RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROSARIO STRANO

Sulla henselizzazione degli anelli aritmetici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 149-163

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__149_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 53 (1975)

Sulla henselizzazione degli anelli aritmetici.

Rosario Strano (*)

Introduzione.

In questo lavoro studiamo l'henselizzazione ${}^h(A, \mathfrak{a})$ di un anello ([1]) aritmetico A rispetto a un suo ideale $\mathfrak{a}$ (per la nozione di henselizzazione vedasi [9] oppure [6]). Gli anelli aritmetici sono stati introdotti da Fuchs [4] e sono quegli anelli il cui reticolo degli ideali è distributivo.

Nei n. 1 e 2 studiamo l'henselizzazione di un anello locale aritmetico: il risultato cui perveniamo è che l'henselizzazione ${}^hA$ di un anello locale aritmetico A è ancora un anello locale aritmetico ([2]) ed inoltre ogni ideale principale di ${}^hA$ è generato da un elemento di A, estendendo così un risultato stabilito da Nagata per gli anelli di valutazione ([14] teoremi 8 e 15).

Nel n. 3 studiamo l'henselizzazione di alcuni particolari anelli locali aritmetici, precisamente gli anelli locali aritmetici massimali e quasi-massimali. Troviamo che un anello locale aritmetico massimale è henseliano e che l'henselizzazione di un anello locale aritmetico quasi-massimale è ancora quasi-massimale. Le due proprietà però non si conservano nella discesa: esistono infatti anelli di valutazione non quasi-massimali la cui henselizzazione è massimale.

Nel n. 4 consideriamo l'henselizzazione di anelli aritmetici (non necessariamente locali); dimostriamo che l'henselizzazione di un anello

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Corso Italia 55, Catania.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

([1]) Tutti gli anelli considerati in questo lavoro sono commutativi e con 1.

([2]) Sembra, ma non è stato pubblicato, che questo risultato possa ottenersi per altra via (vedi [11], remarque pag. 127).

aritmetico, rispetto ad un ideale qualunque, è ancora un anello aritmetico; consideriamo infine alcuni particolari tipi di anelli aritmetici.

Per tutte le nozioni che non definiamo rimandiamo a [1].

1. In questo numero dimostriamo alcune proposizioni riguardanti le N-estensioni semplici di un anello locale aritmetico; il risultato principale è la proposizione 7 nella quale proviamo che se A è un anello locale aritmetico di ideale massimale $\mathfrak{m}$ e C è una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$ allora ogni ideale principale di C è generato da un elemento di A.

Per le nozioni di N-polinomio e di N-estensione di una coppia $(A, \mathfrak{a})$, con $\mathfrak{a}$ ideale di A, si veda [6] def. 1.2 e def. 2.2.

Richiamiamo anzitutto la definizione di anello locale aritmetico (vedi [10], prop. 1.1).

DEFINIZIONE 1. *Un anello locale A si dice aritmetico se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti*:

a) *ogni ideale finitamente generato di A è principale*;

b) *l'insieme degli ideali di A è linearmente ordinato per inclusione*

c) *l'insieme degli ideali principali di A è linearmente ordinato per inclusione.*

Ricordiamo inoltre la seguente caratterizzazione degli anelli locali aritmetici (vedi [17], teoremi 1 e 2).

TEOREMA 1. *Un anello locale A è aritmetico se e solo se esso soddisfa alla seguente condizione*:

ogni A-modulo di presentazione finita è somma diretta di moduli monogeni.

La proposizione che segue è immediata.

PROPOSIZIONE 1. *Sia A un anello locale aritmetico ed $\mathfrak{N}$ il suo nilradicale*; *allora $\mathfrak{N}$ è primo e $A/\mathfrak{N}$ è un anello di valutazione.*

Dimostriamo adesso due proposizioni utili per il seguito.

PROPOSIZIONE 2. *Sia A un dominio integralmente chiuso e K il suo corpo delle frazioni. Sia $f \in A[X]$ un polinomio monico irriducibile in $A[X]$. Allora $fA[X]$ è un ideale primo di $A[X]$ e $K[X]/fK[X]$ è il corpo delle frazioni di $A[X]/fA[X]$.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè A è un dominio integralmente chiuso segue che f è irriducibile in $K[X]$ (vedi [3], cap. V, § 1, n. 3, prop. 11) e quindi $K[X]/fK[X]$ è un corpo. Poniamo $S = A - \{0\}$; si ha

$$(A[X]/fA[X])_S = K[X]/fK[X] \; ;$$

sia $g(x) = a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ un elemento di $A[X]/fA[X] = A[x]$ dove x è l'immagine di X nell'omomorfismo canonico $A[X] \to A[X]/fA[X]$ ed n è il grado di f. Se $s \in S$ da $sg(x) = 0$ segue $g(x) = 0$ perchè $A[x]$ è un A-modulo libero di base $1, x, \ldots, x^{n-1}$ ed A è un dominio. Segue allora che l'omomorfismo canonico

$$A[x] \to (A[x])_S$$

è iniettivo da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 3. *Sia A un anello locale aritmetico,* $\mathfrak{m}$ *il massimale ed* $\mathfrak{N}$ *il nil radicale di A; se $f \in A[X]$ è un polinomio monico tale che la sua immagine $\bar{f} \in (A/\mathfrak{N})[X]$ è irriducibile allora posto*

$$A[x] = A[X]/fA[X]$$

si ha che $\mathfrak{N}[x]$ è primo ed è il nilradicale di $A[x]$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti si ha

$$A[x]/\mathfrak{N}[x] = A[X]/(fA[X] + \mathfrak{N}[X]) = ((A/\mathfrak{N})[X])/((\bar{f}A/\mathfrak{N})[X])$$

e per la proposizione 2 $A[x]/\mathfrak{N}[x]$ è un dominio; inoltre siccome ogni elemento di $\mathfrak{N}[x]$ è nilpotente segue che $\mathfrak{N}[x]$ è il nilradicale di $A[x]$.

Dimostriamo adesso alcune proposizioni riguardanti le N-estensioni di un anello locale.

PROPOSIZIONE 4. *Sia A un dominio locale,* $\mathfrak{m}$ *il suo massimale e C una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$. Allora esiste un N-polinomio irri-irriducibile $g \in A[X]$ tale che, detta D l'N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$ ottenuta mediante g, esiste un isomorfismo $C \xrightarrow{\sim} D$ che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\wr"] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D \end{tikzcd}$$

essendo $A \to C$ e $A \to D$ gli omomorfismi canonici.

DIMOSTRAZIONE. Sia f l'N-polinomio che determina C e supponiamo che sia $f = gh$ con $g, h \in A[X]$ monici; posto $g = a_0 + a_1 X + \dots$ e $h = b_0 + b_1 X + \dots$ si ha che $a_0 b_0 \in \mathfrak{m}$ ed $a_0 b_1 + a_1 b_0$ è invertibile da cui segue che $a_0 \in \mathfrak{m}$ ed a_1, b_0 invertibili oppure $b_0 \in \mathfrak{m}$ ed a_0, b_1 invertibili. Segue allora che uno dei due polinomi, per esempio g, è un N-polinomio mentre h è tale che il termine noto b_0 è invertibile. Sia D l'N-estensione semplice determinata da g: si ha un omomorfismo $C \to D$ indotto dall'omomorfismo

$$A[X]/fA[X] \to A[X]/gA[X];$$

si vede subito che l'immagine di h in D è invertibile da cui segue che l'omomorfismo $C \to D$ è un isomorfismo, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 5. *Sia A un anello locale aritmetico, $\mathfrak{m}$ il massimale ed $\mathfrak{N}$ il nilradicale di A; sia C una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$. Allora esiste un N-polinomio $g \in A[X]$ tale che l'immagine $\bar{g}$ di g in $(A/\mathfrak{N})[X]$ è irriducibile ed inoltre, detta D l'N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$ ottenuta mediante g, esiste un isomorfismo $C \xrightarrow{\sim} D$ che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\wr"] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D \end{tikzcd}$$

essendo $A \to C$ e $A \to D$ gli omomorfismi canonici.

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 4 esiste un N-polinomio $g \in A[X]$ tale che $\bar{g}$ è irriducibile e tale che, se $f \in A[X]$ è l'N-polinomio che determina C, allora le N-estensioni semplici di $(A/\mathfrak{N}, \mathfrak{m}/\mathfrak{N})$ determinate da $\bar{f}$ e da $\bar{g}$ sono isomorfe. Proviamo adesso che tali N-estensioni sono isomorfe rispettivamente a $C/\mathfrak{N}C$ e $D/\mathfrak{N}D$: infatti poniamo

$$A[x] = A[X]/fA[X] \qquad \text{e} \qquad S = 1 + (\mathfrak{m}, x)A[x];$$

si ha $C = (A[x])_S$; si vede facilmente che è $S \cap \mathfrak{N}[x] = \emptyset$ e quindi si ha $C/\mathfrak{N}C = (A[x]/\mathfrak{N}[x])_{\bar{S}}$ dove $\bar{S}$ è l'immagine di S in $A[x]/\mathfrak{N}[x]$; ma è

$$A[x]/\mathfrak{N}[x] = \big((A/\mathfrak{N})[X]\big)/\big((\bar{f}A/\mathfrak{N})[X]\big) = (A/\mathfrak{N})[\bar{x}]$$

dove $\bar{x}$ è l'immagine di X nell'omorfismo

$$(A/\mathfrak{N})[X] \to \big((A/\mathfrak{N})[X]\big)/\big((\bar{f}A/\mathfrak{N})[X]\big)$$

ed è subito visto che in $(A/\mathfrak{N})[\bar{x}]$ è $\bar{S} = 1 + (\mathfrak{m}, \bar{x})(A/\mathfrak{N})[\bar{x}]$ che è quanto si voleva.

Consideriamo adesso il diagramma

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d] & D \arrow[d] \\ C/\mathfrak{N}C \arrow[r, "\simeq"] & D/\mathfrak{N}D \end{tikzcd}$$

e consideriamo $\bar{f} \in (A/\mathfrak{N})[X]$; esso in $\mathfrak{m}(C/\mathfrak{N}C) = \mathfrak{m}(D/\mathfrak{N}D)$ ha la radice $\bar{x}$ e quindi si puo scrivere $\bar{f} = (X - \bar{x})\cdot\bar{h}$ in $(D/\mathfrak{N}D)[X]$; proviamo che $\bar{x}$ si può sollevare ad una radice di f in $\mathfrak{m}D$; notiamo anzitutto che è $\mathfrak{N}D = \operatorname{nil} D$ (vedi [6], cor. 8.4) e quindi $(D, \mathfrak{N}D)$ è una coppia henseliana; basta allora provare che $X - \bar{x}$ e $\bar{h}$ sono coprimi in $(D/\mathfrak{N}D)[X]$; ciò segue dal fatto che le rispettive immagini in $(D/\mathfrak{m}D)[X]$ sono coprime (vedi [9], prop. 1).

Dal fatto che f ha una radice in $\mathfrak{m}D$ segue, con lo stesso ragionae mento fatto in [6], lemma 3.4 che esiste un omomorfismo $C \to D$ ch- fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D \end{tikzcd}$$

e questo omomorfismo è unico (vedi [6], lemma 3.1).

In maniera analoga si vede che esiste un omomorfismo $D \to C$ da cui segue, come ragionamento standard, la tesi.

PROPOSIZIONE 6. *Sia A un anello locale aritmetico, $\mathfrak{m}$ il massimale ed $\mathfrak{N}$ il nilradicale di A; sia C una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$; sia b un elemento di $\mathfrak{N}C = \operatorname{nil} C$; allora esistono $a \in \mathfrak{N}$ e $c \notin \mathfrak{N}C$ tali che $b = ac$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre per la proposizione 5 che l'N-polinomio f che determina C sia tale che $\bar{f} \in (A/\mathfrak{N})[X]$ sia irriducibile.

Posto $A[x] = A[X]/fA[X]$ si ha per la proposizione 3 che $\mathfrak{N}[x]$ è primo in $A[x]$. Osserviamo inoltre che, detto n il grado di f, ogni elemento di $A[x]$ si scrive in uno e un sol modo nella forma

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

ed è $y \in \mathfrak{N}[x]$ se e solo se ogni $a_i \in \mathfrak{N}$: infatti se qualche a_i non sta in $\mathfrak{N}$, allora l'immagine di y in

$$A[x]/\mathfrak{N}[x] = \big((A/\mathfrak{N})[X]\big)/\big((\bar{f}A/\mathfrak{N})[X]\big) = (A/\mathfrak{N})[\bar{x}]$$

è non nulla.
Sia $b \in \mathfrak{N}C$; si può scrivere

$$b = \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}}{d}$$

con $a_i \in \mathfrak{N}$ e d invertibile in C; possiamo supporre che sia $d = 1$. Poichè A è aritmetico fra gli ideali principali a_iA ce n'è uno massimo; indichiamolo con aA; si ha

$$a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = a(a_0' + \ldots + a_{n-1}'x^{n-1})$$

con $a \in \mathfrak{N}$ e dove qualche a_i' è uguale ad 1; proviamo che

$$\frac{a_0' + \ldots + a_{n-1}'x^{n-1}}{1} \notin \mathfrak{N}C\ ;$$

infatti se così fosse sarebbe

$$s(a_0' + \ldots + a_{n-1}'x^{n-1}) \in \mathfrak{N}[x]$$

per qualche $s \in 1 + (\mathfrak{m}, x)A[x]$; ma essendo $\mathfrak{N}[x]$ primo ed $s \notin \mathfrak{N}[x]$ seguirebbe

$$a_0' + \ldots + a_{n-1}'x^{n-1} \in \mathfrak{N}[x]$$

ma ciò non è, perchè qualche a_i è uguale ad 1.

Le proposizioni sin qui dimostrate ci servono per provare la seguente proposizione che è il principale risultato del presente numero.

PROPOSIZIONE 7. *Sia A un anello locale aritmetico, $\mathfrak{m}$ il massimale di A e C una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$. Se b è un elemento di C esistono un elemento $a \in A$ ed un elemento c invertibile in C tali che $b = ac$.*

DIMOSTRAZIONE. Dapprima proviamo un lemma.

LEMMA. Le ipotesi siano come nella proposizione 7 e sia $\mathfrak{N}$ il nilradicale di A. Allora se $r \in A$, $r \notin \mathfrak{N}$ ed $s \in \mathfrak{N}C$ allora esiste $t \in \mathfrak{N}C$ tale che $s = rt$.

Infatti per la proposizione 6 possiamo porre $s = r' \cdot s'$ con $r' \in \mathfrak{N}$ ed $s' \notin \mathfrak{N}C$; essendo A aritmetico possiamo porre $r' = r \cdot u$ con $u \in \mathfrak{N}$, da cui segue $s = r \cdot us'$ con $us' \in \mathfrak{N}C$.

Torniamo adesso alla dimostrazione della proposizione. Sia dapprima $b \notin \mathfrak{N}C$; come abbiamo visto nella prova della proposizione 5 si ha che $C/\mathfrak{N}C$ è una N-estensione semplice di $A/\mathfrak{N}$ che, per la proposizione 1 è un anello di valutazione; per [14] teorema 15 esiste $a \in A$, $a \notin \mathfrak{N}$ ed i invertibile in C tali che, per le loro immagini in $C/\mathfrak{N}C$, sia $\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{\imath}$. È allora $b = ai + m$ con $m \in \mathfrak{N}C$ e per il lemma esiste $t \in \mathfrak{N}C$ tale che $m = at$ da cui segue $b = a(i + t)$ ed essendo $t \in \mathfrak{N}C$ segue $i + t$ invertibile. Sia adesso $b \in \mathfrak{N}C$. Allora per la proposizione 6 è $b = a \cdot b'$ con $a \in \mathfrak{N}$ e $b' \notin \mathfrak{N}C$; per il caso precedente è $b' = a' \cdot i$ con $a' \in A$ e i invertibile in C da cui segue $b = a \cdot a' \cdot i$.

2. In questo numero studiamo l'henselizzazione degli anelli locali aritmetici, estendendo ad essi dei risultati noti per gli anelli di valutazione (vedi [14], teoremi 8 e 15 oppure [16], teorema 1).

PROPOSIZIONE 8. *Sia $\varphi: A \to B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia una A-algebra fedelmente piatta. Allora se B è un anello locale aritmetico anche A è un anello locale aritmetico.*

DIMOSTRAZIONE. Intanto è noto che A è locale (vedi [2], cap. I, § 3, n. 5, prop. 8). Siano a e b due elementi di A; poichè B è aritmetico gli ideali aB e bB sono confrontabili: supponiamo che sia $aB \subset bB$; per la fedele piattezza segue allora $aA \subset bA$.

TEOREMA 2. *Sia A un anello, $\mathfrak{a}$ un ideale di A e $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$. Allora*

a) se B è un anello locale aritmetico ed $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Rad} A$ anche A è un anello locale aritmetico;

b) se A è un anello locale aritmetico anche B è un anello locale aritmetico;

c) se A e B sono anelli locali aritmetici ogni ideale principale di B è generato da un elemento di A.

DIMOSTRAZIONE. *a)* Segue dalla proposizione 8. Supponiamo adesso che A sia un anello locale aritmetico e sia $b \in B$; esiste allora una N-estensione C di $(A, \mathfrak{a})$ tale che $b \in C$; applicando la proposizione 7 segue che esiste un elemento $a \in A$ tale che $aC = bC$ da cui $aB = bB$; ogni ideale principale di B è quindi generato da un elemento di A

da cui segue che, essendo l'insieme degli ideali principali di A linearmente ordinato per inclusione, l'insieme degli ideali principali di B è pure linearmente ordinato per inclusione. Restano quindi provate b) e c)

COROLLARIO. *Sia A un anello locale aritmetico e $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a}$ ideale di A. Le applicazioni*

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}B & \mathfrak{c} \textit{ ideale di } A \\ \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \cap A & \mathfrak{b} \textit{ ideale di } B \end{array}$$

stabiliscono una biiezione fra l'insieme degli ideali di A e l'insieme degli ideali di B la quale conserva l'inclusione ed induce una biiezione fra l'insieme dei primi di A e l'insieme dei primi di B.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{b}$ un ideale di B; per il teorema 2 c) segue che esiste un ideale $\mathfrak{c}$ di A tale che $\mathfrak{c}B = \mathfrak{b}$; essendo B una A-algebra fedelmente piatta segue poi $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cap A$.

Per provare la seconda affermazione basta provare che se $\mathfrak{p}$ è un primo di A allora $\mathfrak{p}B$ è un primo di B: infatti per la fedele piattezza esiste un primo $\mathfrak{q}$ di B tale che $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ da cui, per quanto sopra, segue $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}B$.

COROLLARIO. *Sia A un anello locale e $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a}$ ideale di A. Allora A gode della proprietá che ogni A-modulo di presentazione finita è somma diretta di moduli monogeni se e solo se B gode della stessa proprietá.*

DIMOSTRAZIONE. Immediata dai teoremi 1 e 2.

3. In questo numero studiamo l'henselizzazione di anelli locali aritmetici massimali e quasi massimali. La nozione di anello di valutazione massimale è stata introdotta da Krull [8] mentre quella di anello di valutazione quasi-massimale è stata introdotta da Kaplanski [7]; entrambe sono state estese da Gill [5] agli anelli locali aritmetici.

DEFINIZIONE 2. *Un anello locale aritmetico A si dice massimale (risp. quasi-massimale) se per ogni famiglia $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ di ideali di A (risp. con $\bigcap_i \mathfrak{a}_i \neq 0$) e per ogni famiglia $\{x_i\}_{i\in I}$ di elementi di A soddisfacenti alla condizione*

$$x_i \equiv x_j(\mathfrak{a}_j) \quad \textit{per} \quad \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_j$$

esiste un elemento $x \in A$ *tale che*

$$x \equiv x_i(\mathfrak{a}_i) \qquad \textit{per ogni } i \in I \, .$$

OSSERVAZIONE. La definizione ora data di anello locale aritmetico massimale si può anche esprimere dicendo che l'anello locale aritmetico A è linearmente compatto nella topologia discreta. Per quest'ultima nozione si veda [18] dove è anche provata (teorema 4) l'equivalenza tra la nozione di anello di valutazione linearmente compatto (nella topologia discreta) e la nozione di anello di valutazione massimale dovuta a Krull.

Le seguenti due proposizioni, la cui dimostrazione è immediata, mettono in confronto le due nozioni di anello locale aritmetico massimale e quasi massimale.

PROPOSIZIONE 9. *Se* A *è un anello locale aritmetico allora* A *è quasi-massimale se e solo se* $A/\mathfrak{a}$ *è massimale per ogni ideale* $\mathfrak{a} \neq 0$ *di* A.

PROPOSIZIONE 10. *Se* A *è un anello di valutazione allora* A *è massimale se e solo se* A *è quasi-massimale e completo* (*nella topologia della valutazione*).

Nel caso di anelli locali aritmetici non integri le due nozioni coincidono come mostra la seguente proposizione dovuta a Gill [5].

PROPOSIZIONE 11. *Se* A *è un anello locale aritmetico non integro allora* A *è massimale se e solo se* A *è quasi-massimale.*

A titolo d'esempio ricordiamo che se A è un DVR (anello di valutazione discreta) allora A è quasi-massimale se e solo se è completo.

Ricordiamo infine il seguente teorema.

TEOREMA 3. *Sia* A *un anello locale*; *allora sono equivalenti*:

a) A *è un anello aritmetico quasi-massimale*;

b) *ogni* A*-modulo finitamente generato è somma diretta di moduli monogeni*;

se A *è un anello di valutazione a*) *e b*) *sono equivalenti a*

c) K/A *è un* A*-modulo iniettivo, essendo* K *il corpo delle frazioni di* A

DIMOSTRAZIONE. Per l'equivalenza tra *a*) e *b*) si veda [5]. Per l'equivalenza tra *a*) e *c*) si veda [13] teorema 4.

Proviamo adesso due teoremi riguardo alla henselianità degli anelli locali aritmetici massimali e quasi-massimali.

TEOREMA 4. *Sia A un anello locale aritmetico massimale ed $\mathfrak{a}$ un suo ideale; allora $(A, \mathfrak{a})$ è una coppia henseliana.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{N}$ il nilradicale id A; possiamo supporre $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{a}$; è noto (vedi [6], prop. 4.8) che $(A, \mathfrak{a})$ è una coppia henseliana se e solo se $(A/\mathfrak{N}, \mathfrak{a}/\mathfrak{N})$ è henseliana; ma $A/\mathfrak{N}$ è un anello di valutazione massimale e quindi è noto che $A/\mathfrak{N}$ è un anello locale henseliano (vedi [15], cap. D, F).

TEOREMA 5. *Sia A un anello locale aritmetico quasi-massimale ed $\mathfrak{a}$ un suo ideale; posto $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ si ha che B è un anello locale aritmetico quasi-massimale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{b}$ un ideale non nullo di B; per la proposizione 9 proviamo che $B/\mathfrak{b}$ è massimale; per il primo corollario al teorema 2 posto $\mathfrak{b} \cap A = \mathfrak{c}$ è $\mathfrak{c}B = \mathfrak{b}$ con $\mathfrak{c} \neq 0$; allora è

$$ {}^h(A/\mathfrak{c}, \mathfrak{a} + \mathfrak{c}/\mathfrak{c}) = B/\mathfrak{c}B = B/\mathfrak{b} $$

ma $A/\mathfrak{c}$ è massimale quindi per il teorema 3 è $A/\mathfrak{c} = B/\mathfrak{b}$ da cui la tesi.

La proprietà di massimalità non si conserva nella discesa nemmeno per anelli di valutazione: in [16] n. 4 esempio 2 viene portato l'esempio di un DVR non completo A la cui henselizzazione ${}^hA$ è completa.

Riguardo alla discesa della quasi-massimalità proviamo la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 12. *Sia A un anello locale aritmetico di rango* (3) *zero oppure un anello di valutazione di rango uno. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di A e $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$. Allora se B è quasi-massimale anche A è quasi-massimale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{c}$ un ideale di A non nullo; allora $A/\mathfrak{c}$ è un anello locale henseliano perchè $\sqrt{\mathfrak{c}}$ è il massimale di A; si ha quindi

$$ B/\mathfrak{c}B = {}^h(A/\mathfrak{c}, \mathfrak{a} + \mathfrak{c}/\mathfrak{c}) = A/\mathfrak{c} $$

da cui segue che $A/\mathfrak{c}$ è massimale e quindi per la proposizione 9 A è massimale.

---

(3) Per rango di un anello locale aritmetico A intendiamo il rango dell'anello di valutazione $A/\mathfrak{N}$ dove $\mathfrak{N}$ è il nilradicale di A.

I seguenti due esempi mostrano che la proposizione 12 non si estende al caso che il rango sia maggiore.

ESEMPIO 1. *Esempio di un anello di valutazione A di rango 2 e non quasi-massimale tale che ${}^hA$ è massimale.*

Sia R un corpo di caratteristica zero e poniamo $K = R(Y)((X))$ ed $L = R((Y, X))$ e sia v la valutazione di L il cui gruppo dei valori è $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e il cui anello è $B = R[[Y]] + XR((Y))[[X]]$; detto $\mathfrak{P}$ il primo di B di altezza 1 si ha

$$B/\mathfrak{P} = R[[Y]] \quad \text{e} \quad B_{\mathfrak{P}} = R((Y))[[X]]$$

che sono entrambi DVR completi e quindi massimali da cui segue che B è un anello di valutazione massimale (vedi [15], cap. D, prop. 8).

Consideriamo l'equazione in T: $T^2 + T + Y = 0$ la quale ha due radici c_1 e c_2 in B le quali non stanno in K.

In modo analogo a come fatto in [16] esempio 2 sia H un corpo massimale (rispetto all'inclusione) fra quelli che soddisfano alle condizioni:

$$K \subset H \subset L \quad \text{e} \quad c_1, c_2 \notin H \, .$$

Poniamo $A = B \cap H$ e $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap H$; in modo analogo a [16] esempio 2 si prova che L è algebrico su H da cui segue che $B/\mathfrak{P}$ è algebrico su $A/\mathfrak{p}$. Proviamo che è ${}^hA = B$; indichiamo con M il corpo delle frazioni di ${}^hA$ e indichiamo ancora con v la valutazione di M ottenuta per restrizione della valutazione di L; sia $\hat{M}$ il completamento di M rispetto alla topologia dedotta dalla valutazione v. Si ha

$$K \subset H \subset M \subset \hat{M} \subset L$$

ma essendo M separabilmente chiuso in $\hat{M}$ (vedi [15], cap. F, pag. 190) segue $M = \hat{M}$ cioè M è completo e quindi ${}^hA/\mathfrak{p}\,{}^hA$ è un DVR completo. Si ha

$$A/\mathfrak{p} \subset {}^hA/\mathfrak{p}\,{}^hA \subset B/\mathfrak{P}$$

ma essendo $B/\mathfrak{P}$ algebrico separabile su $A/\mathfrak{p}$ ed essendo $B/\mathfrak{P}$ il completamento di $A/\mathfrak{p}$ segue, sempre per [15] cap. F, pag. 190, ${}^hA/\mathfrak{p}\,{}^hA = B/\mathfrak{P}$ cioè ${}^hA/\mathfrak{p}\,{}^hA$ è un DVR completo.

Segue allora che ${}^hA$ è massimale ed essendo B una estensione immediata di ${}^hA$ (cioè con lo stesso corpo residuo e lo stesso gruppo dei valori) segue ${}^hA = B$.

Proviamo infine che A non è quasi-massimale: infatti $A/\mathfrak{p}$ è un DVR non completo; infatti se lo fosse sarebbe $A/\mathfrak{p} = R[[Y]]$ e quindi $A = R[[Y]] + \mathfrak{p}$ e quindi l'equazione $T^2 + T + Y = 0$ avrebbe soluzione in A.

ESEMPIO 2. *Esempio di un anello locale aritmetico A non integro di rango 1 e non quasi-massimale e tale che ${}^hA$ è massimale.*

Basta considerare l'anello A dell'esempio 1 e un ideale $\mathfrak{a}$ di A con $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a} \neq 0$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{p}$; l'anello $A/\mathfrak{a}$ è quello cercato.

A conclusione di questo numero enunciamo i seguenti corollari la cui dimostrazione è immediata.

COROLLARIO. *Sia A un anello locale e $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a}$ ideale di A. Se A gode della proprietá che ogni A-modulo finitamente generato è somma diretta di moduli monogeni allora anche B gode della stessa proprietá; il viceversa non vale.*

COROLLARIO. *Sia A un anello di valutazione e $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a}$ ideale di A. Sia K il corpo delle frazioni di A e L quello di B. Allora se K/A è un A-modulo iniettivo si ha che L/B è un B-modulo iniettivo; il viceversa non vale.*

4. In questo numero studiamo l'henselizzazione degli anelli aritmetici (non necessariamente locali). Richiamiamo anzitutto la definizione di anello aritmetico (vedi [11]).

DEFINIZIONE 3. *Un anello A si dice aritmetico se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:*

a) $A_\mathfrak{p}$ *è un anello locale aritmetico per ogni primo* $\mathfrak{p}$ *di* A;

b) $A_\mathfrak{p}$ *è un anello locale aritmetico per ogni massimale* $\mathfrak{p}$ *di* A;

c) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ *per* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ideali di* A;

d) $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *per* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ideali di* A.

Richiamiamo inoltre la nozione di anello ZPI (da altri detto « general ZPI ») che è una generalizzazione di anello di Dedekind (vedi [12], teorema 9.10).

DEFINIZIONE 4. *Un anello A si dice un anello ZPI se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti*:

a) *ogni ideale di A è prodotto di ideali primi*;

b) *A è un anello aritmetico noetheriano*;

c) *A è somma diretta di anelli di Dedekind e di speciali anelli primari, dove uno speciale anello primario è un anello locale nel quale ogni ideale è una potenza del massimale.*

PROPOSIZIONE 13. *Sia $\varphi: A \to B$ un omomorfismo di anelli tale che B sia una A-algebra fedelmente piatta. Allora se B è un anello aritmetico* (*risp. ZPI*) *anche A è un anello aritmetico* (*risp. ZPI*).

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A; allora esiste un primo $\mathfrak{P}$ di B tale che $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$; inoltre $B_{\mathfrak{P}}$ è una $A_{\mathfrak{p}}$-algebra fedelmente piatta e quindi, per la proposizione 8, $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale aritmetico. Inoltre ricordiamo che la noetherianità discende per fedele piattezza.

TEOREMA 6. *Sia A un anello e sia $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a}$ ideale di A. Si ha*:

a) *Se B è un anello aritmetico* (*risp. ZPI*) *ed $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Rad} A$, allora A è un anello aritmetico* (*risp. ZPI*);

b) *se A è un anello aritmetico* (*risp. ZPI*) *allora B è un anello aritmetico* (*risp. ZPI*).

DIMOSTRAZIONE. *a*) segue dalla proposizione 13. *b*) segue da [6] corollario 7.5 e dal teorema 2; l'affermazione relativa agli anelli ZPI segue da [6] corollario 6.9.

In [16] teorema 6 è stato provato che quando A e B sono anelli di Prüfer (cioè anelli aritmetici integri) allora ogni ideale di B è l'esteso di un ideale di A. Facciamo vedere ora con un esempio che tale proprietà non si estende al caso degli anelli aritmetici.

ESEMPIO 3. Siano A_1 e A_2 due anelli di valutazione discreta dello stesso corpo K con $A_1 \neq A_2$. Sia $A = A_1 \cap A_2$ e sia $B = {}^hA$ (come anello semilocale). Si ha

$$B = {}^h(A_1) \oplus {}^h(A_2)$$

e siano e_1 ed e_2 gli idempotenti relativi alla decomposizione di B; allora gli ideali $e_1 B$ ed $e_2 B$ sono due ideali primi di B entrambi al di sopra dello zero di A.

Esaminiamo adesso più a fondo l'henselizzazione degli anelli ZPI; premettiamo una proposizione.

PROPOSIZIONE 14. *Sia* $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ *ed* $\mathfrak{a}$ *un ideale di* A; *allora* $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ *è somma diretta degli anelli* ${}^h(A_i, \mathfrak{a}A_i)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $e_1, \ldots, e_n$ gli idempotenti relativi alla decomposizione di A; si vede subito che, se C è una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{a})$ allora $e_i C$ è una N-estensione semplice di $(A_i, \mathfrak{a}A_i)$ e viceversa se C_i è una N-estensione semplice di $(A_i, \mathfrak{a}A_i)$ allora $C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$ è una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{a})$.

PROPOSIZIONE 15. *Sia A anello ZPI ed* $\mathfrak{a}$ *un suo ideale con* $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Rad}\, A$; *si puó scrivere allora* $A = A_1 \oplus A_2$ *con* $\mathfrak{a}A_1 = 0$ *ed* A_2 *semilocale. É allora*

$$ {}^h(A, \mathfrak{a}) = A_1 \oplus {}^h(A_2) $$

dove ${}^h(A_2)$ *è somma diretta di anelli di valutazione discreta e di speciali anelli primari.*

DIMOSTRAZIONE. La proposizione segue subito dalla condizione *c*) della definizione 4 e dal fatto che in un anello di Dedekind ogni elemento non nullo è contenuto in un numero finito di ideali massimali.

COROLLARIO. *Sia A un anello e* $B = {}^h(A, \mathfrak{a})$ *con* $\mathfrak{a}$ *ideale di* A; *si ha*

a) *se B è un anello PIR (anello a ideali principali) ed* $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Rad}\, A$ *allora A è PIR.*

b) *se A è PIR allora B è PIR.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti dalle definizioni segue subito che un anello PIR è somma diretta di PID (domini a ideali principali) e di speciali anelli primari; quindi *b*) segue dalla proposizione 13. Per provare *a*) sia $\mathfrak{c}$ un ideale di A e consideriamo $\mathfrak{c}B$; dal fatto che $\mathfrak{c}B$ è principale, con lo stesso ragionamento fatto in [16], teorema 6.*b*), segue che anche $\mathfrak{c}$ è principale.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. ATIYAH - I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

[2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, cap. I-II, Hermann, Parigi (1961).

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, cap. V-VI, Hermann, Parigi (1964).

[4] L. FUCHS, *Über die Ideale aritmetitischer Ringe*, Comm. Math. Helv. **23** (1949), pp. 334-341.

[5] P. T. GILL, *Almost maximal valuation rings*, Journ. London Math. Soc., Second Series, **4** (1971), pp. 140-146.

[6] S. GRECO, *Henselization of a ring with respect to an ideal*, Trans. AMS, **144** (1969), pp. 43-65.

[7] I. KAPLANSKY, *Modules over Dedekind rings and valuation rings*, Trans. AMS, **72** (1952), pp. 327-340.

[8] W. KRULL, *Allgemeine Bewertungstheorie*, Jour. Reine Angew. Math., **167** (1931), pp. 160-196.

[9] J. P. LAFON, *Anneaux hensélien*, Bull. Soc. Math. de France, **91** (1963), pp. 77-107.

[10] J. P. LAFON, *Anneaux commutatifs sur lesquels tout module de type fini est somme direct de modules monogénes*, J. of Algebra, **17** (1971), pp. 575-591.

[11] J. P. LAFON, *Modules de présentation fini et de type fini sur un anneau arithmétique*, Symposia Math., **11** (1971), pp. 121-141.

[12] M. D. LARSEN - P. J. MCCARTHY, *Multiplicative theory of ideals*, Acad. Press, New York (1971).

[13] E. MATLIS, *Injective modules over Prüfer rings*, Nagoya Math. J., **15** (1959), pp. 57-69.

[14] M. NAGATA, *On the theory of henselian rings*, Nagoya Math. J., **5** (1953), pp. 45-57.

[15] P. RIBEMBOIM, *Théorie des valuations*, Les Presses de l'Univ. de Montréal (1964).

[16] R. STRANO, *Sulla henselizzazione di anelli di valutazione e di anelli di Prüfer*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, in corso di stampa.

[17] R. B. WARFIELD, *Decomposability of finitely presented modules*, Proc. AMS, **25** (1970), pp. 167-172.

[18] D. ZELINSKI, *Linearly compact modules and rings*, Am. J. of Math., **75** (1953), pp. 79-90.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1974.