è continua sul compatto $\{z \in \overline{S_{\theta'-\varepsilon}};\ |z| = 1\}$, sarà limitata; esisterà, quindi, $C(\varepsilon, k, j) \in \mathbb{R}^+$, tale che

$$\|A_j U_k(t)\| \leqslant C(\varepsilon, k, j)|t|^{j-k-1},$$

$\forall t \in \overline{S_{\theta'-\varepsilon}} - \{0\}$, $\forall k \in I$ e $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

4. Il problema di Cauchy.

DEFINIZIONE 3. Siano $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \in X$. Allora, una funzione $u\colon [0, +\infty[\to X$ si dirà una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)} = 0, \\ u^{(h)}(0) = u_h, \qquad h = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

se verifica le condizioni seguenti:

a) u è derivabile fortemente n volte in $\mathbb{R}^+$;

b) $u^{(j)}(t) \in \mathfrak{D}(A_j)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ e $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)}(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$;

d) $\lim_{t \to 0+} \|u^{(h)}(t) - u_h\| = 0$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$.

TEOREMA 1. *Sia $u_h \in \mathfrak{D}(P)$ per $h = 0, 1, \ldots, n-1$. Allora, la funzione*

$$\delta_h(t) = \sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t) A_k u_h, \qquad \text{per } t > 0, \tag{11}$$

$$\delta_h(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq 0, \\ u_0, & \text{se } h = 0, \end{cases}$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$(12)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k u^{(k)} = 0\,, \\ u^{(j)}(0) = 0\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1\,;\; j \neq h\,, \\ u^{(h)}(0) = u_h\,. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per la linearità del problema, è sufficiente provare che le condizioni a), b), c) della Definizione 3 sono verificate dalle funzioni $t \to U_p(t) A_k u_h$, $t \in \mathbb{R}^+$, con $h \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $k \in \{h+1, \ldots, n\}$ e $p \in \{0, 1, \ldots, n-h-1\}$. Per il Lemma 1, esse sono analitiche in un settore contenente il semiasse reale positivo e, quindi, la condizione a) è soddisfatta. Le loro derivate sono, per il Lemma 2, funzioni dello stesso tipo e, quindi, per il Lemma 3, i loro valori appartengono a $\mathfrak{D}(P)$: questo assicura che la condizione b) è verificata. Infine, il Lemma 4 garantisce che tali funzioni soddisfano la condizione c).

Rimane da provare che la funzione δ_h soddisfa la condizione d). Sia $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Allora, per il Lemma 2, si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\delta_h^{(m)}(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^{m-h-1} \exp(\lambda t) P^{-1}(\lambda) \left(\sum_{k=h+1}^{n} \lambda^k A_k \right) u_h \, d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^{m-h-1} \exp(\lambda t) u_h \, d\lambda -$$

$$- (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^{m-h-1} \exp(\lambda t) P^{-1}(\lambda) \left(\sum_{k=0}^{h} \lambda^k A_k \right) u_h \, d\lambda = I_1^{m,h}(t) - I_2^{m,h}(t)\,.$$

Poichè

$$(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^{m-h-1} \exp(\lambda t) \, d\lambda = \begin{cases} 0\,, & \text{se } m > h\,, \\ (t^{h-m}/[(h-m)!])\,, & \text{se } m \leqslant h\,, \end{cases}$$

risulta

$$\lim_{t \to 0+} I_1^{m,h}(t) = \begin{cases} u_h\,, & \text{se } m = h\,, \\ 0\,, & \text{se } m \neq h\,. \end{cases}$$

Per il Lemma 6, si ha poi:

$$\|I_2^{m,h}(t)\| = \left\| \sum_{k=0}^{h} U_{m+k-h-1}(t) A_k u_h \right\| \leqslant C \sum_{k=0}^{h} t^{n-m-k+h} \|A_k u_h\| \xrightarrow[t \to 0+]{} 0\,,$$

perchè, per i valori di m, h, k considerati, l'esponente di t è sempre positivo. Quindi, δ_h soddisfa anche la condizione d) della Definizione 3.

COROLLARIO 2. *Siano* $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathfrak{D}(P)$. *Allora, il problema di Cauchy*

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)} = 0 \,, \\ u^{(h)}(0) = u_h \,, \qquad h = 0, 1, \ldots, n-1 \,, \end{cases}$$

ha soluzione.

DIMOSTRAZIONE. Il risultato è un'immediata conseguenza del Teorema 1, tenuto conto della linearità del problema (13).

COROLLARIO 3. *Se* $\mathfrak{D}(P)$ *è denso in* X, $u_h \in \mathfrak{D}(P)$ *per* $h = 0, 1, \ldots, n-2$ *e* $u_{n-1} \in X$, *allora il problema* (13) *ha soluzione.*

DIMOSTRAZIONE. Per la linearità del problema (13), è sufficiente provare che, se $\mathfrak{D}(P)$ è denso in X e $u_{n-1} \in X$, allora il problema

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)} = 0 \,, \\ u^{(h)}(0) \quad = 0 \,, \qquad h = 0, 1, \ldots, n-2 \,, \\ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \,, \end{cases}$$

ha soluzione. Per quanto detto all'inizio della dimostrazione del Teorema 1, la funzione $t \to V(t)$, che è uguale a $U_0(t)u_{n-1}$ se $t > 0$ e uguale a 0 per $t = 0$, verifica le condizioni a), b), c) della Definizione 3, relativamente al problema (14). Per il Lemma 2 e il Lemma 6, ove si prenda $j = n$, risulta

$$V^{(h)}(t) = U_h(t)\, u_{n-1} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0 \,,$$

per $h = 0, 1, \ldots, n-2$. Inoltre, ancora per il Lemma 6, ove si prenda $j = n$ e $k = n-1$, esiste $C \in \mathbb{R}^+$, tale che $\|U_{n-1}(t)\| \leqslant C$, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. D'altra parte, poichè $\mathfrak{D}(P)$ è denso in X, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $y_\varepsilon \in \mathfrak{D}(P)$, tale che $\|y_\varepsilon - u_{n-1}\| < \varepsilon$. Per il Teorema 1, esiste $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, tale che $\|U_{n-1}(t)\, y_\varepsilon - y_\varepsilon\| < \varepsilon$, per ogni $t \in]0, \delta(\varepsilon)[$. Ne viene che, per ogni

$t \in]0, \delta(\varepsilon)[$,

$$\|U_{n-1}(t)\,u_{n-1} - u_{n-1}\| \leqslant \|U_{n-1}(t)\,u_{n-1} - U_{n-1}(t)\,y_\varepsilon\| + \\ + \|U_{n-1}(t)\,y_\varepsilon - y_\varepsilon\| + \|y_\varepsilon - u_{n-1}\| < (C+2)\,\varepsilon\,.$$

Questo prova che

$$\lim_{t\to 0+} V^{(n-1)}(t)\,u_{n-1} = u_{n-1}\,,$$

come volevasi.

Introduciamo, ora, alcuni sottospazi di X, che saranno utili nel seguito.

Per $h = -1, 0, \dots, n-1$, poniamo

$$X_h = \bigcap_{k=h+1}^{n} \mathfrak{D}(A_k)\,.$$

Muniamo lo spazio vettoriale X_h della norma

$$\|u\|_{X_h} = \sum_{k=h+1}^{n} \|A_k u\|_X\,, \qquad h = -1, 0, \dots, n-1.$$

Osserviamo che $X_{n-1} = X$ e $\|u\|_{X_{n-1}} = \|u\|_X$, per ogni $x \in X$.

TEOREMA 2. *Sia* $\mathfrak{D}(P)$ *denso in* X *e sia* $u_h \in X_{-1} = \mathfrak{D}(P)$ $(h = 0, 1, \dots, n-2)$ *e* $u_{n-1} \in X$. *Allora, se* u *è la soluzione del problema* (13) *costruita nel Teorema* 1 *e nel Corollario* 3, *risulta*

$$u \in \mathrm{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^+; X_{-1}) \cap \left(\bigcap_{h=0}^{n-1} \mathrm{C}^{(h)}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}; X_h)\right).$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè

$$u(t) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t)\,A_k u_h\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

dai Lemmi 1, 2 e 5 segue che, se $s, t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|u^{(l)}(s) - u^{(l)}(t)\|_{X_{-1}} = \sum_{p=0}^{n} \Big\| \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} \big(A_p U_{k+l-h-1}(s) - A_p U_{k+l-h-1}(t)\big) A_k u_h \Big\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{p=0}^{n} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} \|A_p U_{k+l-h-1}(s) - A_p U_{k+l-h-1}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_k u_h\|_X \xrightarrow[s\to t]{} 0 ,$$

$\forall l \in I^+ \cup \{0\}$. Quindi, $u \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^+; X_{-1})$.

Poichè la topologia di X_{-1} è più fine di quella di X_m $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$, risulta $u \in \mathcal{C}^{(h)}(\mathbb{R}^+; X_h)$ per $h = 0, 1, \ldots, n-1$; sarà

$$u \in \mathcal{C}^{(h)}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}; X_h)$$

per $h = 0, 1, \ldots, n-1$, se si proverà che

$$\lim_{t\to 0+} \|u^{(m)}(t) - u_m\|_{X_m} = 0 , \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1 . \tag{15}$$

Poichè $X_{n-1} = X$, la (15), per $m = n-1$, è assicurata dal Corollario 3.

Supponiamo, perciò, $0 \leqslant m \leqslant n-2$. Per la linearità del problema (13), è sufficiente provare la (15) per la soluzione del problema (12), assicurata dal Corollario 3.

Supponiamo, dapprima, anche $u_{n-1} \in X_{-1}$. Allora, utilizzando le notazioni del Teorema 1, si tratta di provare che, per $m = 0, 1, \ldots, n-2$, risulta

$$\lim_{t\to 0+} \|I_1^{m,h}(t) - I_2^{m,h}(t)\|_{X_m} = 0 , \qquad \text{se } m \neq h \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

e

$$\lim_{t\to 0+} \|I_1^{m,m}(t) - I_2^{m,m}(t) - u_m\|_{X_m} = 0 .$$

Per il Lemma 6, risulta, per $h = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\|I_2^{m,h}(t)\|_{X_m} = \sum_{p=m+1}^{n} \|A_p I_2^{m,h}(t)\|_X =$$
$$= \sum_{p=m+1}^{n} \Big\| \sum_{k=0}^{h} A_p U_{m+k-h-1}(t) A_k u_h \Big\|_X \leqslant C \sum_{p=m+1}^{n} \sum_{k=0}^{h} t^{p-m-k+h} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 ,$$

perchè $p - m - k + h > 0$.

Per i risultati del Teorema 1, si ha, per $h \neq m$,

$$\|I_1^{m,h}(t)\|_{X_m} = \sum_{p=m+1}^{n} \|A_p I_2^{m,h}(t)\|_X \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-1} \sum_{p=m+1}^{n} \left\| \int_\Gamma \lambda^{m-h-1} \exp(\lambda t) A_p u_h \, d\lambda \right\|_X \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$$

e

$$\|I_1^{m,m}(t) - u_m\|_{X_m} = \sum_{p=m+1}^{n} \|A_p I_1^{m,m}(t) - A_p u_m\|_X = 0 \, .$$

Rimane da provare che, per ogni $u_{n-1} \in X$, la soluzione del problema (14), costruita nel Corollario 3, ha, nello zero, la regolarità precisata nell'enunciato del teorema.

Poichè X_{-1} è denso in X, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $y_\varepsilon \in X_{-1}$, tale che $\|u_{n-1} - y_\varepsilon\|_X < \varepsilon$. Inoltre, per quanto ora provato, esiste $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, tale che $\|U_m(t) y_\varepsilon\|_{X_m} < \varepsilon$, per ogni $t \in]0, \delta(\varepsilon)[$, per ogni $m \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Allora, il Lemma 6 permette di affermare che, se $m \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ e $t \in]0, \min\{1, \delta(\varepsilon)\}[$, risulta

$$\|U_m(t) u_{n-1}\|_{X_m} \leqslant \|U_m(t) y_\varepsilon\|_{X_m} + \sum_{p=m+1}^{n} \|A_p U_m(t)(u_{n-1} - y_\varepsilon)\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \sum_{p=m+1}^{n} \|A_p U_m(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \|u_{n-1} - y_\varepsilon\|_X < \varepsilon + Cn\varepsilon \, .$$

Così il teorema è provato.

TEOREMA 3. *Siano* $u_h \in X_{-1}$ $(h = 0, 1, \ldots, n-2)$, $u_{n-1} \in X$ *e* $\mathfrak{D}(P)$ *denso in* X. *Allora, se* y *è una soluzione del problema* (13), *tale che*

$$y \in \mathrm{C}^{(n)}(\mathbb{R}^+; X_{-1}) \cap \left(\bigcap_{h=0}^{n-1} \mathrm{C}^{(h)}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}; X_h) \right) , \tag{16}$$

y coincide con la soluzione costruita nel Corollario 3.

DIMOSTRAZIONE. Siano $t \in \mathbb{R}^+$ fissato e y una soluzione del problema (13) soddisfacente la (16). Poniamo

$$F(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t-s) A_k y^{(h)}(s) \, , & \text{se } s \in [0, t[\, , \\ y(t) \, , & \text{se } s = t \, . \end{cases}$$

Per il Lemma 1 e per la (16), F è continua in $[0, t[$.

D'altra parte, per il Lemma 6 e per la (16),

$$\lim_{s\to t-} U_{k-h-1}(t-s)A_k y^{(h)}(s) = 0 \ ,$$

per ogni $h\in\{0, 1, \dots, n-1\}$ e per ogni $k\in\{h+1, \dots, n\}$, tranne quando $h=0$ e $k=n$. Inoltre, per il Lemma 6, esiste $C\in\mathbb{R}^+$, tale che

$$\begin{aligned}&\|U_{n-1}(t-s)y(s)-y(t)\|\leqslant\\&\qquad\leqslant\|U_{n-1}(t-s)y(s)-U_{n-1}(t-s)y(t)\|+\|U_{n-1}(t-s)y(t)-y(t)\|\leqslant\\&\qquad\leqslant C\|y(s)-y(t)\|+\|U_{n-1}(t-s)y(t)-y(t)\| \ .\end{aligned}$$

Poichè si è provato nel corso della dimostrazione del Teorema 1 che

$$\lim_{s\to t-}\|U_{n-1}(t-s)y(t)-y(t)\| = 0 \ ,$$

l'ultimo membro della disuguaglianza precedente tende a zero quando $s\to t-$ e, quindi, $F\in \mathcal{C}([0, t]; X)$.

Poichè le funzioni a valori in X

$$s\to A_k y^{(h+1)}(s)$$

sono continue in $]0, t[$, per ogni $h\in\{0, 1, \dots, n-1\}$ e per ogni $k\in\{h+1, \dots, n\}$ e gli A_k sono chiusi, le funzioni $s\to A_k y^{(h)}(s)$ sono derivabili in $]0, t[$ per gli stessi h e k e risulta

$$\frac{d}{ds}\big(A_k y^{(h)}(s)\big) = A_k y^{(h+1)}(s) \ ,$$

per ogni $s\in\ ]0, t[$ (cfr., per es., [8], Cap. III, Par. 1.1). Allora, per il Lemma 1, F è derivabile in $]0, t[$ e risulta, tenendo presente che y è soluzione dell'equazione differenziale,

$$\begin{aligned}F'(s) &= \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{k=h+1}^{n}\big(-U_{k-h}(t-s)A_k y^{(h)}(s) + U_{k-h-1}(t-s)A_k y^{(h+1)}(s)\big) =\\&= -\sum_{k=1}^{n} U_k(t-s)A_k y(s) - \sum_{h=1}^{n-1}\sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h}(t-s)A_k y^{(h)}(s) +\end{aligned}$$

$$+ U_0(t-s)y^{(n)}(s) + \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t-s)A_k y^{(h+1)}(s) =$$

$$= -(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \exp[\lambda(t-s)]y(s)\,d\lambda + U_0(t-s)A_0 y(s) +$$

$$+\sum_{h=1}^{n-1} U_0(t-s)A_h y^{(h)}(s) - U_0(t-s)\left(\sum_{h=0}^{n-1} A_h y^{(h)}(s)\right) = 0 .$$

Quindi, F è costante su $]0, t[$ e, poichè è continua su $[0, t]$, è costante anche sull'intervallo chiuso. In particolare,

$$y(t) = F(t) = F(0) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t) A_k u_h ,$$

che è la soluzione del problema (13) costruita nel Corollario 3. Per l'arbitrarietà di t, y coincide, su tutto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, con la soluzione costruita precedentemente.

5. Applicazione ai problemi al contorno per le equazioni paraboliche.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^r$ con frontiera $\partial\Omega$. In $\Omega \times \mathbb{R}^+$ è assegnato l'operatore differenziale lineare

$$\mathcal{A}(x; D_x, D_t) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k(x; D_x)\, D_t^k ,$$

dove gli $\mathcal{A}_k(x; D_x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sono operatori differenziali lineari a coefficienti definiti in $\overline{\Omega}$ e a valori complessi, mentre $\mathcal{A}_n(x; D_x) = 1$.

Sia $m \in N$ e, detto s_k l'ordine di $\mathcal{A}_k(x; D_x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, richiediamo che sia $s_0 = 2m$, $s_k \leqslant 2m - (2m/n)k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Supponiamo, inoltre, che $d = (2m/n)$ sia un intero pari.

Siano dati anche m operatori differenziali frontiera

$$\mathcal{B}_j(x; D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x)\, D_x^\alpha , \qquad j = 1, \ldots, m,$$

con $m_j \leqslant 2m - 1$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Indichiamo con $\mathcal{A}_k'(x; D_x)$ la somma dei termini di $\mathcal{A}_k(x; D_x)$ che sono di ordine $2m - dk$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ e con $\mathcal{A}_n'(x; D_x)$ la costante uno. Poniamo

$$\mathcal{A}'(x; D_x, D_t) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}'_k(x; D_x)\, D_t^k\,.$$

Analogamente, indichiamo con $\mathcal{B}'_j(x; D_x)$ $(j = 1, \dots, m)$ la parte principale dell'operatore $\mathcal{B}_j(x; D_x)$.

Facciamo, inoltre, le ipotesi seguenti.

IPOTESI A. *$\partial\Omega$ sia una varietà di $\mathbf{R}^r$ di dimensione $r-1$ e di classe $C^{(\infty)}$, i coefficienti di $\mathcal{A}(x; D_x, D_t)$ siano di classe $C^{(\infty)}(\bar{\Omega})$ e quelli di $\mathcal{B}_j(x; D_x)$ $(j = 1, \dots, m)$ siano di classe $C^{(\infty)}(\partial\Omega)$.*

(È chiaro che non ci preoccupiamo qui di precisare la regolarità minima necessaria per la validità dei risultati che otterremo).

IPOTESI B. $\forall \xi \in \mathbf{R}^r - \{0\}$, $\forall x \in \bar{\Omega}$ e $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $\mathcal{A}'(x; i\xi, \lambda) \neq 0$. Si richiede, cioè, che $\mathcal{A}(x; D_x, D_t)$ sia parabolico secondo Petrovskii.

IPOTESI C. *Se $r = 1$, il polinomio in s $\mathcal{A}'(x; is, \lambda)$ ha esattamente m radici con parte immaginaria positiva,* $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

IPOTESI D. *Il sistema di operatori frontiera $\{\mathcal{B}_j; j = 1, \dots, m\}$ è normale, cioè*

a) $\sum_{|\alpha| = m_j} b_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha \neq 0$, $\forall x \in \partial\Omega$ *e* $\forall \xi \in \mathbf{R}^r - \{0\}$ *normale a $\partial\Omega$ in x;*

b) $m_i \neq m_j$, *se* $i \neq j$.

IPOTESI E. $\forall x \in \Omega$, *siano $\nu \neq 0$ un vettore di $\mathbf{R}^r$ normale a $\partial\Omega$ in x e $\xi \neq 0$ un vettore di $\mathbf{R}^r$ tangente a $\partial\Omega$ in x. Allora, i polinomi in s $\mathcal{B}'_j(x; \xi + s\nu)$ $(j = 1, \dots, m)$ sono linearmente indipendenti modulo il polinomio*

$$\prod_{k=1}^{m} \left(s - s_k^+(\xi, \nu; \lambda)\right), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\,,$$

dove le $s_k^+(\xi, \nu; \lambda)$ $(k = 1, \dots, m)$ sono le radici con parte immaginaria positiva del polinomio $\mathcal{A}'(x; i(\xi + s\nu), \lambda)$. Se $n = 1$, consideriamo i polinomi $\mathcal{A}'(x; is, \lambda)$ e $\mathcal{B}'_j(x; s)$ $(j = 1, \dots, m)$.

Si richiede, cioè, che il sistema di operatori frontiera $\{B_j; j = 1, \dots, m\}$ ricopra $\mathcal{A}(x; D_x, \lambda)$ su $\partial\Omega$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Sia, ora, $p \in]1, +\infty[$. Se $j \in I^+ \cup \{0\}$, indichiamo con $H^j_p(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle (classi di) funzioni di $L_p(\Omega)$, tali che le loro derivate (nel senso delle distribuzioni) fino all'ordine j appartengano a $L_p(\Omega)$. Munito della norma

$$\|u\|_j = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant j} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

$H^j_p(\Omega)$ diventa uno spazio di Banach.

Indichiamo poi con $H^{2m}_p(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}^m_{j=1})$, il completamento, nella topologia di $H^{2m}_p(\Omega)$, dello spazio vettoriale

$$\{u \in C^{(2m)}(\bar{\Omega});\ \mathcal{B}_j(x; D_x)\, u(x) = 0,\ \ \forall x \in \partial\Omega,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Nel seguito, avremo bisogno del seguente risultato, provato da Lagnese in [9] (cfr. anche Agmon-Nirenberg [1]).

PROPOSIZIONE 3 (Lagnese). *Se le ipotesi A)-E) sono soddisfatte, allora esistono $\lambda_0 \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ e $\theta_0 \in]0, \pi/2[$, tali che l'applicazione*

$$\mathcal{T}(\lambda)\colon H^{2m}_p(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}^m_{j=1}) \to L_p(\Omega)$$

$$\big(\mathcal{T}(\lambda)\, u\big)(x) = \mathcal{A}(x; D_x, \lambda)\, u(x)$$

sia una biiezione $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ con $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ e $|\arg \lambda| \leqslant \pi/2 + \theta_0$. Inoltre, per questi λ e per ogni $u \in H^{2m}_p(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}^m_{j=1})$, vale la stima

$$\sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{(2m-j)/d} \|u\|_j \leqslant C \|\mathcal{A}(x; D_x, \lambda)\, u\|_0\,, \tag{17}$$

dove C è una costante indipendente da u e da λ.

Poniamo, per $k = 1, \dots, n$ e $\mu \in \mathbf{R}^+$,

$$S_{k,\mu}\colon H^{2m-dk}_p(\Omega) \to L_p(\Omega)\,,$$

$$(S_{k,\mu} u)(x) = \sum_{h=k}^{n} \binom{h}{k} \mu^{h-k} \mathcal{A}_h(x; D_x)\, n(x)\,;$$

questi operatori, per $k < n$, risultano prechiusi in $L_p(\Omega)$ e $S_{n,\mu} = 1$;

indichiamo con $A_{k,\mu}$, per $k < n$, la minima estensione chiusa di $S_{k,\mu}$ ($k = 1, \ldots, n-1$; $\mu \in \mathbb{R}^+$) e, per omogeneità di scrittura, $A_{n,\mu} = 1$. Poniamo

$$Y_{k,\mu} = \bigcap_{h=k+1}^{n} \mathfrak{D}(A_{h,\mu}) , \qquad k = 1, \ldots, n-1 ; \ \mu \in \mathbb{R}^+,$$

e muniamo $Y_{k,\mu}$ ($k = 1, \ldots, n-1$; $\mu \in \mathbb{R}^+$) della norma

$$\|u\|_{Y_{k,\mu}} = \|u\|_0 + \sum_{j=k+1}^{n-1} \|A_{j,\mu} u\|_0 ,$$

con la convenzione di omettere la somma al secondo membro se $k = n - 1$.

Siamo, ora, in grado di provare il

TEOREMA 4. *Siano soddisfatte le ipotesi A)-E) e siano* $f_k \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$ ($k = 0, 1, .., n-2$) *e* $f_{n-1} \in L_p(\Omega)$. *Allora, il problema*

$$(18) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(x; D_x, D_t) u(x, t) = 0 , & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ \mathcal{B}_j(x; D_x) u(x, t) = 0 , & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) , \\ \lim_{t \to 0+} \|D_t^k u(\cdot, t) - f_k\|_0 = 0 , & k = 0, 1, \ldots, n-1 , \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione $u_t(x)$, *tale che*

$$(19) \qquad u \in \mathcal{C}^{(n)}\big(\mathbb{R}^+; H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)\big) \cap \Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}; Y_{k,\mu})\Big) .$$

Questa soluzione appartiene a $\mathcal{C}^{(\infty)}\big(\mathbb{R}^+; H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)\big)$.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che il problema (18)-(19) ammette una e una sola soluzione se, e solo se, esiste $\mu \in \mathbb{R}^+$, tale che il problema

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k(x; D_x)(D_t + \mu)^k \delta(x, t) = 0 , & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ \mathcal{B}_j(x; D_x) \delta(x, t) = 0 , & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) , \\ \lim_{t \to 0+} \|D_t^k \delta(\cdot, t) - \varphi_k\|_0 = 0 , & k = 0, 1, \ldots, n-1 , \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione soddisfacente la (19), per ogni $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2} \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$ e per ogni $\varphi_{n-1} \in L_p(\Omega)$.

Infatti, sia $\delta\colon \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \to \mathbb{C}$ e poniamo

$$u\colon \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \to \mathbb{C}\,, \qquad u(x, t) = \exp(\mu t)\, \delta(x, t)\,.$$

Allora, δ soddisfa la (19) se, e solo se, anche u la soddisfa. Si ha poi:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k(x; D_x)\, D_t^k u(x, t) = \exp(\mu t) \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k(x; D_x) \left(\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mu^{k-h} D_t^h\, \delta(x, t) \right) =$$
$$= \exp(\mu t) \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k(x; D_x)(D_t + \mu)^k\, \delta(x, t)\,.$$

Quindi, δ soddisfa la prima delle (20) se, e solo se, u soddisfa la prima delle (18).

Inoltre,

$$\mathcal{B}_j(x; D_x)\, u(x, t) = \exp(\mu t)\, \mathcal{B}_j(x; D_x)\, \delta(x, t), \qquad j = 1, \dots, m,$$

e, quindi, δ soddisfa la seconda delle (20) se, e solo se, u soddisfa la seconda delle (18).

Se δ soddisfa la terza delle condizioni (20), allora u soddisfa la terza delle condizioni (18) con

$$(21) \qquad f_k(x) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mu^{k-h} \varphi_h(x)\,, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

Infatti, poichè

$$D_t^k u(x, t) = \exp(\mu t) \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mu^{k-h} D_t^h\, \delta(x, t)$$

per $k = 0, 1, \dots, n-1$, si ha

$$\|D_t^k u(\cdot, t) - f_k\|_0 \leqslant \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mu^{k-h} \|\exp(\mu t)\, D_t^h \delta(\cdot, t) - \varphi_h\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mu^{k-h} \left[\exp(\mu t) \|D_t^h\, \delta(\cdot, t) - \varphi_h\|_0 + (\exp(\mu t) - 1)\, \|\varphi_h\|_0\right] \xrightarrow[t \to 0+]{} 0\,.$$

Analogamente, se u soddisfa la terza delle (18), allora δ soddisfa la terza delle (20) con

$$\varphi_k(x) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-\mu)^{k-h} f_h(x) , \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Il sistema lineare (21) ha la matrice dei coefficienti con determinante diverso da zero; quindi, assegnate le f_k, è possibile determinare le φ_k in maniera univoca, il viceversa essendo ovvio. Inoltre, poichè il sistema (21) è triangolare inferiore, f_k dipende solo da $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ e, quindi, se $\varphi_k \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$, anche $f_k \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$.

Infine, poichè la matrice inversa di una matrice triangolare inferiore è anch'essa triangolare inferiore, se $f_k \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$ anche $\varphi_k \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$. Questo prova l'equivalenza dei problemi (18) e (20).

Rimane, quindi, da provare che, scegliendo μ in maniera opportuna, il problema (20)-(19) ammette una e una sola soluzione.

Poniamo $X = L_p(\Omega)$, $\mathfrak{D}(A_{0,\mu}) = H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$,

$$(A_{0,\mu} u)(x) = \sum_{h=0}^{n} \mu^h \mathcal{A}_h(x; D_x) u(x) ,$$

con $\mu \in \mathbb{R}^+$ e teniamo presente che gli operatori $A_{k,\mu}$ $(k = 1, \dots, n;$ $\mu \in \mathbb{R}^+)$ sono già stati definiti.

Allora, il problema (20)-(19) può essere formulato nella maniera seguente:

Trovare

$$u \in \mathcal{C}^{(n)}\big(\mathbb{R}^+; H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)\big) \cap \Big(\bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}(\mathbb{R}^+ \cap \{0\}; Y_{h,\mu})\Big)$$

soluzione del problema di Cauchy

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_{k,\mu} u^{(k)} = 0 , & \\ u^{(h)}(0) \quad = \varphi_h , & h = 0, 1, \dots, n-1 . \end{cases}$$

Gli $A_{k,\mu}$ $(k = 1, \dots, n;$ $\mu \in \mathbb{R}^+)$ sono chiusi per definizione e $A_{n,\mu} = 1$. Inoltre, prendendo $\lambda = 0$ nell'Ipotesi B), ne viene che $\mathcal{A}_0(x; D_x)$, e quindi anche $A_{0,\mu}$, è uniformemente ellittico; di qui segue che $A_{0,\mu}$

è chiuso per ogni $\mu \in \mathbb{R}^+$. Quindi, il problema (22) verifica l'Ipotesi 1.

Se $u \in H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$, poniamo

$$P_\mu(\lambda)\, u = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_{k,\mu} u \ ;$$

allora, $P_\mu(\lambda)\, u = \sum_{k=0}^{n} (\lambda + \mu)^k \mathcal{A}_k(x; D_x)\, u$.

Poichè $A_{k,\mu} \in \mathcal{L}(H_p^{2m-dk}(\Omega), L_p(\Omega))$, per $k = 0, 1, \ldots, n$, esiste $C_\mu \in \mathbb{R}^+$, tale che

$$\|A_{k,\mu} P_\mu^{-1}(\lambda) f\|_0 \leqslant C_\mu \|P_\mu^{-1}(\lambda) f\|_{2m-dk} \,,$$

$\forall f \in L_p(\Omega)$, $\forall \mu \in \mathbb{R}^+$, $\forall \lambda \in \varrho(A_{0,\mu}, \ldots, A_{n-1,\mu})$ e $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. D'altra parte, per la (17), se $|\lambda + \mu| \geqslant \lambda_0$, $|\arg(\lambda + \mu)| \leqslant \pi/2 + \theta_0$, esistono C'_μ, $C''_\mu \in \mathbb{R}^+$, tali che

$$\|P_\mu^{-1}(\lambda) f\|_{2m-dk} \leqslant C_{\mu'} |\lambda + \mu|^{-k} \|f\|_0 \leqslant C''_\mu |\lambda|^{-k} \|f\|_0 \,,$$

$\forall f \in L_p(\Omega)$. Poichè, se $\mu \geqslant \lambda_0/(\cos\theta_0)$,

$$\left\{\lambda \in \mathbf{C};\ |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta_0\right\} \subset \left\{\lambda \in \mathbf{C};\ |\lambda + \mu| \geqslant \lambda_0,\ |\arg(\lambda + \mu)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta_0\right\},$$

ne viene che, scelto $\bar\mu \geqslant \lambda_0/(\cos\theta_0)$, esiste $K_{\bar\mu} \in \mathbb{R}^+$, tale che

$$\|A_{k,\bar\mu} P_{\bar\mu}^{-1}(\lambda)\|_0 \leqslant K_{\bar\mu} |\lambda|^{-k} \,,$$

per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\arg\lambda| \leqslant \pi/2 + \theta_0$ e per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Quindi, il problema (22) verifica anche l'Ipotesi 2.

Infine, poichè $\mathcal{C}_0^{(\infty)}(\Omega)$ è denso in $L_p(\Omega)$ e $\mathcal{C}_0^{(\infty)}(\Omega) \subset H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$, allora $H_p^{2m}(\Omega; \{\mathcal{B}_j\}_{j=1}^m)$ è denso in $L_p(\Omega)$.

Allora, il Corollario 3 e il Teorema 3 assicurano che il problema (20)-(19) con $\mu = \bar\mu$ ha una e una sola soluzione, come volevasi.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon - L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), pp. 121-240.

[2] G. Da Prato, *R-semigruppi analitici ed equazioni di evoluzione in L_p*, Ricerche Mat., **16** (1967), pp. 233-249.

[3] YU. DUBINSKII, *Su alcune equazioni differenziali operatoriali di ordine arbitrario* (in russo), Mat. Sb., **90** (132) (1973), pp. 3-22.
[4] J. EISENFELD, *Operator equations and nonlinear eigenparameter problems,* J. Functional Analysis, **12** (1973), pp. 475-490.
[5] P. GRISVARD, *Équations différentielles abstraites,* Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) **2** (1969), pp. 311-395.
[6] S. JAKUBOV, *Soluzione di problemi misti per equazioni differenziali a derivate parziali col metodo operatoriale* (in russo), Dokl. Akad. Nauk SSSR, **196** (1971), pp. 545-548; trad. ingl.: Soviet Math. Dokl., **12** (1971), pp. 213-216.
[7] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators,* Grundlagen Math. Wiss., Bd. 132, Springer, New York (1966).
[8] S. G. KREIN, *Equazioni differenziali lineari in uno spazio di Banach* (in russo), Nauka, Mosca (1967); trad. ingl.: *Translations of Math. Monographs,* vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
[9] J. LAGNESE, *On equations of evolution and parabolic equations of higher order in t,* J. Math. Anal. Appl., **32** (1970), pp. 15-37.
[10] M. SOVA, *Problème de Cauchy pour équations hyperboliques opérationnelles à coefficients constants non bornés,* Ann. Scuola Norm. Sup., (3) **22** (1968), pp. 67-100.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 novembre 1974.