RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO BIROLI

Sur un'équation d'évolution multivoque et non monotone dans un espace de Hilbert

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 313-331

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__313_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Sur un'équation d'évolution multivoque et non monotone dans un espace de Hilbert (*).

MARCO BIROLI (**)

SUMMARY - We give some existence-results for the solution of the problem (1.2).

1. Introduction et énoncés.

Soit H un espace de Hilbert separable, idéntifié avec son dual pour le produit scalaire (,) et indiquons par $| \ |$ la norme induite sur H par (,).

Soit $\varphi\colon H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe propre s.c.i. sur H et indiquons par $\partial\varphi\colon D(\partial\varphi) \to H$ le sousdifférentiel de la fonction φ (cfr. [4]).

Nous supposons que $\varphi(v) \geqslant 0$, $\forall v \in D(\varphi)$, $\varphi(0) = 0$ et que les ensembles du type $\{v | v \in H, \ \varphi(v) \leqslant C\}$ soient compacts dans H.

On a le résultat suivant, [4] pag. 128, 131, 132:

TH. 1. *Soit $f(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; H)$, $u_0 \in \overline{D(\varphi)}$; considérons le problème*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) & \text{p.p. sur } [0, T] \\ u(0) = u_0 \, . \end{cases}$$

(*) Lavoro effettuato nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

Le problème (1.1) *a une unique solution* $u(t)$, *telle que*

$$\int_\delta^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 dt \leqslant \int_0^T |f(t)|^2\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\int_0^\delta |f(t)|\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\,\mathrm{dist}\,(u_0, \mathbf{K}_0)$$

(où $\mathbf{K}_0 = \varphi^{-1}(0)$, $\delta > 0$)

$$|u(t) - v| + \Big(2\int_0^t \varphi\big(u(s)\big)\,ds\Big)^{\frac12} \leqslant 2\Big(|u_0 - v_0| + \int_0^t |f(s)|\,ds\Big)$$

p.p. sur $[0, T]$.

Si en plus $u_0 \in D(\varphi)$ *on a* $\varphi\big(u(t)\big) \in C(0, T)$ et

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac12} \leqslant \left(\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac12} + \varphi(u_0)^{\frac12} + C_1|u_0|^{\frac12} + C_2\,.$$

Rappellons maintenant la définition d'opérateur s.c.s., [2]:

Df. 1. *Soient* X, Y *deux espaces topologiques*; *on dit que un opérateur multivoque* B *de* X *dans* Y *est s.c.s. si*

(1) $\forall x \in X$ Bx *est un ensemble compact de* Y;

(2) $\forall x \in X$ *et un voisinage* V *de* Bx *il y a un voisinage* U *de* x *dans* X, *tel que* $y \in U \Rightarrow By \subset V$.

Nous dirons domaine de B *l'ensemble* $D(B) = \{x | x \in X,\ Bx \neq \emptyset\}$.

Nous rappellons aussi, [2]:

Th. 2. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques et* B *un opérateur multivoque de* X *dans* Y. *Si l'image* $R(B)$ *de* B *est un sous espace de* Y *compact et de Hausdorff, l'opérateur* B *est* s.c.s. *de* X *dans* Y *si, et seulement si son graphe est fermé dans* $X \times Y$.

Considérons maintenant un opérateur multivoque sur H

$$B(t): D\big(B(t)\big) \to H$$

défini p.p. sur $[0, T]$ et tel que

(I_1) Posé $\{v | v \in H,\ |\partial\varphi^0 v| \leqslant C_3,\ |v| \leqslant C_4\} = Q_{c_3,c_4}$, on a, pour presque tout $t \in [0, T]$, $D(B(t)) \supset Q_{c_3,c_4}$ et $B(t)$ s.c.s. sur Q_{c_3,c_4} de H dans H faible.

(I_2) Pour presque tout $t \in [0, T]$, $B(t)$ est un opérateur à valeurs convexes faiblement compactes.

(I_3) Il y a deux fonctions $\gamma(t)$, $\delta(t) \in \mathcal{L}^2(0, T)$ et une constante $a < 1$, telles que $\forall v \in D(\partial\varphi)$, $y \in B(t)v$ pour presque tout $t \in [0, T]$ on a

$$|y| \leqslant a|\partial\varphi^0(v)| + \gamma(t)|v| + \delta(t) .$$

($\partial\varphi^0(v)$ point de norme minima dans $\partial\varphi(v)$).

(I_4) Pour tout $v \in Q_{c_1,c_2}$, $v \to B(t)v$ est un'application multivoque mesurable de $[0, T]$ dans H faible.

Nous aurons aussi à prendre en considération les hypothèses suivantes:

(I_1') Posé $\{v | v \in H,\ \varphi(v) \leqslant C\} = Q_c$ on a, pour presque tout $t \in [0, T]$, $D(B(t)) \supset Q_c$ et $B(t)$ s.c.s. de H dans H faible sur Q_c.

(I_3') Il y a deux fonctions $\gamma(t) \in \mathcal{L}^4(0, T)$, $\delta(t) \in \mathcal{L}^2(0, T)$, telles que $\forall v \in D(\varphi)$ $y \in B(t)v$, pour presque tout $t \in [0, T]$, on a

$$|y| \leqslant \gamma(t)\sqrt{\varphi(v)} + \delta(t) .$$

(I_4') Pour tout $v \in D(\varphi)$, $v \to B(t)v$ est un'application multivoque mesurable de $[0, T]$ dans H faible.

(I_1'') On a $D(B(t)) \supset \overline{D(\varphi)}$ pour presque tout $t \in [0, T]$ et $B(t)$ est s.c.s. de H dans H faible sur $\overline{D(\varphi)}$.

(I_3'') Il y a deux fonctions $\gamma(t)$, $\delta(t) \in \mathcal{L}^2(0, T)$, telles que $\forall v \in \overline{D(\varphi)}$, $y \in B(t)v$, pour presque tout $t \in [0, T]$, on a

$$|y| \leqslant \gamma(t)|u| + \delta(t)$$

(I_4'') Pour tout $v \in \overline{D(\varphi)}$ $v \to B(t)v$ est un'application mesurable de $[0, T]$ dans H faible.

Remarque 1. On a que l'hypothèse (I_3) est plus faible que (I_3') et que l'hypothèse (I_3') est plus faible que (I_1'').

Considérons maintenant le problème

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0 & \text{p.p. sur } [0, T]\,, \\ \beta(t) \in B(t)u(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T]\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Le problème (1.2) a été traité sous les hypothèses (I_1'') (I_2), (I_3''), (I_4''), dans le cas $\partial\varphi = 0$, par A. Lasota et Z. Opial, [7], Ch. Castaing et M. Valadier, [8], et H. Valadier, [9] et, dans le cas $\partial\varphi \neq 0$, par H. Attouch et A. Damlamian (dans ce même travail ces Auteurs donnent des résultats d'existence dans le cas où on a, à la place de $\partial\varphi$, un opérateur maximal monotone général et H est à dimension finie).

Nous obtenons:

TH. 3. *Supposons* $u_0 \in D(\varphi)$ *et que les hypothèses* (I_1) (I_2) (I_3) (I_4) *soient valables; le problème* (1.2) *a alors une solution* $u(t)$ *avec* $(du/dt)(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; H)$, $\beta(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; H)$.

TH. 4. *Supposons* $u_0 \in \overline{D(\varphi)}$ *et que les hypothèses* (I_1') (I_2) (I_3') (I_4') *soient valables; le problème* (1.2) *a alors une solution* $u(t)$ *avec* $(du/dt)(t) \in \mathcal{L}^2(\delta, T; H)$, $\beta(t) \in \mathcal{L}^2(\delta, T; H)$ $(\delta > 0)$.

Indiquons maintenant par Tu_0 l'opérateur qui porte u_0 dans la solution $u(t)$ de (1.4); nous obtenons le résultat suivant:

TH. 5. (1) *Soient valables les hypothèses* (I_1) (I_2) (I_3) (I_4) *et soit* $\{u_{0n}\}$ *telle que*

$$\varphi(u_{0n}) \leqslant \text{Cst}\,, \qquad \lim u_{0n} = u_0 \qquad \textit{dans } H\,.$$

On peut alors extraire de $\{u_{0n}\}$ *une soussuite* $\{u_{0n_k}\}$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Tu_{0n_k} = Tu_0 \qquad \text{dans } C(0, T; H)\,.$$

(2) *Soient maintenant valables les hypothèses* (I_1') (I_2) (I_3') (I_4'); *alors l'opérateur* Tu_0 *est s.c.s. de* H *dans* $\mathcal{L}^2(0, T; H)$ *faible sur* $\overline{D(\varphi)}$.

Dans le § 2 on démontre quelque lemme preliminaire, dans le § 3 on démontre le Th. 3 par une méthode de point fixe d'applications compactes sugerée par F. E. Browder et appliquée à (1.2) aussi par

H. Attouch et A. Damlamian, [1] (le procédé par lequel ces Auteurs appliquent cette méthode diffère cependant complètement du nôtre).

Le Th. 4 est démontré dans le § 4 par régularisation à partir du résultat du Th. 3 et le Th. 5 est démontré dans le § 5.

Dans le § 6 on donne enfin des exemples d'application.

2. Lemmes preliminaires.

Dans tout ce paragraphe nous supposons valables les hypothèses (I_1) (I_2) (I_3) (I_4).

LEMME 1. *Soit* $\{u_n(t)\}$ *une suite telle que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \textit{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)\,.$$

Supposons qu'il y ait, $\forall n$, $v_n(t) \in B(t)u_n(t)$ *p.p. sur* $[0, T]$ *avec* $v_n(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$ *et que, p.p. sur* $[0, T]$,

$$\int_0^T |\partial\varphi^0(u_n(t))|^2\, dt + |u_n(t)|^2 \leqslant C_3\,.$$

Il y a alors une soussuite de $\{v_n(t)\}$, *que nous indiquons encore par* $\{v_n(t)\}$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}{}^* v_n(t) = v(t) \qquad \textit{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)$$

et $v(t) \in B(t)u(t)$ *p.p. sur* $[0, T]$.

La condition (I_3) nous assure que la suite $\{v_n(t)\}$ est bornée dans $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$; donc on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty}{}^* v_n(t) = v(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)\,. \tag{2.1}$$

Démontrons maintenant que $v(t) \in B(t)u(t)$ p.p. sur $[0, T]$.

Pour le théorème de Mazur il y a une combination convexe $g_n(t)$ des $v_m(t)$, $m \geqslant n$, telle que

$$\|g_n(t) - v(t)\|_{\mathfrak{L}^2(0,T;H)} \leqslant \frac{1}{n}\,. \tag{2.2}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = v(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)\,. \tag{2.3}$$

On peut alors supposer, sans perdre de généralité,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} g_n(t) = v(t)\,,\\ &\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

dans H p.p. sur $[0, T]$.

Fixons $\bar{t}$, pour lequel les (2.4) sont valables. De l'hypothèse on a, au plus après un'extraction de soussuite, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$|\partial\varphi^0(u_n(t))| \leqslant C_t\,.$$

On peut alors supposer, sans perdre de généralité,

$$\begin{aligned} &|\partial\varphi^0(u_n(\bar{t}))| \leqslant C_{\bar{t}}\,,\\ &|u_n(\bar{t})| \leqslant C_3 \leqslant C_{\bar{t}}\,. \end{aligned}$$

Rappellons maintenant que pour (I_1) l'opérateur multivoque $v \to B(\bar{t})v$ est s.c.s. sur

$$Q_{c_{\bar{t}},c_{\bar{t}}} = \{v | v \in H,\ |\partial\varphi^0(v)| \leqslant C_{\bar{t}},\ |v| \leqslant C_{\bar{t}}\}$$

de H forte dans H faible; alors pour tout voisinage faible V de $B(\bar{t})u(\bar{t})$, il y a un voisinage fort U de $u(\bar{t})$, tel que pour $v \in U \cap Q_{c_{\bar{t}},c_{\bar{t}}}$ $B(\bar{t})v \subset V$.

On peut trouver N tel que, pour $n \geqslant N$, $u_n(\bar{t}) \in U$ dont $v_n(\bar{t}) \in V$.

Supposons V fermé convexe; on a alors $g_n(\bar{t}) \in V$, $n \geqslant N$, dont $v(\bar{t}) \in V$.

Étant $B(\bar{t})u(\bar{t})$ faiblement compact dans H, il est l'intersection de ses voisinages faibles fermés convexes; on a donc $v(\bar{t}) \in B(\bar{t})u(\bar{t})$. Le rèsultat est ainsi démontré.

Lemme 2. *Soit $u(t)$ tel que $u(t) \in C(0, T; H)$* et

$$\int_0^T |\partial\varphi^0(u(t))|^2\, dt + |u(t)|^2 \leqslant C_4 \tag{2.5}$$

sur $[0, T]$.

Il y a alors une section $\beta(t)\in B(t)u(t)$ p.p. sur $[0, T]$, telle que $\beta(t)\in \mathcal{L}^2(0, T; H)$.

Démontrons d'abord ce lemme dans le cas où $u(t)$ est une fonction en escalier avec un nombre fini de valeurs x_i, avec $x_i\in D(\partial\varphi)$, $i=1, \ldots, N$.

Considérons un ensémble E faiblement fermé; les ensembles

$$E_i=\{t\in[0, T],\ B(t)x_i\cap E\neq\emptyset\}$$

sont mesurables; alors est aussi mesurable l'ensemble

$$\{t\in[0, T);\ B(t)u(t)\cap E\neq\emptyset\}\ .$$

La fonction multivoque $t\to\Gamma(t)=B(t)\,u\,(t)$ est donc mesurable de $[0, T]$ dans H faible; on peut alors affirmer, [5], que $\Gamma(t)$ a une section $\beta(t)$ mesurable dans H faible, donc dans H forte [E. Hille, R. S. Phillips. Functional analysis and semigroups - Am. Math. Soc. 1957, pag. 73].

De l'hypothèse (I_3) et de (2.5) on a alors $\beta(t)\in\mathcal{L}^2(0, T; H)$.

Supposons maintenant qu'il y ait $g(t)\in C(0, T; H)$ avec $g(t)\in \partial\varphi(u(t))$ p.p. sur $[0, T]$.

Il y a alors une suite de fonctions en escalier, qui ont un nombre fini de valeurs dans $D(\partial\varphi)$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t)=g(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^\infty(0, T; H)\ , \tag{2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t)=u(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^\infty(0, T; H)\ , \tag{2.7}$$

avec $g_n(t)\in\partial\varphi(u_n(t))$ p.p. sur $[0, T]$.

Pour chaque fonction $u_n(t)$ il y a une section $\beta_n(t)\in\mathcal{L}^2(0, T; H)$ et de (I_3) on a que la suite $\{\beta_m(t)\}$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(0, T; H)$.

On peut alors supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\,\beta_n(t)=\beta(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H)\ ; \tag{2.8}$$

du lemme 1 et de (2.7) on a, enfin, que $\beta(t)$ est une section de $B(t)u(t)$.

Démontrons maintenant le résultat dans le cas général.

Indiquons par $u_n(t)$ les fonctions $J_{1/n}u(t)$, $J_{1/n}$ résolvante de $\partial\varphi$;

on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)\,, \tag{2.9}$$

$$u_n(t) \in C(0, T; H)\,, \tag{2.10}$$

$$|u_n(t)| \leqslant \operatorname*{Max}_{[0,T]} |u(t)|\,. \tag{2.11}$$

Posons $g_n(t) = \partial\varphi_{1/n}(u(t)) \in \partial\varphi(J_{1/n}u(t)) = \partial\varphi(u_n(t))$, $\partial\varphi_{1/n}$ régularisée de Yoshida de $\partial\varphi$; on a

$$g_n(t) \in C(0, T; H) \tag{2.12}$$

$$|g_n(t)| \leqslant |g(t)| \tag{2.13}$$

p.p. sur $[0, T]$.

Pour chaque fonction $u_n(t)$ il y a une section $\beta_n(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$ et de (I_3), (2.11), (2.13) la suite $\{\beta_n(t)\}$ est bornée dans $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$. On peut alors supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \beta_n(t) = \beta(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H) \tag{2.14}$$

et du lemme 1 et (2.9) $\beta(t)$ est une section de $B(t)u(t)$.

Le résultat est ainsi démontré.

Considérons maintenant la problème:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases} \tag{2.15}$$

où $u_0 \in D(\varphi)$.

Pour le Th. 1, si $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$, (2.15) a une unique solution $u(t)$.

Indiquons par $S\colon f(t) \to u(t)$; on a

LEMME 3. *L'opérateur S est continu de $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ faible dans $C(0, T; H)$.*

Considérons une suite $\{f_n(t)\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} f_n(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)\,. \tag{2.16}$$

Considérons les problèmes

$$(2.17_n)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi\big(u(t)\big) \ni f_n(t) & \text{p.p. sur } [0, T]\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Tout problème (2.17_n) a une solution $u_n(t)$ avec

$$(2.18)\qquad \int_0^T \left|\frac{du_n}{dt}(t)\right| dt \leqslant C_5$$

et, posé $g_n(t) = -(du_n/dt)(t) + f(t) \in \partial\varphi\big(u_n(t)\big)$ p.p. sur $[0, T]$,

$$(2.19)\qquad \int_0^T |g_n(t)|^2\, dt \leqslant C_5$$

dont

$$(2.20)\qquad \varphi\big(u_n(t)\big) \leqslant C_6 \quad \text{p.p. sur } [0, T]\,.$$

De (2.18) (2.19) (2.20), il y a une soussuite $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$, telle que

$$(2.21)\qquad \lim_{n_k\to\infty} u_{n_k}(t) = u(t) \quad \text{dans } C(0, T; H)\,.$$

$$(2.22)\qquad \lim_{n_k\to\infty}{}^{*} g_{n_k}(t) = g(t) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(0, T; H)\,.$$

De (2.21) et (2.22) on a $g(t) \in \partial\varphi\big(u(t)\big)$ p.p. sur $[0, T]$.
On peut donc affirmer que $u(t)$ est solution du problème

$$(2.23)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi\big(u(t)\big) \ni f(t)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

De (2.21) et de l'unicité de la solution de (2.23) on a alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } C(0, T; H)\,.$$

Le résultat est ainsi démontré.

REMARQUE 1. L'application du Th. de Mazur dans la démonstration du lemme 1 est semblable a celle faite par Amerio L., Prouse G.: « On the non linear wave equations ... » I, II. Rend. Acc. Naz. Lincei, 44, 1968.

3. Démonstration du Th. 3.

Considèrons le problème

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Considérons l'opérateur $S(f(t)) = u(t)$ défini au § 2, lemme 3 et l'application multivoque

$$F(f(t)) = B\big(t, S(f(t))\big) .$$

Considérons l'application F sur l'ensemble de $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$

$$\tilde{Q}_{c_6} = \Big\{f(t)|f(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H),\ \Big(\int_0^T |f(t)|\cdot dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_6\Big\} .$$

Observon sque du Th. 1 on a facilement, posé $g(t) = -(du/dt)(t) + f(t) \in \partial\varphi(u(t))$ p.p. sur $[0, T]$,

$$\Big(\int_0^T |g(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\int_0^T |f(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\varphi(u_0)} \leqslant C_5 + K_1 .$$

Toujours du Th. 1 on a aussi

$$|u(t)| \leqslant C_6 T^{\frac{1}{2}} + K_2 .$$

De l'hypothèse (I_3) on a alors, $\forall Z(t) \in F(f(t))$, $f(t) \in \tilde{Q}_{c_1}$,

$$\Big(\int_0^T |Z(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant a' C_6 + K_3 C_6 T^{\frac{1}{2}} + K_4 , \qquad (a' < 1) .$$

Soit C_6 tel que

$$(1-\delta)\,C_6 > \frac{K_4}{1-a'} \qquad (0<\delta<1)\,.$$

Supposons

$$T \leqslant \left(\frac{(1-a')\delta}{K_3}\right)^2 = \tilde{\delta}\,,$$

où $\tilde{\delta}$ dépende de a, a', $\gamma(t)$, mais ne dépende pas de $\varphi(u_0)$.

On a alors

$$(3.2) \qquad \int_0^T |Z(t)|^2\,dt \leqslant a'\,C_6 + (1-a')\,\delta C_6 + (1-a')(1-\delta)\,C_6 \leqslant C_6\,.$$

Indiquons encore par F l'opérateur induit sur $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ par $F(f(t))$.

On peut alors affirmer que $F\colon \tilde{Q}_{c_6} \to \tilde{Q}_{c_6}$. De (I_2) (I_3) et du lemme 2 on a aussi que, $\forall f \in \tilde{Q}_{c_6}$, $F(f)$ est compact non vide dans $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ faible.

De lemmes 1, 2, 3 on a que l'image de $\tilde{Q}_{c_6}$ par F est faiblement fermée et donc faiblement compacte dans $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ faible et que le graphe de F dans $\tilde{Q}_{c_6} \times \mathfrak{L}^2(0, T; H)$, où $\tilde{Q}_{c_6}$ et $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ sont considérés munis de la topologie faible de $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$, est fermé.

On peut alors conclure que F est s.c.s. de $\tilde{Q}_{c_6}$ muni de la topologie faible de $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ dans $\mathfrak{L}^2(0, T; H)$ faible.

Pour des théorèmes bien connus sur le points fixes des application multivoques s.c.s. (cfr. F. E. Browder: «Non linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces». Proceedings of the Symposium on Nonlinear Functional Analysis, Am. Math. Soc. 1968 Chicago, vol. II, à paraître), on peut alors affirmer qu'il y a $\beta(t) \in \tilde{Q}_{c_6}$, telle que

$$\beta(t) \in B\big(t, S(\beta(t))\big)$$

p.p. sur $[0, T]$.

On peut donc affirmer que $u(t) = S(\beta(t))$ est solution du problème

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0 & \text{p.p. sur } [0, T]\,, \\ \beta(t) \in B(t, u(t)) & \text{p.p. sur } [0, T]\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Le théorème est ainsi démontré si $T \leqslant \tilde{\delta}$. Supposons maintenant que $T > \tilde{\delta}$; on peut alors diviser l'interval $[0, T]$ par N intervals, qui ont seulement les extrêmes en commun, $[t_i, t_{i+1}]$ $i = 0, 1, \dots, N-1$, $t_0 = 0$ $t_N = T$.

Pour la partie precedente, (3.3) a une solution $u(t)$ sur $[0, t_1]$ et du Th. 1 $u(t_1) \in D(\varphi)$.

On peut alors prolonger $u(t)$ à une solution sur $[0, t_2]$ et en répétant ce procédé, on arrive à démontrer que (3.3) a une solution sur $[0, T]$.

Toujours du Th. 1 on a aussi

$$\int_0^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 dt \leqslant C_7 , \qquad \int_0^T |\beta(t)|^2 dt \leqslant C_7 ,$$

où C_7 dépende seulement de a, $\gamma(t)$, $\varphi(u_0)$.

4. Démonstration du Th. 4.

Démontrons le théorème dans le cas $T \leqslant (\|\gamma(t)\|_{\mathfrak{L}^4(0,T)})^{-1}$; on peut passer après au cas général comme dans le Th. 3.

Soit $\{u_{0n}\}$ une suite dans $D(\varphi)$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_{0n} = u_0 \qquad \text{dans } H . \tag{4.1}$$

Considérons les problèmes

$$\tag{4.2_n} \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0 & \text{p.p. sur } [0, T] , \\ \beta(t) \in B(t)u(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] , & \\ u(0) = u_{0n} . & \end{cases}$$

Du Th. 3 le problème (4.2_n) a une solution $u_n(t)$ avec $(du_n/dt)(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$, $\beta_n(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$. Du Th. 1 on a

$$\left(|u_n(t)|^2 + \int_0^T \varphi(u_n(t))\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_8 + \int_0^T \gamma(t) \sqrt{\varphi(u_n(t))}\, dt +$$
$$+ \int_0^T \delta(t)\, dt \leqslant T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \gamma^4(t)\, dt\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \varphi(u_n(t))\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + C_9 \leqslant a'' \left(\int_0^T \varphi(u_n(t))\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + C_9$$

où $a'' < 1$.

On a alors

$$|u_n(t)| \leqslant C_{10} \quad \text{p.p. sur } [0, T] \tag{4.3}$$

$$\int_0^T \varphi(u_n(t))\, dt \leqslant C_{10}\,. \tag{4.4}$$

De (4.4) on peut supposer, sans perdre de généralité, qu'il y a une siute $\{t_m\}$ avec

$$\lim_{m\to\infty} t_m = 0 \tag{4.5}$$

$$\varphi(u_n(t_m)) \leqslant C_m \tag{4.6}$$

où les C_m dépendent de m, mais ne dépendent pas de n.

De (4.6) et du Th. 3 on a

$$\int_{t_m}^T \left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|^2 dt \leqslant C'_m\,, \tag{4.7}$$

$$\int_{t_m}^T |\beta_n(t)|^2\, dt \leqslant C'_m \tag{4.8}$$

et, posé $g_n(t) = -(du_n/dt)(t) - \beta_n(t)$,

$$\int_{t_m}^T |g_n(t)|^2\, dt \leqslant C''_m\,. \tag{4.9}$$

De (4.7) (4.8) (4.9) on peut supposer, sans perdre de généralité, que, $\forall \delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } C(\delta, T; H)\,, \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(\delta, T; H)\,, \tag{4.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \beta_n(t) = \beta(t) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(\delta, T; H)\,, \tag{4.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} g_n(t) = g(t) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(\delta, T; H)\,. \tag{4.13}$$

De (4.10) et (4.13) on a

$$g(t) \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T] . \tag{4.14}$$

De (4.10), (4.12) et du lemme 1 on a

$$\beta(t) \in B(t)u(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] . \tag{4.15}$$

De (4.1) (4.11) (4.12) (4.13) (4.14) et (4.15) on a que $u(t)$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0 & \text{p.p. sur } [0, T] , \\ \beta(t) \in B(t)u(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] . \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Le résultat est ainsi démontré.

5. Démonstration du Th. 5.

Démontrons la partie (a).
Considérons le problème

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0 & \text{p.p. sur } [0, T] , \\ \beta(t) \in B(t)u(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] , \\ u(0) = u_{0n} . \end{cases} \tag{5.1$_n$}$$

Du Th. 3 le problème (5.1_n) a une solution $u_n(t)$, telle que

$$\int_0^T \left| \frac{du_n}{dt}(t) \right|^2 dt \leqslant C_{12} , \tag{5.2}$$

$$\int_0 |\beta_n(t)|^2 dt \leqslant C_{12} , \tag{5.3}$$

où C_{12} ne dépende pas de n; on a donc, posé $g_n(t) = -(du_n/dt)(t) - \beta_n(t) \in \partial\varphi(u_n(t))$,

$$\int_0^T |g_n(t)|^2\, dt \leqslant C_{13} \tag{5.4}$$

où C_{13} ne dépende pas de n.

De (5.2) (5.3) (5.4) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty}{}^* \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H)\,, \tag{5.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^* \beta_n(t) = \beta(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H)\,, \tag{5,6}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^* g_n(t) = g(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H)\,. \tag{5.7}$$

De (5.3) et du Th. 1 on a aussi

$$\varphi(u_n(t)) \leqslant C_{14} \qquad \text{p.p. sur } [0, T] \tag{5.8}$$

où C_{14} ne dépende pas de n.

De (5.2) et (5.8) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } C(0, T; H)\,. \tag{5.9}$$

De (5.7) et (5.9) on a

$$g(t) \in \partial\varphi(u(t)) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\,. \tag{5.10}$$

De (5.6), (5.9) et du lemme 1 on a

$$\beta(t) \in B(t)u(t) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\,. \tag{5.11}$$

De (5.5) (5.6) (5.7) (5.10) (5.11) on a que $u(t)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + \beta(t) \ni 0 & \text{p.p. sur } [0, T] , \\ \beta(t) \in B(t)u(t) & \text{p.p. sur } [0, T] , \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Le résultat est ainsi démontré.

Démontrons maintenant la partie (*b*).

Il suffit démontrer le résultat pour u_0, qui varie dans un ensemble borné E de $\overline{D(\varphi)}$. Du Th. 2 et du Th. 4 on a que Tu_0 et $R(Tu_0)_{u_0 \in E}$ sont bornés dans $\mathcal{L}^2(0, T; H)$.

Par le même procédé utilisé dans la démonstration du Th. 4 on a que, si

$$\lim_{n\to\infty} u_{0n} = u_0 \qquad \text{dans } H , \tag{5.12}$$

on peut extraire de $\{Tu_{0n}\}$ une soussuite, que nous indiquons encore par $\{Tu_{0n}\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} Tu_{0n} = Tu_0 \qquad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H) . \tag{5.13}$$

On peut donc affirmer que Tu_0 et $R(Tu_0)_{u_0 \in E}$ sont compact dans $\mathcal{L}^2(0, T; H)$ faible et que le graphe de Tu_0 est fermé dans $E \times \mathcal{L}^2(0, T; H)$, où E est muni de la topologie forte de H et $\mathcal{L}^2(0, T; H)$ de la topologie faible.

On peut alors affirmer, pour le Th. 2, que Tu_0 est s.c.s. de $\overline{D(\varphi)}$ muni da la topologie forte de H dans $\mathcal{L}^2(0, T; H)$ muni de la topologie faible.

6. Un exemple.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec frontière Γ régulière, $H = \mathcal{L}^2(\Omega)$, $j(r)$ une fonction convexe propre s.c.i. sur $\mathbb{R}$ avec $j(r) \geq 0$ $\forall r \in D(j)$, $j(0) = 0$.

Posons

$$\varphi(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{grad} u(x)|^2\,dx+\int_\Omega j(u(x))\,dx\,, \\ \qquad\qquad \forall u(x)\in H_0^1(\Omega)\,,\ u(x)\in D(j) \quad \text{p.p. sur } \Omega\,, \\ +\infty \qquad \text{ailleurs}\,.\end{cases}$$

On alors a

$$\partial\varphi(u)=-\Delta u(x)+\partial j(u(x))$$

avec

$$D(\partial\varphi)=\{u(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ \exists g(x)\in\partial j(u(x)) \text{ avec } g(x)\in \mathcal{L}^2(\Omega)\}\,.$$

Considérons deux fonctions $c(t, y)$, $d(t, y)$ sur $[0, T]\times\overline{D(j)}$, qui satisfont les hypothèses suivantes:

(6.1) $c(t, y)\big(d(t, y)\big)$ est une fonction continue en t et s.c.i (s.c.s.) en y sur $[0, T]\times\overline{D(j)}$ et $\forall y\in\overline{D(j)}$ on a p.p. sur $[0, T]$

$$c(t, y)\leqslant d(t, y)\,,$$

$$|c(t, y)|\,, \qquad |d(t, y)|\leqslant\gamma(t)j(y)^{\frac{1}{2}}+\delta(t)\,,$$

où $\gamma(t)\in\mathcal{L}^4(0, T)$, $\delta(t)\in\mathcal{L}^2(0, T)$.

Soit $u_0(x)\in\mathcal{L}^2(\Omega)$ avec $u_0(x)\in\overline{D(j)}$ p.p. dans Ω, $f(t, x)\in\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$.

Considérons le problème

(6.2) $$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)-\Delta u(t, x)+\partial j(u(t, x))+h(t, x)\ni f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\times\Omega$$

$$c(t, u(t, x))\leqslant h(t, x)\leqslant d(t, u(t, x)) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\times\Omega$$

$$u(t, x)|_\Gamma=0 \qquad \text{p.p. sur } [0, T]$$

$$u(0, x)=u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega.$$

On peut appliquer le Th. 4 et conclure que ce problème a une solution.

On peut particulariser le problème.

Posons $j(r) = e^r$ et considérons une fonction $q(r)$ définie sur $\mathbb{R}$ et localement à variation bornée.

La function $q(r)$ a au plus une infinité numerable de points de discontinuité, qui sont du 1-er type.

Soit σ un point de discontinuité et posons

$$q^+(\sigma) = \operatorname{Max}\left\{\lim_{r\to\sigma+} q(r), \lim_{r\to\sigma-} q(r)\right\},$$

$$q^-(\sigma) = \operatorname{Min}\left\{\lim_{r\to\sigma+} q(r), \lim_{r\to\sigma-} q(r)\right\},$$

$$q^+(r) = \begin{cases} q(r) & \text{dans les points de continuité ,} \\ q^+(r) & \text{das les points de discontinuité .} \end{cases}$$

$$q^-(r) = \begin{cases} q(r) & \text{dans les points de continuité .} \\ q^-(r) & \text{dans les points de discontinuité .} \end{cases}$$

Supposons enfin

$$(6.1') \qquad |q(r)| \leqslant Ce^{r/2} \qquad \text{p.p.}$$

Posons $c(y) = q^-(y)$ $d(y) = q^+(y)$; on peut vérifier facilement que les hypothèses (6.1) sont valables et que notre problème devient

$$(6.3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) + \exp[u(t, x)] + h(t, x) = f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\times\Omega.$$

$$q^-\big(u(t, x)\big) \leqslant h(t, x) \leqslant q^+\big(u(t, x)\big) \qquad \text{p.p. sur } [0, T]\times\Omega,$$

$$u(t, x)|_\Gamma = 0 \qquad \text{p.p. sur } [0, T],$$

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega$$

Remarque 1. La deuxième condition du problème (6.3), posé

$$\tilde{q}(r) = \begin{cases} q(r) & \text{dans les points de continuité ,} \\ [q^-(r), q^+(r)] & \text{dans les points de discontinuité ,} \end{cases}$$

peut être écrite

$$h(t, x) \in \tilde{q}(u(t, x)) .$$

Remarque 2. L'A. a dejà donné un résultat d'existence pour des problèmes du type (6.3), sans aucune hypothèse du type (6.1′), mais sous l'hypothèse $q(r) \cdot r \geqslant 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Attouch - A. Damlamian, *On multivalued evolution equation in Hilbert spaces*, Isr. Journ. Math., **12** (1972), 373-390.
[2] Ch. Berge, *Espaces topologiques, fonctions multivoque*, Dunod, Paris, 2a edition (1959).
[3] M. Biroli, *Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations d'évolution non linéaires et non monotones*, I, II, III, Rend. Acc. Naz. Lincei, à paraitre.
[4] H. Brézis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non linear partial differential equations*, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. Zarantonello, Academic Press (1971).
[5] Ch. Castaing, *Sur les multiapplications mésurables*, R.I.R.O., **1** (1967), 91-126.
[6] Ch. Castaing - M. Valadier, *Equations différentielles multivoques dans les espaces localement convexes*, C. R. Acad. Sc., **266** (1968), 985-987.
[7] A. Lasota - Z. Opial, *An application of the Kakutani - Ky-Fan theorem in the theory of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sc., **13** (1965), 781-786.
[8] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).
[9] M. Valadier, *Existence globale pour les équations différentielles multivoques*, C. R. Acad. Sc., **272** (1971), 474-477.

Sunto - Si danno alcuni risultati sulla esistenza della soluzione del problema (1.2).

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 dicembre 1973.