RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Su un problema ai limiti per certe equazioni astratte del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 211-230

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__211_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Su un problema ai limiti per certe equazioni astratte del secondo ordine.

ANGELO FAVINI (*)

SUMMARY - In this paper I consider the existence of a «strong» solution for the boundary problem in a Banach space X

$$\begin{cases} Bx''(t) = Ax(t) + f(t) , & t \in]0, T[, \\ \lim\limits_{t\to 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0 , & x_0 \in Y , \\ \lim\limits_{t\to T-} \|x(t) - x_1\|_Y = 0 , & x_1 \in Y , \end{cases}$$

where Y is another Banach space, in general different from X, A is a linear closed operator and B is a bounded operator from Y to X. The results allow to handle «degenerate» boundary problems for some partial differential equations.

Introduzione.

Questa nota è dedicata allo studio del problema ellittico «degenere»

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} Bx''(t) = Ax(t) + f(t) , & t \in]0, T[, \\ x(0) = x_0 , \quad x(T) = x_1 , \end{cases}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico «S. Pincherle», Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

dove l'equazione va considerata in uno spazio di Banach complesso X mentre le condizioni ai limiti sono poste in uno spazio di Banach Y che può essere diverso da X.

Si assume che A è un operatore lineare chiuso, a dominio D_A denso in Y a valori in X, mentre B è limitato da Y a X.

In primo luogo, utilizzando le tecniche dei lavori [2]-[3] e seguendo certe idee di P. E. Sobolevskii e di S. G. Krein contenute in [4] e [5], provo che sotto opportune condizioni, il problema (i) ha una soluzione stretta.

Riferendomi poi alla breve nota di Sobolevskii sopra citata ed al lavoro di Dubinskii [1], costruisco, sotto due diverse condizioni su $\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y}$, una soluzione stretta del problema (i).

I risultati astratti così ottenuti permettono di risolvere, sotto certe ipotesi sui dati iniziali e sulla parte non-omogenea, problemi del tipo

$$\begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A(x,D)\,u(t,x) + f(t,x)\,, & t\in\,]0,T[\,,\ x\in\Omega\,,\\ u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0\,, & \forall t\in\,]0,T[\,,\\ \lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = u_0(x)\,, & x\in\Omega\,,\\ \lim\limits_{t\to T-} u(t,x) = u_1(x)\,, & x\in\Omega\,, \end{cases}$$

dove $\alpha(x)$ è una funzione continua $\geqslant 0$ su $\bar{\Omega}$, $A(x,D)$ è un certo operatore differenziale del secondo ordine.

Il problema viene risolto o nell'ambito $L^2(\Omega)$ oppure nell'ambito $X = L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$, $Y = L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$, a seconda della maggiore o della minore « irregolarità » di $\alpha(x)$.

Siano X, Y spazi di Banach complessi, immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico separato.

Siano A, B operatori lineari da Y a X, A chiuso e a dominio D_A denso in Y, B limitato.

Diciamo che $x = x(t)$ è soluzione stretta del problema

$$(1)\qquad \begin{cases} Bx''(t) = Ax(t)\,, & t\in\,]0,T[\,,\\ x(0) = x_0\in Y\,,\\ x(T) = x_T\in Y, \end{cases}$$

(rispettivamente, del problema

$$(2)\qquad \begin{cases} Bx''(t) = Ax(t) + f(t)\,, & t\in\,]0,T[\,,\\ x(0) \quad = x_0 \in Y\,, \\ x(T) \quad = x_T \in Y)\,, \end{cases}$$

dove $f(t)$ è una applicazione continua da $[0, T]$ a X, se x è una funzione continua da $[0, T]$ a Y, ha derivate prima e seconda continue da $]0, T[$ a Y, $x(t)\in D_A$ $\forall t\in\,]0, T[$, e vale (1), (rispett. vale (2)).

È chiaro che, con un semplice cambiamento di variabile, ci si può sempre ricondurre al caso di $T = 1$.

LEMMA 1. *Supponiamo che l'operatore $\lambda B - A$ abbia inverso limitato da X a Y per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$ con* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ *e sia*

$$(3)\qquad \|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\,,$$

(*rispettivamente,* $\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$).

Allora $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, $(\|B\|_{Y\to X} M)\operatorname{Re}\lambda \leqslant q(1 + |\operatorname{Im}\lambda|)$, *vale*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant M_1(1 + |\lambda|)^{-1}\,,$$

(*rispettivamente, esistono due numeri positivi M_2 e γ tali che*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M_2\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant \gamma)\,,$$

(cfr. [2] e [4], p. 67).

DIMOSTRAZIONE. *Caso* 1. Sia $\operatorname{Re}\lambda = \sigma$, $\operatorname{Im}\lambda = \tau$, $\sigma > 0$ e valga

$$(4)\qquad (\|B\|_{Y\to X} M)\sigma \leqslant q\,(1 + |\tau|)\,, \qquad q\in\,]0,1[\,.$$

Allora (cfr. [2]):

$$((\sigma + i\tau)B - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left((i\tau B - A)^{-1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sigma^n (i\tau B - A)^{-1}[B(i\tau B - A)^{-1}]^n\,.$$

In effetti, se $x\in X$, per la (4),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\|(i\tau B-A)^{-1}\|_{X\to Y}\,\|[B(i\tau B-A)^{-1}]^n x\|_X\leqslant$$
$$\leqslant\|(i\tau B-A)^{-1}\|_{X\to Y}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\|B(i\tau B-A)^{-1}\|^n_{Y\to X}\|x\|_X\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{1+|\tau|}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\|B\|^n_{Y\to X}\frac{M^n}{(1+|\tau|)^n}\,\|x\|_X\leqslant\frac{M_q}{1+|\tau|}\,\|x\|_X=$$
$$=\frac{M_q}{1+|\tau|}\cdot\frac{1+|\sigma+i\tau|}{1+|\sigma+i\tau|}\,\|x\|_X\leqslant\frac{M_q}{1+|\tau|}\cdot\frac{1+|\tau|+C_1(1+|\tau|)}{1+|\lambda|}\,\|x\|_X\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M_3}{1+|\lambda|}\,\|x\|_X\,.$$

Caso 2. Osserviamo che se

$$|\sigma|\leqslant q(\|B\|_{Y\to X}M)^{-1}\,,\qquad q\in\,]0,1[\,,$$

risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma|^n\|(i\tau B-A)^{-1}\|_{Y\to X}\|[B(i\tau B-A)^{-1}]^n x\|_X\leqslant$$
$$\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma|^n\|B\|^n_{X\to Y}M^n\|x\|_X\leqslant M_2\|x\|_X\,.$$

Il Lemma è dimostrato.

Osservazione 1. Supponiamo che $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$, risulti $(\lambda B-A)^{-1}\in L(X,Y)$ e

$$\|(\lambda B-A)^{-1}\|_{X\to Y}\leqslant M(1+|\lambda|)^{-1}\,,$$

(rispettivamente, $\|(\lambda B-A)^{-1}\|_{X\to Y}\leqslant M$).

In base al Lemma 1, esiste un reale positivo γ_1 tale che la retta $\Gamma=\{\lambda\in\mathbf{C}|\operatorname{Re}\lambda=\gamma_1\}$ è contenuta nell'insieme di esistenza dell'inverso $(\lambda B-A)^{-1}$.

Poniamo

$$V(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\exp\left[-\sqrt{\lambda}\right]t(\lambda B-A)^{-1}B\,d\lambda\in L(Y,Y)\,,\qquad t>0\,,$$

dove qui e nel seguito si conviene di scegliere come radice quadrata di λ quella per cui $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}>0$.

È chiaro che $V(t)$ è ben definito per le proprietà di $(\lambda B - A)^{-1}$ e di $\exp[-\sqrt{\lambda}t]$.

Proviamo il seguente

TEOREMA 1. *Siano A, B operatori lineari da Y a X, A chiuso a dominio denso in Y, B limitato, valga la* (3) *e* 1 *appartenga all'insieme risolvente di $V(2T)$.*

Se, infine, $x_0, x_1 \in D_A$, allora il problema omogeneo (1) *ha una soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia y un elemento di Y. Poniamo

$$z(t) = V(t)y\,, \qquad t > 0\,.$$

Chiaramente, $z(t)$ è derivabile due volte, con derivate continue, su $]0, +\infty[$ e si ha

$$z''(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp[-\sqrt{\lambda}\,t]\,\lambda(\lambda B - A)^{-1}By\,d\lambda\,.$$

Segue che

$$\begin{aligned} Bz''(t) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp[-\sqrt{\lambda}\,t](\lambda B - A + A)(\lambda B - A)^{-1}By\,d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp[-\sqrt{\lambda}\,t]\,By\,d\lambda - \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp[-\sqrt{\lambda}\,t]\,A(\lambda B - A)^{-1}By\,d\lambda = Az(t)\,. \end{aligned}$$

Infatti, il primo integrale è nullo, per il Teorema di Cauchy, e, in secondo luogo, A è chiuso. Dunque,

$$Bz''(t) = Az(t)\,, \qquad t > 0\,.$$

Esaminiamo l'esistenza del $\lim\limits_{t\to 0+} z(t)$. A questo proposito, assumiamo che y appartenga al dominio di A.

Riesce allora

$$z(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \exp\,[-\sqrt{\lambda}\,t]\;\lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}(\lambda B - A + A)y\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\exp\,[-\sqrt{\lambda}\,t]}{\lambda}\,y\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\exp\,[-\sqrt{\lambda}\,t]}{\lambda}\,(\lambda B - A)^{-1}Ay\,d\lambda\,.$$

Il primo integrale è nullo. Quanto al secondo integrale, poichè

$$\left\|\frac{\exp\,[-\sqrt{\lambda}\,t]}{\lambda}\,(\lambda B - A)^{-1}Ay\right\|_Y \leqslant \frac{C}{|\lambda|^2}\,\|Ay\|_X\,,$$

per il Teorema della convergenza dominata, esso ammette limite per $t \to 0+$, uguale a

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\lambda B - A)^{-1}}{\lambda}\,Ay\,d\lambda\,.$$

Ma allora, sempre in base al Teorema di Cauchy, se Γ_ε è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\varepsilon > 0$ opportuno, abbiamo che

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\lambda B - A)^{-1}}{\lambda}\,Ay\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\lambda B - A)^{-1}}{\lambda}\,Ay\,d\lambda\,.$$

Tale integrale, per il Teorema dei residui, non è altro che y. Di qui,

$$\lim_{t\to 0+} V(t)y = y\,, \qquad \forall y \in D_A\,.$$

È dunque lecito porre, per ogni $y \in D_A$, $V(0)y = y$. Siano ora y_0, y_1 elementi di D_A. Definiamo (cfr. [5]):

$$y(t) = [V(t) - V(2T - t)]y_0 + [V(T - t) - V(T + t)]y_1\,, \qquad 0 < t < T\,.$$

In forza di quanto abbiamo precedentemente dimostrato, riesce senz'altro

$$By''(t) = Ay(t)\,, \qquad t \in\,]0, T[\,.$$

Poi,

$$y(0) = \lim_{t\to 0+} y(t) = (1 - V(2T))y_0\,,$$

$$y(T) = \lim_{t\to T-} y(t) = (1 - V(2T))y_1\,.$$

Da queste considerazioni segue che, nell'ipotesi che esista l'inverso $(1 - V(2T))^{-1}$, se x_0, $x_1 \in D_A$, la $x(t)$ data da

$$x(t) = [V(t) - V(2T - t)](1 - V(2T))^{-1} x_0 + \\ + [V(T - t) - V(T + t)](1 - V(2T))^{-1} x_1$$

è soluzione stretta del problema (1).

Basta infatti riconoscere che $\omega_i = (1 - V(2T))^{-1} x_i \in D_A$ $(i = 0, 1)$.

Ora, da $\omega_i - V(2T)\omega_i = x_i$, segue $x_i + V(2T)\omega_i = \omega_i$, che appartiene a D_A in quanto $x_i \in D_A$ e, addirittura per ogni $y \in Y$, $V(2T)y \in D_A$.

Il Teorema è dimostrato.

Osservazione. Per le assunzioni fatte sugli operatori, già una valutazione non eccessivamente accurata mostra che, per T sufficientemente grande, $(1 - V(2T))^{-1}$ esiste in $L(Y, Y)$.

Infatti, se Γ_1 denota la curva unione delle due semirette Γ_2, Γ_3, la prima che unisce $a + \infty \exp[-i\theta]$ ad a, la seconda che unisce a ad $a + \infty \exp[i\theta]$, dove a e θ sono opportuni reali positivi con $0 < < \theta < \pi/2$, risulta

$$V(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \exp[-\sqrt{\lambda}\, t](\lambda B - A)^{-1} B\, d\lambda\,, \qquad t > 0\,.$$

Quindi,

$$\|V(t)\|_{Y\to Y} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} |\exp[-\sqrt{\lambda}\, t]|\, \|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y}\, \|B\|_{Y\to X}\, |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-1} M \|B\|_{Y\to X}\int_{\Gamma_1} \exp\left[-|\lambda|^{\frac{1}{2}}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]|d\lambda| =$$

$$= \pi^{-1} M \|B\|_{Y\to X}\int_{\Gamma_1} \exp\left[-\sqrt[4]{a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right] dr \leqslant$$

$$\leqslant \pi^{-1} M \|B\|_{Y\to X}\int_0^{+\infty} \exp\left[-\sqrt{r}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right] dr =$$

$$= 2\pi^{-1} M \|B\|_{Y\to X}\int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{ut}{\sqrt{2}}\right] u\, du = C/t^2\,.$$

I successivi risultati sono ottenuti utilizzando un metodo ispirato dal lavoro di Dubinskii (cfr. [1]). In effetti, useremo contemporaneamente un risultato di Sobolevskii (cfr. [5]) e certe affermazioni di Dubinskii contenute nel lavoro sopra citato.

Come in [3], esamineremo due casi, a seconda del comportamento dell'operatore « risolvente » $(\lambda B - A)^{-1}$.

Dimostreremo il seguente

TEOREMA 2. *Sia A un operatore lineare chiuso da Y a X, a dominio D_A denso in Y e sia B un operatore limitato da Y a X.*

Supponiamo che l'operatore $\lambda B - A$ abbia inverso limitato per $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ *e che riesca*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0 .$$

Se, infine, $Ax_0 = By_0$, dove $y_0 \in D_A$, allora il problema (2), *con $f(t) = (1-t)Ay_0$, ha una soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x un elemento arbitrario di X.

Consideriamo il problema di determinare una funzione $w(t, \lambda)$ definita su $]0, 1[\times\{\lambda \in \mathbf{C} | \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(t,\lambda)}{\partial t^2} - \lambda w(t,\lambda) = (1-t)x\,, & t \in]0,1[\,, \\[2ex] \lim\limits_{t\to 0+} w(t,\lambda) = \lim\limits_{t\to 1-} w(t,\lambda) = 0\,. \end{cases}$$

Per brevità, nel seguito scriveremo $w(0, \lambda)$ e $w(1, \lambda)$ al posto dei limiti corrispondenti.

Tale soluzione è (cfr. [5]):

$$\begin{aligned} w(t,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{&(1-\exp[-2\sqrt{\lambda}])^{-1}\Bigg(\Big[\exp[-t\sqrt{\lambda}] - \exp[-(2-t)\sqrt{\lambda}]\Big]\cdot \\ &\cdot\left(1 + \frac{\exp[-\sqrt{\lambda}]-1}{\sqrt{\lambda}}\right)x + \Big[\exp[-(1-t)\sqrt{\lambda}] - \\ &- \exp[-(1+t)\sqrt{\lambda}]\Big]\left(-\exp[-\sqrt{\lambda}] + \frac{1-\exp[-\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}\right)x\Bigg) - \\ &- \left(2(1-t) + \frac{\exp[-(1-t)\sqrt{\lambda}] - \exp[-t\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}} - \exp[-t\sqrt{\lambda}]\right)x\Bigg\}. \end{aligned}$$

Inoltre, sull'insieme $\{\lambda \in \mathbf{C} | \operatorname{Re} \lambda \geqslant \delta > 0\}$ riesce

$$\|w(t, \lambda)\|_X \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \|x\|_X ,$$

dove C è una costante positiva indipendente da $t \in]0, 1[$ e da λ.

Pertanto, il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(t, \lambda)}{\partial t^2} - \lambda w(t, \lambda) = (1-t) A y_0 , & t \in]0, 1[, \\ w(0, \lambda) = w(1, \lambda) = 0 , \end{cases}$$

ha una soluzione stretta, olomorfa su $\{\lambda \in \mathbf{C} | \operatorname{Re} \lambda > \gamma_1/2\}$, soddisfacente

$$\|w(t, \lambda)\|_X \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \|A y_0\|_X , \qquad \operatorname{Re} \lambda > \gamma_1/2 .$$

Definiamo

$$y(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-1} (\lambda B - A)^{-1} w(t, \lambda)\, d\lambda , \qquad t \in]0, 1[.$$

Qui, γ_1 e Γ hanno il significato dichiarato nella Osservazione 1. L'integrale è chiaramente convergente, per le valutazioni sopra fatte. Si ha:

$$\lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1} \frac{\partial^2 w(t, \lambda)}{\partial t^2} = \lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}[\lambda w(t, \lambda) + (1-t) A y_0] =$$
$$= (\lambda B - A)^{-1} w(t, \lambda) + \lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}(1-t) A y_0 .$$

Poichè

$$\|(\lambda B - A)^{-1} w(t, \lambda)\|_X \leqslant \frac{C}{|\lambda|^2} , \qquad \|\lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}\|_{X \to Y} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|^2} ,$$

è lecito derivare due volte sotto il segno di integrale, ottenendo

$$y''(t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_\Gamma \lambda^{-1} (\lambda B - A)^{-1} (1-t) A y_0 \, d\lambda + \int_\Gamma (\lambda B - A)^{-1} w(t, \lambda)\, d\lambda \right) .$$

Ora, per il Teorema dei residui, previa una applicazione del Teorema di Cauchy, il primo integrale coincide con $(1-t) y_0$.

Di qui,

$$By''(t) = (1-t)By_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma B(\lambda B - A)^{-1} w(t,\lambda)\, d\lambda =$$

$$= (1-t)Ax_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1} w(t,\lambda)\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1} A(\lambda B - A)^{-1} w(t,\lambda)\, d\lambda =$$

$$= (1-t)Ax_0 + Ay(t)\,, \qquad t \in]0,1[\,.$$

Infatti, $\int_\Gamma \lambda^{-1} w(t,\lambda)\, d\lambda = 0$, poichè $\lambda \to \lambda^{-1} w(t,\lambda)$ è olomorfa a destra di Γ e lungo Γ decresce come $1/|\lambda|^2$.

Così,

$$By''(t) = Ay(t) + (1-t)Ax_0\,, \qquad t \in]0,1[\,.$$

Infine, per la maggiorazione uniforme

$$\|\lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant C_1/|\lambda|^2$$

e dalle uguaglianze $w(0,\lambda) = w(1,\lambda) \equiv 0$ segue che anche le condizioni ai limiti sono soddisfatte.

Ciò prova il Teorema.

TEOREMA 3. *Nelle ipotesi del Teorema* 2, *se riesce* $Ax_1 = By_1$, *con* $y_1 \in D_A$, *allora il problema* (2) *relativo a* $f(t) = tAx_1$, *ha una soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega(t,\lambda)}{\partial t^2} - \lambda\omega(t,\lambda) = tx\,, & t \in]0,1[\,, \\ \omega(0,\lambda) = \omega(1,\lambda) = 0 \end{cases}$$

dove $x \in X$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \delta > 0$, ha una ed una sola soluzione stretta, tale che

$$\|\omega(t,\lambda)\|_X \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|}\|x\|_X\,.$$

(cfr. la prova del Teorema 2).

La dimostrazione è allora del tutto analoga a quella del Teorema 2.

COROLLARIO. *Se* $Ax_i = Byi$, $y_i \in D_A$, $(i = 0, 1)$ *e*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M/(1 + |\lambda|)\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$$

allora il problema (1) *ha una soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. In base alle assunzioni fatte, per i Teoremi 2 e 3, i due problemi al contorno

$$\begin{cases} By''(t) = Ay(t) + (1 - t)Ax_0\,, & t \in]0, 1[\,, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bz''(t) = Az(t) + tAx_1\,, & t \in]0, 1[\,, \\ z(0) = z(1) = 0\,, \end{cases}$$

hanno soluzioni strette $y(t)$ e $z(t)$.

Ma allora è facile riconoscere che la $x = x(t)$ definita da

$$x(t) = y(t) + z(t) + (1 - t)x_0 + tx_1\,, \qquad t \in]0, 1[$$

soddisfa il problema (1).

In effetti,

$$Bx''(t) = By''(t) + Bz''(t) =$$
$$= A[y(t) + z(t) + (1 - t)x_0 + tx_1] = Ax(t)\,, \qquad t \in]0, 1[$$

e $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$.

TEOREMA 4. *Sia B lineare continuo da Y a X e sia A lineare chiuso da Y a X, a dominio D_A denso in Y.*

Inoltre, esista l'inverso $(\lambda B - A)^{-1} \in L(X, Y)$ *per ogni λ complesso,* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, *con*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0.$$

Se $x_i = (A^{-1}B)^2 y_i$, $y_i \in D_A$, $(i = 0, 1)$, *allora il problema* (1) *ha una soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $w_1(t, \lambda)$, $w_2(t, \lambda)$ rispettivamente le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_1(t, \lambda)}{\partial t^2} - \lambda w_1(t, \lambda) = (1-t)Ay_0 \,, & t \in]0, 1[\,, \\ w_1(0, \lambda) = w_1(1, \lambda) = 0 \,, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial^2 w_2(t, \lambda) - \lambda w_2(t, \lambda) = tAy_1 \,, & t \in]0, 1[\,, \\ w_2(0, \lambda) = w_2(1, \lambda) = 0 \,. & \end{cases}$$

Poniamo (cfr. il Teorema 2):

$$x_i(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}(\lambda B - A)^{-1} w_i(t, \lambda)\, d\lambda \,, \qquad t \in]0, 1[\,, \ (i = 1, 2) \,.$$

Si ha:

$$\lambda^{-2}(\lambda B - A)^{-1}\frac{\partial^2 w_i(t, \lambda)}{\partial t^2} = \lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1} w_i(t, \lambda) + \lambda^{-2}(\lambda B - A)^{-1} f_i(t) \,,$$

dove $f_1(t) = (1-t)Ay_0$, $f_2(t) = tAy_1$.

In forza di tali uguaglianze, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, oltre che essere ben definite, risultano dotate di derivate seconde continue su $]0, 1[$, essendo lecito derivare sotto al segno di integrale.

D'altra parte, per il Teorema dei residui, in base alla uguaglianza ottenuta in [2], riesce

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}(\lambda B - A)^{-1}(1-t)Ay_0\, d\lambda = \left(\frac{d}{d\lambda}(\lambda B - A)^{-1}(1-t)Ay_0\right)_{\lambda=0} =$$

$$= -A^{-1}BA^{-1}(1-t)Ay_0 = -(1-t)A^{-1}By_0 \,.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}(\lambda B - A)^{-1} tAy_1\, d\lambda = -tA^{-1}By_1 \,.$$

Si ha poi

$$Bx''(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}B(\lambda B - A)^{-1}w_1(t,\lambda)\,d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}B(\lambda B - A)^{-1}(1-t)\,Ay_0\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}(\lambda B - A + A)(\lambda B - A)^{-1}w_1(t,\lambda)\,d\lambda + (1-t)Ax_0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}w_1(t,\lambda)\,d\lambda + Ax_1(t) + (1-t)Ax_0 =$$

$$= Ax_1(t) + (1-t)Ax_0\,, \qquad t \in]0,1[\,.$$

Inoltre, $Bx_2''(t) = Ax_2(t) + tAx_1$, $t \in]0,1[$.

Infine, $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = x_2(1) = 0$.

Segue che $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + (1-t)x_0 + tx_1$ riesce soluzione stretta del problema (1).

Assumiamo che $f(t)$ sia una funzione continua da $[0,1]$ a X, dotata di derivata prima continua su $[0,1]$.

Allora la funzione $\omega(t,\lambda)$, $t \in]0,1[$, Re $\lambda \geqslant \delta > 0$, definita da

$$\omega(t,\lambda) = \frac{1}{2}(1-\exp[-2\sqrt{\lambda}])^{-1}\Big\{[\exp[-t\sqrt{\lambda}] - \exp[-(2-t)\sqrt{\lambda}]]\,\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\lambda}\left([f(0) - \exp[-\sqrt{\lambda}]\,f(1)] + \int_0^1 \exp[-s\sqrt{\lambda}]\,f'(s)\,ds\right) +$$

$$+ [\exp[-(1-t)\sqrt{\lambda}] - \exp[-(1+t)\sqrt{\lambda}]]\,\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\lambda}[f(1) - \exp[-\sqrt{\lambda}]\,f(0)] - \int_0^1 \exp[-(1-s)\sqrt{\lambda}]\,f'(s)\,ds\right)\Big\} -$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\Big[2f(t) - \exp[-t\sqrt{\lambda}]\,f(0) - \int_0^t \exp[-(t-s)\sqrt{\lambda}]\,f'(s)\,ds -$$

$$- \exp[(t-1)\sqrt{\lambda}]\,f(1) + \int_t^1 \exp[(t-s)\sqrt{\lambda}]\,f'(s)\,ds\Big]$$

risulta soluzione stretta del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega(t,\lambda)}{\partial t^2} - \lambda\omega(t,\lambda) = f(t)\,, & t \in]0,1[\,, \\ \omega(0,\lambda\lambda) = \omega(1,\lambda) = 0 \end{cases}$$

(cfr. [5]).

Inoltre, su $\{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\lambda \geqslant \delta > 0\}$, riesce

$$\|\omega(t,\lambda)\|_X \leqslant C/|\lambda|\,,$$

dove C è una costante che dipende da f e che si può valutare dalla definizione esplicita di $\omega(t,\lambda)$.

TEOREMA 5. *Sia A un operatore lineare chiuso da Y a X a dominio D_A denso in Y, B sia limitato da Y a X ed esista* $(\lambda B - A)^{-1} \in L(X, Y)$ *per* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ *e*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\,.$$

Siano $x_0, x_1 \in D_A$ tali che $Ax_i = By_i$, $y_i \in D_A$, $(i = 0, 1)$, *e riesca*

$$f(t) = BA^{-1}g(t)\,, \qquad t \in [0,1]\,,$$

dove $g\colon [0,1] \to X$ è derivabile con derivata $g'(t)$ continua.

Allora il problema (2) *ha una soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\omega(t,\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma_1/2$, la soluzione stretta del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega(t,\lambda)}{\partial t^2} - \lambda\omega(t,\lambda) = g(t)\,, & t \in]0,1[\,, \\ \omega(0,\lambda) = \omega(1,\lambda) = 0\,. \end{cases}$$

Essa è data dalla formula che precede l'enunciato del Teorema, con $g(t)$ al posto di $f(t)$.

Definiamo

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}\omega(t,\lambda)\,d\lambda\,, \qquad t \in]0,1[\,.$$

Si ha

$$x''(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}(\lambda B - A)^{-1}[\lambda\omega(t, \lambda) + g(t)]\,d\lambda =$$

$$= A^{-1}g(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda B - A)^{-1}\omega(t, \lambda)\,d\lambda\,.$$

Di qui,

$$Bx''(t) = BA^{-1}g(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma B(\lambda B - A)^{-1}\omega(t, \lambda)\,d\lambda =$$

$$= f(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}(\lambda B - A + A)(\lambda B - A)^{-1}\omega(t, \lambda)\,d\lambda =$$

$$= f(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-1}\omega(t, \lambda)\,d\lambda + Ax(t) = Ax(t) + f(t)\,, \qquad t\in\,]0, 1[\,.$$

Inoltre, $x(0) = x(1) = 0$.

Per dimostrare il Teorema nella sua generalità notiamo, che i problemi

$$\begin{cases} By''(t) = Ay(t) + BA^{-1}[(1-t)Ay_0 + g(t)/2]\,, & t\in\,]0, 1[\,,\\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bz''(t) = Az(t) + BA^{-1}[tAy_1 + g(t)/2]\,, & t\in,\,]0, 1[\\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

ammettono soluzioni strette, in base proprio a quel che si è visto sopra. Allora

$$x(t) = y(t) + z(t) + (1-t)x_0 + tx_1\,, \qquad t\in\,]0, 1[\,,$$

è soluzione del problema (2).

TEOREMA 6. *Valgano per A e B le ipotesi del Teorema 5, cioè A sia limitato da Y a X, esista $(\lambda B - A)^{-1}\in L(X, Y)$ $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$, ma riesca*

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{X\to Y}\leqslant M\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda\leqslant 0\,.$$

Se $x_i = (A^{-1}B)^2 y_i$, $y_i\in D_A$, $(i = 0, 1)$, e

$$f(t) = (BA^{-1})^2 g(t)\,, \qquad t\in[0, 1]\,,$$

dove $g\colon [0,1] \to X$ *è dotata di derivata* $g'(t)$ *continua da* $[0,1]$ *a* X, *allora il problema* (2) *ha una soluzione stretta.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\omega(t, \lambda)$ la soluzione stretta del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega(t,\lambda)}{\partial t^2} - \lambda\omega(t,\lambda) = g(t)\,, & t \in]0,1[\,, \\ \omega(0,\lambda) = \omega(1,\lambda) = 0\,. \end{cases}$$

Allora si verifica facilmente (cfr. la prova del Teorema 5) che la $x(t)$ definita da

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-2}(\lambda B - A)^{-1}\omega(t,\lambda)\,d\lambda$$

soddisfa il problema (2) con condizioni ai limiti nulle.

D'altronde, se $y(t)$ e $z(t)$ sono le soluzioni strette dei problemi

$$\begin{cases} By''(t) = Ay(t) + (BA^{-1})^2[(1-t)Ay_0 + g(t)/2]\,, & t \in]0,1[\,, \\ y(0) = y(1) = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bz''(t) = Az(t) + (BA^{-1})^2[tAy_1 + g(t)/2]\,, & t \in]0,1[\,, \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

(che esistono, per quel che si è visto sopra), la $x(t)$ data da

$$x(t) = y(t) + z(t) + (1-t)x_0 + tx_1\,, \qquad t \in]0,1[\,,$$

soddisfa il problema (2).

Il Teorema è dimostrato.

Applicazioni.

Sia Ω un aperto limitato di R^n la cui frontiera $\partial\Omega$ è di classe C^∞. Con $A(x, D)$ denotiamo l'operatore differenziale definito da

$$A(x,D)u(x) = -\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)\,u(x)\,.$$

Si assume che a, a_i siano funzioni continue da $\bar{\Omega}$ a $\mathbf{C}$ mentre a_{ik} appartenga a $C^{(1)}(\bar{\Omega})$, con $a_{ik}(x)=\bar{a}_{ki}(x)$ e

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\gamma_i\bar{\gamma}_k \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^2 ,$$

μ essendo una costante positiva indipendente da $x\in\bar{\Omega}$.

Assumiamo ulteriormente che riesca $\operatorname{Re} a(x)\geqslant a_0>0$, $\forall x\in\bar{\Omega}$.

Sia, infine, $\alpha(x)$ una funzione $\geqslant 0$ e continua su $\bar{\Omega}$, che si annulla su un sottoinsieme $\partial\Omega_1$ di $\partial\Omega$.

Consideriamo il problema differenziale

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A(x,D)u(t,x)\,, & t\in\,]0,T[\,,\ x\in\Omega\,, \\ u(t,x)|_{\partial\Omega}=0\,, & \forall t\in\,]0,T[\,, \\ \lim\limits_{t\to 0+} u(t,x)=u_0(x)\,, & x\in\Omega\,, \\ \lim\limits_{t\to T-} u(t,x)=u_x(x)\,, & x\in\Omega\,. \end{cases}$$

Formuliamo (8) in forma astratta.

Con $L^2(\beta,\Omega)$, β essendo una funzione positiva su Ω, intendiamo lo spazio di Banach delle funzioni u misurabili da Ω a $\mathbf{C}$, tali che la norma

$$\|u\|_{L^2(\beta,\Omega)}=\Big(\int_\Omega \beta(x)^2|u(x)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

è finita.

Sia $u\in L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$. È allora chiaro che l'operatore B di moltiplicazione per $\alpha(x)$ è un operatore lineare continuo (addirittura un isomorfismo) da $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)$.

Inoltre, se definiamo l'operatore A mediante

$$(Au)(x)=A(x,D)\,u(x)\,,\qquad x\in\Omega\,,$$

$$D_A=\{u\in H^2(\Omega)\,|\,A(x,D)\,u(x)\in L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)\}\cap H_0^1(\Omega)\,,$$

A riesce un operatore lineare, a dominio denso, da $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)$.

Si è già visto (cfr. [2]) che se a_0 è opportuno, l'operatore $\sigma B + A$ è dotato di inverso limitato $(\sigma B + A)^{-1}$ da $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$ a $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ per ogni $\sigma \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} \sigma \geqslant 0$ e

$$\|(\sigma B + A)^{-1}\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)\to L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant M(1 + |\sigma|)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\sigma \geqslant 0 .$$

Ma allora $\lambda B - A$ ha inverso limitato da $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$ a $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ e

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)\to L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0 .$$

Pertanto, sono soddisfatte, se 1 appartiene all'insieme risolvente di $V(2T)$, tutte le ipotesi del Teorema 1 una volta che si ponga $Y = L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$, $X = L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

Quindi, nelle ipotesi suddette, se u_0, u_T appartengono a D_A, il problema astratto di determinare una funzione $u = u(t)$ tale che

$$\begin{cases} Bu''(t) = Au(t) , & t \in]0, T[, \\ u(t) \in D_A , & \forall t \in]0, T[, \\ \|u(t) - u_0\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 , \\ \|u(t) - u_T\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \xrightarrow[t\to T-]{} 0 , \end{cases}$$

ha una soluzione stretta.

Al medesimo risultato porta il Teorema 2, sotto l'ulteriore ipotesi che gli elementi u_0, u_T si possano esprimere come

$$u_0 = A^{-1}Bv_0 , \qquad u_T = A^{-1}Bv_T ,$$

dove v_0, $v_T \in D_A$, ma senza l'assunzione sul risolvente di $V(2T)$.

Dal Teorema 5 è facile dedurre che se $f(t, x)$ è esprimibile come

$$f(t, x) = \alpha(x) A(x, D)^{-1} g(t, x) ,$$

dove la funzione $g(t)$, definita da $g(t)(x) = g(t, x)$, è derivabile da $[0, T]$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$, con derivata continua, allora il problema non omogeneo

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha(x)\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A(x,D)\,u(t,x) + f(t,x)\,, & t\in\,]0,T[\,,\ x\in\Omega\,,\\ u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0\,, & \\ \lim\limits_{t\to 0+} \|u(t,\,\cdot\,) - u_0\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)}\, 0 = \,, & \\ \lim\limits_{t\to T-} \|u(t,\,\cdot\,) - u_T\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} = 0\,, & \end{cases}$$

ha una soluzione « stretta ».

Il Teorema 6 può essere utilizzato per rispondere alla questione di esistenza di una soluzione « stretta » per il problema (9) nel caso in cui $\alpha(x)$ si annulla anche all'interno di Ω, precisamente, su un insieme Ω_1 contenuto in Ω, di misura positiva.

Si è già visto in un lavoro precedente (cfr. [2]) che, sotto convenienti ipotesi, l'operatore $(\sigma B + A)^{-1}$ esiste, come operatore limitato da $L^2(\Omega)$ in sè per $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ e quindi $\lambda B - A$ ha inverso limitato in $L^2(\Omega)$ per $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Come dominio D_A di A viene scelto, in questo caso, lo spazio $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Vale inoltre

$$\|(\lambda B - A)^{-1}\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} \leqslant M\,, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\,.$$

Si applica, quindi, il Teorema 6, con $X = Y = L^2(\Omega)$.

In base a questo risultato, se

$$u_i(x) = \big(A(x,D)^{-1}\alpha(x)\big)^2 v_i(x)\,, \qquad v_i \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\,, \qquad (i = 0, 1)\,,$$

e

$$f(t,x) = \big(\alpha(x)\,A(x,D)^{-1}\big)^2 g(t,x)\,,$$

dove $g(t)$ ha derivata prima continua da $[0,T]$ a $L^2(\Omega)$, allora (9) ha una soluzione stretta.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ju. A. Dubinskii, *Su alcune equazioni differenziali operatoriali di ordine arbitrario* (in russo), Mat. Sbornik, **90** (132) (1973), pp. 3-22.

[2] A. Favini, *Sulle equazioni differenziali astratte degeneri*, in corso di stampa sui Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1974),

[3] A. Favini, *Su certe equazioni astratte del secondo ordine di tipo iperbolico*, Boll. U.M.I., **11**, no. 3 (1975) pp. 435-455.
[4] S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, ed. A.M.S. (1971).
[5] P. E. Sobolevskii, *On elliptical equations in a Banach space* (in russo), Diff. Uravn., **4**, no. 7 (1968), pp. 1346-48.

Manoscritto pervenuto alla redazione il 24 settembre 1974.