RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Sulla interpolazione di certi spazi di Sobolev con peso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 223-249

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__223_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Sulla interpolazione di certi spazi di Sobolev con peso.

ANGELO FAVINI (*)

SUMMARY - This paper is about the problem of characterizing interpolation spaces between Sobolev-spaces with weight; we use both the complex method of interpolation and the real one.

First, (see Theorem 3.2), we give a condition on the ratio λ_0/λ_1 of two weight-functions entailing that

$$[W_p^k(\lambda_0;\,U),\,W_p^k(\lambda_1;\,U)]_\theta = W_p^k(\lambda_\theta;\,U)\,,$$

with $k\in\mathbf{N}$, $1<p<+\infty$, $\lambda_\theta=\lambda_0^{1-\theta}\lambda_1^\theta$, $\theta\in\,]0,1[$.

In the Theorem 3.3 we characterize, for a class of functions λ_i, the space $[W_p^k(\lambda_0;\,U),\,L^p(\lambda_1;\,U)]_\theta$.

We obtain this result making use of the techniques of Lions-Magenes, (see [7], pp. 194-198).

Then we consider some particular spaces with weight.

In Paragraph 4 we look into the spaces $W_\alpha^{k,p}(U)$ with $U=\mathbf{R}^n$ or $U=\mathbf{R}_+^n$ that B. Hanouzet introduced in [5] and we prove that

$$[W_{\alpha_0}^{k,p}(U),\,W_{\alpha_1}^{k,p}(U)]_\theta = W_{\alpha_\theta}^{k,p}(U)\,,$$

with $\alpha_\theta=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$.

In Paragraph 5 we prove that

$$[V_{\alpha_0}^{k,p}(O),\,V_{\alpha_1}^{k,p}(O)]_\theta = V_{\alpha_\theta}^{k,p}(O)\,,$$

where O is a bounded open set satisfying the regularity conditions of [7], p. 38, or $O=\mathbf{R}_+^n$.

Furthermore we obtain, through a suitable partition of unity, that $V_{\alpha_\theta}^{k,p}(O)$

(*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico « S. Pincherle » - Piazza di Porta San Donato, 5 - 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1972.

is also a space of means, that is:

$$(V^{k,p}_{\alpha_0}(O),\, V^{k,p}_{\alpha_1}(O))_{\theta,p} = V^{k,p}_{\alpha\theta}(O)\,.$$

Then we prove that, if α_θ is different from certain numbers, connected with the Theorem of Hardy, then

$$[\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(O)]_\theta = \mathring{W}^{k,p}_{\alpha\theta}(O)\,.$$

On the other hand, we show too that

$$(\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(O))_{\theta,p} = \mathring{W}^{k,p}_{\alpha\theta}(O)$$

and, when α_0, α_1 satisfy a further condition,

$$(W^{k,p}_{\alpha_0}(O),\, W^{k,p}_{\alpha_1}(O))_{\theta,n} = W^{k,p}_{\alpha\theta}(O)\,.$$

Analoguos results for the real interpolation of the spaces $W^{k,p}_{\alpha}(O)$ are in [2, 3].

In the proof of Theorem 6.3, we again use the techniques of Lions-Magenes and the result we obtain becomes a theorem of them when O is bounded, $p=2$, $\alpha_0=k$, $\alpha_1=0$, (see [7], Th. 7.1, p. 194).

In fact, in this case $\mathring{W}^{k,2}_{\alpha_0}(O) = V^{k,2}_{\alpha_0}(O) = \Xi^k(O)$.

Finally, we remind that some problems about the interpolation of certain Sobolev-spaces with weight and L^p-spaces were studied by H. Triebel (see [13]), but they deal with Hilbert spaces.

1. Spazi d'interpolazione.

Se F è uno spazio di Banach, denotiamo con $l^p(F)$, $p \in]1, +\infty[$, lo spazio delle successioni $n \to f_n$ di potenza p-esima sommabili a valori in F, $n \in I$, con la norma

$$\|(f_n)\|_{l^p(F)} = \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \|f_n\|^p_F\Big)^{1/p}\,.$$

Se A_0, A_1 sono spazi di Banach immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico separato $\mathcal{E}$, $p_i \in]1, +\infty[$ $(i=0,1)$ e $0<\theta<1$, si denota con $s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ lo spazio degli $a \in$ $\in A_0 + A_1$ tali che $a = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n u_n$, con

$$(\exp[n\theta]u_n) \in l^{p_0}(A_0)\,, \qquad (\exp[n(\theta-1)]u_n) \in l^{p_1}(A_1)\,,$$

normato con

$$\|a\|_s = \inf_{a=\sum_n u_n} \left\{\max\left(\|(\exp[n\theta]u_n)\|_{l^{p_0}(A_0)}, \|(\exp[n(\theta-1)]u_n)\|_{l^{p_1}(A_1)}\right)\right\} .$$

Si dice che $a \in A_0 + A_1$ appartiene a $\mathbf{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ se

$$a = v_{0,n} + v_{1,n} , \qquad n \in I$$

e

$$(\exp[n\theta]v_{0,n}) \in l^{p_0}(A_0) , \qquad (\exp[n(\theta-1)]v_{1,n}) \in l^{p_1}(A_1) .$$

Si pone

$$\|a\|_{\mathbf{s}} = \inf_{a=v_{0,n}+v_{1,n}} \left\{\max\left(\|(\exp[n\theta]v_{0,n})\|_{l^{p_0}(A_0)}, \|(\exp[n(\theta-1)]v_{1,n})\|_{l^{p_1}(A_1)}\right)\right\} .$$

Sia $s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ che $\mathbf{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ risultano spazi di Banach e Lions e Peetre hanno provato (cfr. [9], p. 18) che essi coincidono, con equivalenza delle norme. Inoltre, tali spazi non mutano se si sostituisce la costante e con un $k > 1$ arbitrario, (cfr. [9], *p.* 20). Scriveremo

$$s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1) = \mathbf{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1) = (A_0, A_1)_{\theta,p} ,$$

dove $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Tale scrittura è motivata dal fatto che $s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1) = s(p, \theta, A_0; p, \theta-1, A_1)$ se, appunto, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Gli spazi $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ sono gli spazi d'interpolazione reale (o di medie), per la seguente proprietà:

Se A_i, B_i $(i = 0, 1)$ sono spazi di Banach e T è un operatore lineare da $A_0 + A_1$ a $B_0 + B_1$, continuo da A_i a B_i $(i = 0, 1)$, allora T è continuo da $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ a $(B_0, B_1)_{\theta,p}$ e

$$\|T\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}\to(B_0,B_1)_{\theta,p}} \leq \|T\|^{1-\theta}_{A_0\to B_0} \|T\|^{\theta}_{A_1\to B_1} ,$$

(cfr. [9], p. 12).

Della proprietà sopra richiamata godono anche i cosiddetti spazi d'interpolazione complessa $[A_0, A_1]_\theta$, $\theta \in]0, 1[$; un elemento x di $A_0 + A_1$ appartiene a $[A_0, A_1]_\theta$ se $x = f(\theta)$, dove f è una funzione continua da $\bar{\Omega}$ a $A_0 + A_1$ $(\Omega = \{z \in \mathbf{C}, 0 < \operatorname{Re} z < 1\})$, olomorfa da Ω

a $A_0 + A_1$, $f(it) \in A_0$, $f(1+it) \in A_1$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $t \to f(it)$ (rispettivamente, $t \to f(1+it)$) essendo continua e limitata da $\mathbf{R}$ a A_0 (rispettivamente, da $\mathbf{R}$ a A_1).

Si dice che una tale f appartiene allo spazio $\mathcal{H}(A_0, A_1)$. $[A_0, A_1]_\theta$ viene munito della norma

$$\|x\|_{[A_0,A_1]_\theta} = \inf_{f(\theta)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(A_0,A_1)} = \inf_{f(\theta)=x} \{\max(\sup_t \|f(it)\|_{A_0}, \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1})\},$$

e risulta uno spazio di Banach.

Notiamo (cfr. [7], pp. 103-104; [12], p. 122) che si ottengono gli stessi spazi $[A_0, A_1]_\theta$ se si suppone che $f(z)$ sia a crescenza polinomiale in A_0 per $z = it$, e in A_1 per $z = 1 + it$.

2. Spazi di Sobolev generalizzati.

Sia U un aperto di $\mathbf{R}^n$ e λ sia una funzione C^∞, > 0 su U (funzione-peso).

Con $L^p(\lambda; U)$, $1 \leqslant p < +\infty$, si denota l'insieme delle funzioni u misurabili da U a $\mathbf{C}$ tali che

$$\|u\|_{L^p(\lambda;U)} = \Big(\int_U \lambda^p(x)|u(x)|^p dx\Big)^{1/p} < +\infty .$$

Allora lo spazio di Sobolev generalizzato $W_p^l(\lambda; U)$, $l \in I^+$, $1 \leqslant p < +\infty$, è definito come l'insieme di tutte le funzioni φ misurabili da U a $\mathbf{C}$ per cui le derivate deboli $D^\alpha \varphi$ esistono fino all'ordine l e appartengono a $L^p(\lambda; U)$; cioè,

$$\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda;U)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha \varphi\|^p_{L^p(\lambda;U)}\Big)^{1/p} < +\infty , \qquad (\text{cfr. [14]}).$$

Qui $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un multi-indice, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $D^\alpha = \partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}/(\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n})$.

$W_p^l(\lambda; U)$ è uno spazio di Banach $\forall p \in [1, +\infty[$.

Con $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\lambda; U)$ si intende il completamento di $C_0^\infty(U) = \mathcal{D}(U)$ rispetto alla norma di $W_p^l(\lambda; U)$.

Considereremo anche spazi di Sobolev con funzioni-peso diverse al variare dell'ordine di derivazione, per cui cioè, $D^\alpha \varphi \in L^p(\lambda_{|\alpha|}; U)$, $|\alpha| \leqslant l$.

Denotiamo tali spazi con $W_p^l(\lambda_0, \ldots, \lambda_l; U)$.

3. Risultati di interpolazione.

La dimostrazione delle due seguenti Proposizioni è completamente analoga a quella data in [1] e perciò ne diamo solo l'enunciato.

PROPOSIZIONE 3.1. *Siano* λ_0, λ_1 *funzioni-peso su* $U \subseteq \mathbf{R}^n$. *Se* $p \in [1, +\infty[$ *e* $(\lambda_0(x))^{1-\theta}(\lambda_1(x))^\theta = \lambda_\theta(x)$, $0 < \theta < 1$, *allora*

$$[W_p^l(\lambda_0;\, U),\, W_p^l(\lambda_1;\, U)]_\theta \hookrightarrow W_p^l(\lambda_\theta;\, U)\;;$$

$$[\mathring{W}_p^l(\lambda_0;\, U),\, \mathring{W}_p^l(\lambda_1;\, U)]_\theta \hookrightarrow \mathring{W}_p^l(\lambda_\theta;\, U)\,.$$

PROPOSIZIONE 3.2. *Se* $\lambda_0^{(i)}$, $\lambda_1^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, 1$, *sono funzioni-peso su* $U \subseteq \mathbf{R}^n$, $p \in [1, +\infty[$ *e* $\lambda_\theta^{(i)}(x) = (\lambda_0^{(i)}(x))^{1-\theta}(\lambda_1^{(i)}(x))^\theta$, $0 < \theta < 1$, *allora*

$$[W_p^l(\lambda_0^{(0)}, \ldots, \lambda_0^{(l)};\, U),\, W_p^l(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_1^{(l)};\, U)]_\theta \hookrightarrow W_p^l(\lambda_\theta^{(0)}, \ldots, \lambda_\theta^{(l)};\, U)\;;$$

$$[\mathring{W}_p^l(\lambda_0^{(0)}, \ldots, \lambda_0^{(l)};\, U),\, \mathring{W}_p^l(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_1^{(l)};\, U)]_\theta \hookrightarrow \mathring{W}_p^l(\lambda_\theta^{(0)}, \ldots, \lambda_\theta^{(l)};\, U)\,.$$

TEOREMA 3.1. *Nelle ipotesi della* Proposizione 3.1,

$$\big(W_p^l(\lambda_0;\, U),\, W_p^l(\lambda_1;\, U)\big)_{\theta,p} \hookrightarrow W_p^l(\lambda_\theta;\, U)\;;$$

$$\big(\mathring{W}_p^l(\lambda_0;\, U),\, \mathring{W}_p^l(\lambda_1;\, U)\big)_{\theta,p} \hookrightarrow \mathring{W}_p^l(\lambda_\theta;\, U)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Il metodo di prova è analogo a quello di [9] a proposito degli spazi L^p.

Se $\varphi \in \big(W_p^l(\lambda_0;\, U),\, W_p^l(\lambda_1;\, U)\big)_{\theta,p} = S$, allora, per definizione,

$$\varphi(x) = v_{0,n}(x) + v_{1,n}(x)\,, \qquad x \in U\,,\; n \in I\,,$$

$$(\exp[n\theta]\, v_{0,n}) \in l^p\big(W_p^l(\lambda_0;\, U)\big)\,, \qquad (\exp[n(\theta-1)]\, v_{1,n}) \in l^p\big(W_p^l(\lambda_1;\, U)\big)\,.$$

Ciò implica che

$$D^\alpha\varphi(x) = D^\alpha v_{0,n}(x) + D^\alpha v_{1,n}(x)\,, \qquad |\alpha| \leq l\,,$$

e quindi, poichè $\mathbf{C} = (\mathbf{C}, \mathbf{C})_{\theta,p}$,

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leqslant C_1 \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n |\exp[n\theta] D^\alpha v_{0,n}(x)|^p \right)^{(1-\theta)/p} \cdot \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n |\exp[n(\theta-1)] D^\alpha v_{1,n}(x)|^p \right)^{\theta/p}.$$

Pertanto

$$\int_U \lambda_\theta^p(x) |D^\alpha \varphi(x)|^p dx \leqslant C_1^p \int_U \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \lambda_0^p(x) |\exp[n\theta] D^\alpha v_{0,n}(x)|^p \right)^{1-\theta} \cdot \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \lambda_1^p(x) |\exp[n(\theta-1)] D^\alpha v_{1,n}(x)|^p \right)^\theta dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1^p \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \int_U \lambda_0^p(x) |\exp[n\theta] D^\alpha v_{0,n}(x)|^p dx \right)^{1-\theta} \cdot \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \int_U \lambda_1^p(x) |\exp[n(\theta-1)] D^\alpha v_{1,n}(x)|^p dx \right)^\theta.$$

Così

$$\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_U \lambda_\theta^p(x) |D^\alpha \varphi(x)|^p dx \leqslant C_2 \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \int_U \lambda_0^p(x) |\exp[n\theta] D^\alpha v_{0,n}(x)|^p dx \right) \right)^{1-\theta} \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \int_U \lambda_1^p(x) |\exp[n(\theta-1)] D^\alpha v_{1,n}(x)|^p dx \right) \right)^\theta =$$

$$= C_2 \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \| \exp[n\theta] v_{0,n} \|_{W_p^l(\lambda_0;\, U)}^p \right)^{1-\theta} \cdot \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \| \exp[n(\theta-1)] v_{1,n} \|_{W_p^l(\lambda_1;\, U)}^p \right)^\theta.$$

Segue

$$\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda_\theta;U)} \leqslant C \left\| \left(\exp[n\theta] v_{0,n}\right) \right\|_{l^p(W_p^l(\lambda_0;U))}^{1-\theta} \left\| \left(\exp[n(\theta-1)] v_{1,n}\right) \right\|_{l^p(W_p^l(\lambda_1;U))}^{\theta}$$

e quindi, (cfr. [9], p. 12 e p. 18),

$$\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda_\theta;U)} \leqslant C \|\varphi\|_s .$$

La seconda affermazione è provata nella stessa maniera.

Se si considera, infatti, una $\varphi \in \mathfrak{D}(U) \subset \mathring{W}_p^l(\lambda_\theta; U)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, per essa vale, come prima,

$$\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda_\theta; U)} \leqslant C \|\varphi\|_{(\mathring{W}_p^l(\lambda_0; U), \mathring{W}_p^l(\lambda_1; U))} .$$

Poichè $\mathfrak{D}(U)$ è denso in $\big(\mathring{W}_p^l(\lambda_0; U), \mathring{W}_p^l(\lambda_1; U)\big)_{\theta,p}$, (essendo denso in $\mathring{W}_p^l(\lambda_0; U) \cap \mathring{W}_p^l(\lambda_1; U)\big)$, ciò è sufficiente per concludere la prova.

COROLLARIO. *Nelle ipotesi della* Proposizione 3.2,

$$\big(W_p^l(\lambda_0^{(0)}, \ldots, \lambda_0^{(l)}; U), W_p^l(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_1^{(l)}; U)\big)_{\theta,p} \hookrightarrow W_p^l(\lambda_\theta^{(0)}, \ldots, \lambda_\theta^{(l)}; U) ;$$
$$\big(\mathring{W}_p^l(\lambda_0^{(0)}, \ldots, \lambda_0^{(l)}; U), \mathring{W}_p^l(\lambda_1^{(l}, \ldots, \lambda_1^{(0)}; U)\big)_{\theta,p} \hookrightarrow \mathring{W}_p^l(\lambda_\theta^{(0)}, \ldots, \lambda_\theta^{(l)}; U) .$$

TEOREMA 3.2. *Se λ_0, λ_1 sono funzioni-peso su U tali che $|D^\alpha(\lambda_0/\lambda_1)| \leqslant$ $\leqslant C_\alpha(\lambda_0/\lambda_1)$, $|\alpha| \leqslant l$, allora*

$$[W_p^l(\lambda_0; U), W_p^l(\lambda_1; U)]_\theta = W_p^l(\lambda_\theta; U) ;$$
$$[\mathring{W}_p^l(\lambda_0; U), \mathring{W}_p^l(\lambda_1; U)]_\theta = \mathring{W}_p^l(\lambda_\theta; U) ,$$

con equivalenza delle norme.

DIMOSTRAZIONE. In forza della Proposizione 3.1, basta provare che $W_p^l(\lambda_\theta; U) \hookrightarrow [W_p^l(\lambda_0; U), W_p^l(\lambda_1; U)]_\theta = W$.

Sia dunque $\varphi \in W_p^l(\lambda_\theta; U)$. Definiamo

$$\big(\phi(z)\big)(x) = \big(\lambda_0(x)/\lambda_1(x)\big)^{z-\theta}\varphi(x) , \qquad z \in \bar{\Omega} ,\ x \in U .$$

Se $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$, vale

$$\lambda_0(x)\, D^\alpha\big(\phi(it)\big)(x) = \lambda_0(x) \sum_{\substack{\beta \\ 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i}} L_\beta^{(0)}(x, t)\big(\lambda_0(x)/\lambda_1(x)\big)^{it-\theta} D^{\alpha-\beta}\varphi(x) ,$$

dove $L_\beta^{(0)}(x, t)$ è un polinomio rispetto a $t \in \mathbf{R}$, a coefficienti funzioni continue di x (cfr. [7], p. 197).

Inoltre, per la condizione su λ_0/λ_1, vale

$$\lambda_0(x) |D^\alpha\big(\phi(it)\big)(x)| \leqslant P_0(t)\, \lambda_\theta(x) \sum_{\substack{\beta \\ 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i}} |D^{\alpha-\beta}\varphi(x)| ,$$

dove $P_0(t)$ è un polinomio in t.

Dunque

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int_U \lambda_0^p(x)|D^\alpha(\phi(it))(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant P_1(t)\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda_\theta;\,U)},$$

$P_1(t)$ essendo un polinomio in $t\in\mathbf{R}$.

Segue che $t\to\phi(it)$ è continua a crescenza polinomiale da $\mathbf{R}$ a $W_p^l(\lambda_0;\,U)$.

$$\lambda_1(x)D^\alpha(\phi(1+it))(x)=\lambda_1(x)\sum_{\substack{\beta\\0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i}}L_\beta^{(1)}(x,t)\big(\lambda_0(x)/\lambda_1(x)\big)^{1-\theta+it}D^{\alpha-\beta}\varphi(x),$$

$L_\beta^{(1)}(x,t)$ essendo un polinomio rispetto a $t\in\mathbf{R}$, a coefficienti funzioni continue di x. Come prima si ottiene

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int_U \lambda_1^p(x)|D^\alpha(\phi(1+it))(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant P_2(t)\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda_\theta;\,U)},$$

$P_2(t)$ polinomio in $t\in\mathbf{R}$.

Dunque, la applicazione $t\to\phi(1+it)$ risulta continua a crescenza polinomiale da $\mathbf{R}$ a $W_p^l(\lambda_1;\,U)$.

A questo punto, con lo stesso ragionamento usato per provare il Teorema 4.2 di [1], facendo uso, cioè, di risultati di Calderon e di Lions, si deduce che

$$\phi(\theta)=\varphi\in[W_p^l(\lambda_0;\,U),\,W_p^l(\lambda_1;\,U)]_\theta.$$

Per dimostrare la seconda affermazione, notiamo che, se $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, allora $\phi(it)\in\mathring{W}_p^l(\lambda_0;\,U)$, $\varphi(1+it)\in\mathring{W}_p^l(\lambda_1;\,U)$ e quindi

$$\|\varphi\|_{[\mathring{W}_p^l(\lambda_0:U),\mathring{W}_p^l(\lambda_1:U)]_\theta}\leqslant C\|\varphi\|_{W_p^l(\lambda_\theta:U)}.$$

Poichè $\mathcal{D}(U)$ è denso in $\mathring{W}_p^l(\lambda_\theta;\,U)$, ciò prova quanto asserito.

Osservazione. Se $x\in\mathbf{R}^n$ oppure $x\in\mathbf{R}_+^n$, dove

$$\mathbf{R}_+^n=\{x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n,\,\xi_n>0\},\qquad |x|=(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)^{\frac12},$$

allora le

$$\lambda_i(x) = (1 + |x|^2)^{\alpha_i/2}, \qquad \alpha_i \in \mathbf{R}, \ i = 0, 1,$$

soddisfano le condizioni del Teorema 3.2.

È chiaro poi che anche funzioni-peso del tipo

$$\lambda_i(x) = (1 + |x|^2)^{\alpha_i/2} P(x), \qquad i = 0, 1,$$

dove $P(x)$ è un'altra funzione-peso arbitraria, rientrano nel dominio di validità del Teorema 3.2.

Notiamo infine che se $|\lambda_i^{(\alpha)}(x)| \leqslant C_\alpha \lambda_i(x)$, $|\alpha| \leqslant l$, $i = 0, 1$, allora anche la funzione $\lambda(x) = \lambda_0(x)\lambda_1(x)$ soddisfa una analoga condizione.

Come esempio, si può considerare

$$\lambda(x) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^s \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right)^r, \qquad r \cdot s > 0.$$

TEOREMA 3.3. *Siano λ_0, λ_1 funzioni-peso su U tali che*

$$|\lambda_i^{(\alpha)}(x)| \leqslant C\lambda_i(x), \qquad |\alpha| < k, \ x \in U, \ i = 0, 1.$$

Allora, se $\lambda_\theta(x) = (\lambda_0(x))^{1-\theta}(\lambda_1(x))^\theta$, $1 < p < +\infty$ e $W^{k,p}(U)$ denota, come d'uso, lo spazio $W_p^k(1; U)$,

$$[W_p^k(\lambda_0; U), L^p(\lambda_1; U)]_\theta = \{u \in \mathcal{D}'(U); \lambda_\theta u \in [W^{k,p}(U), L^p(U)]_\theta\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per provare la nostra affermazione faremo uso delle tecniche che si trovano nel trattato di Lions-Magenes, (cfr. [7], pp. 194-198).

Supponiamo senz'altro $U \subseteq \mathbf{R}$, poichè il discorso non muta nel caso di $\mathbf{R}^n$, $n > 1$.

Se $u \in [W_p^k(\lambda_0; U), L^p(\lambda_1; U)]_\theta$, allora, per definizione di $[A, B]_\theta$, esiste $f \in \mathcal{H}(W_p^k(\lambda_0; U), L^p(\lambda_1; U))$ tale che $f(\theta) = u$. Poniamo

$$(g(z))(x) = (\lambda_0(x))^{1-z}(\lambda_1(x))^z(f(z))(x), \qquad x \in U, \ z \in \bar{\Omega}.$$

Vale

$$D^m(g(it))(x) = \sum_{r=0}^{m} c_{0,r} D^r\big((\lambda_0(x))^{1-it}(\lambda_1(x))^{it}\big) D^{m-r}(f(it))(x),$$

$$D^r\big((\lambda_0(x))^{1-it}(\lambda_1(x))^{it}\big) = \sum_{s=0}^{r} d_{0,s} D^s\big((\lambda_0(x))^{1-it}\big) D^{r-s}\big((\lambda_1(x))^{it}\big).$$

D'altra parte, poichè $|\lambda_i^{(\alpha)}(x)| \leqslant C\lambda_i(x)$, $i = 0, 1$, si ha

$$\left|D^s\big((\lambda_0(x))^{1-it}\big)\right| \leqslant P_0(t)\,\lambda_0(x)\,, \qquad \left|D^{r-s}\big((\lambda_1(x))^{it}\big)\right| \leqslant P_1(t)\,,$$

dove $P_0(t)$ e $P_1(t)$ sono polinomi in $t \in \mathbf{R}$.

Ma allora

$$\left|D^s\big((\lambda_0(x))^{1-it}\big)D^{r-s}\big((\lambda_1(x))^{it}\big)\right| \leqslant P_3(t)\,\lambda_0(x)$$

essendo $P_3(t)$ un altro polinomio in t.

Ne segue che

$$|D^m(g(it))(x)| \leqslant P_4(t)\,\lambda_0(x) \sum_{s=0}^{m} |D^s(f(it))(x)|$$

e quindi che

$$\|g(it)\|_{W^{k,p}(U)} \leqslant Q_0(t)\,\|f(it)\|_{W_p^k(\lambda_0;U)}\,,$$

dove $Q_0(t)$ è un polinomio in $t \in \mathbf{R}$.

$$\|g(1+it)\|_{L^p(U)} = \|f(1+it)\|_{L^p(\lambda_1;U)}\,.$$

Inoltre, poichè $f \in \mathcal{H}\big(W_p^k(\lambda_0;\, U),\, L^p(\lambda_1,\, U)\big)$, $t \to g(it)$ (rispettivamente, $t \to g(1+it)$) è continua a crescenza polinomiale da $\mathbf{R}$ a $W^{k,p}(U)$, (rispettivamente, da $\mathbf{R}$ a $L^p(U)$).

Per mostrare che $z \to g(z)$ è olomorfa da Ω a $L^p(U)$, basta verificare (cfr. [7], p. 195) che $z \to \langle g(z), \varphi\rangle = \int_U \big(g(z)\big)(x)\varphi(x)dx$ è olomorfa in Ω per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Sia $\mu(x) = \inf\big(\lambda_0(x),\, \lambda_1(x)\big)$. Allora $z \to f(z)$ è olomorfa da Ω a $L^p(\mu;\, U)$. Ma $z \to \lambda_0^{1-z}\lambda_1^z\varphi$ è olomorfa da Ω a $L^p(\mu;\, U)'$, essendo $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Ne segue che $z \to \langle g(z), \varphi\rangle = \langle f(z),\, \lambda_0^{1-z}\lambda_1^z\varphi\rangle$ è olomorfa.

Infine g è continua da $\bar{\Omega}$ a $L^p(U)$, poichè f appartiene, in particolare, a $\mathcal{H}\big(L^p(\lambda_0;\, U), L^p(\lambda_1;\, U)\big)$.

Pertanto (cfr. [1], Teorema 4.2)

$$g(\theta) = \lambda_\theta u \in [W^{k,p}(U),\, L^p(U)]_\theta\,.$$

Viceversa, sia $u \in \mathcal{D}'(U)$ tale che $\lambda_\theta u \in [W^{k,p}(U),\, L^p(U)]_\theta$.

Allora esiste $g \in \mathcal{H}\big(W^{k,p}(U),\, L^p(U)\big)$ per cui $g(\theta) = \lambda_\theta u$.

Poniamo

$$\big(f(z)\big)(x) = \big(\lambda_0(x)\big)^{z-1}\big(\lambda_1(x)\big)^{-z}\big(g(z)\big)(x)\,, \qquad z \in \bar{\Omega}\,,\ x \in U\,.$$

Vale:

$$D^m(f(it))(x) = \sum_{r=0}^{m} c'_{0,r} D^r\big((\lambda_0(x))^{it-1}(\lambda_1(x))^{-it}\big) D^{m-r}(g(it))(x) ,$$

$$D^r\big((\lambda_0(x)^{it-1}(\lambda_1(x))^{-it}\big) = \sum_{s=0}^{r} d'_{0,s} D^s\big((\lambda_0(x))^{it-1}\big) D^{r-s}\big((\lambda_1(x))^{-it}\big),$$

e quindi, per le ipotesi sui pesi λ_i, $i = 0, 1$,

$$\big|D^r\big((\lambda_0(x))^{it-1}(\lambda_1(x))^{-it}\big)\big| \leqslant P_5(t)\lambda_0^{-1}(x) ,$$

con $P_5(t)$ polinomio in $t \in \mathbb{R}$. E allora

$$\lambda_0(x)|D^m(f(it))(x)| \leqslant P_6(t) \sum_{r=0}^{m} |D^r(g(it))(x)| .$$

Di conseguenza,

$$\|f(it)\|_{W_p^k(\lambda_0;D)} \leqslant Q_1(t)\|g(it)\|_{W^{k,p}(U)} ,$$

essendo $Q_1(t)$ un polinomio in $t \in \mathbb{R}$.

Inoltre, $\|f(1+it)\|_{L^p(\lambda_1;U)} = \|g(1+it)\|_{L^p(U)}$.

Con ragionamento analogo a quello usato per provare la prima immersione si riconosce che $z \to f(z)$ è continua da $\bar{\Omega}$ a $L^p(\mu; U)$, olomorfa da Ω a $L^p(\mu; U)$. Quindi,

$$f(\theta) = u \in [W_p^k(\lambda_0; U), L^p(\lambda_1; U)]_\theta .$$

PROPOSIZIONE 3.3. *Se* λ_0, λ_1 *sono funzioni-peso su* U *tali che* $|\lambda_i^{(\alpha)}(x)| \leqslant C\lambda_i(x)$, $x \in U$, $|\alpha| \leqslant \max\{k, l\}$, $i = 0, 1$, *allora*

$$[W_p^k(\lambda_0; U), W_p^l(\lambda_1; U)]_\theta = \{u \in \mathcal{D}'(U);\ \lambda_\theta u \in [W^{k,p}(U), W^{l,p}(U)]_\theta\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Del tutto analoga a quella del Teorema 3.3.

PROPOSIZIONE 3.4 *Sia* $(1-\theta)k = l \in I^+$. *Allora, nelle condizioni del* Teorema 3.3, *vale*

$$[W_p^k(\lambda_0; U), L^p(\lambda_1; U)]_6 = W_p^l(\lambda_\theta; U) ,$$

con equivalenze delle norme.

Dimostrazione. Per il Teorema 3.3, $u \in [W^k_p(\lambda_0;\, U),\, L^p(\lambda_1;\, U)]_\theta$ se e solo se $\lambda_\theta u \in [W^{k,p}(U),\, L^p(U)]_\theta$.

D'altra parte, $[W^{k,p}(U),\, L^p(U)]_\theta = W^{l,p}(U)$, (cfr. [10], pp. 165-166).

Poichè, però, $|D^\alpha \lambda_\theta(x)| \leqslant C\lambda_\theta(x)$, $|\alpha| \leqslant k$, si ha che

$$\lambda_\theta u \in W^{l,p}(U) \qquad \text{se e solo se } u \in W^l_p(\lambda_\theta;\, U)\,.$$

Ciò prova l'affermazione.

4. Gli spazi $W^{m,p}_\alpha(U)$.

Consideriamo ora dei particolari spazi $W^l_p(\lambda_0, \ldots, \lambda_l;\, U)$.

A questo scopo, per semplicità di notazione, adottiamo la definizione di Hanouzet (cfr. [5], p. 26).

Definizione 4.1. *Sia* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in U$, *dove* $U = \mathbf{R}^n$ *oppure* $U = R^n_+$, *e sia* $\varrho(x) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{\frac12}$.

Se $1 < p < +\infty$, $m \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, *si pone*

$$W^{m,p}_\alpha(U) = \{u \in \mathcal{D}'(U);\ (1+\varrho^2)^{(\alpha - m + |l|)/2} D^l u \in L^p(U),\ |l| \leqslant m\}\,.$$

$W^{m,p}_\alpha(U)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|u\|_{W^{m,p}_\alpha(U)} = \Big(\sum_{|l|\leqslant m} \|(1+\varrho^2)^{(\alpha-m+|l|)/2} D^l u\|^p_{L^p(U)}\Big)^{1/p}\,.$$

Si denota con $W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbf{R}^n)$, $1/p + 1/p' = 1$, *il duale forte di* $W^{m,p}_\alpha(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 4.1. *Sia* $\alpha_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1)$, $1 < p < +\infty$, $m \in \mathbf{N}$. *Se* $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $0 < \theta < 1$, *allora*

$$[W^{m,p}_{\alpha_0}(U),\, W^{m,p}_{\alpha_1}(U)]_\theta = W^{m,p}_{\alpha_\theta}(U)\,,$$

con equivalenza delle norme.

Dimostrazione. In base alla Proposizione 3.2 basta provare che $W^{m,p}_{\alpha_\theta}(U) \hookrightarrow [W^{m,p}_{\alpha_0}(U),\, W^{m,p}_{\alpha_1}(U)]_\theta$.

Per semplicità di notazioni, supporremo $n = 1$.

Sia $\varphi \in W^{m,p}_{\alpha_0}(U)$. Poniamo

$$\big(\phi(z)\big)(x) = \big((1+\varrho^2)^{(\alpha_0-\alpha_1)/2}\big)^{z-\theta}\varphi(x)\,, \qquad z \in \bar{\Omega}\,,\ x \in U\,.$$

Se $0 < q \leqslant m$, vale

$$D^q\big(\phi(it)\big)(x) = \sum_{r\leqslant q}\binom{q}{r}\big(D^r(1+\varrho^2)^{((\alpha_0-\alpha_1)/2)(it-\theta)}\big)\big(D^{q-r}\varphi(x)\big)\,.$$

D'altra parte, se k è dispari,

$$\begin{aligned} D^k\big((1+\varrho^2)^{((\alpha_0-\alpha_1)/2)(it-\theta)}\big) = {} & c_0(t)\,\varrho^k(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)-k} + \\ & + c_1(t)\,\varrho^{k-2}(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)-k+1} + \\ & + \ldots + c_{(k-1)/2}(t)\,\varrho(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)-k+(k-1)/2}\,; \end{aligned}$$

se k è pari,

$$\begin{aligned} D^k\big((1+\varrho^2)^{((\alpha_0-\alpha_1)/2)(it-\theta)}\big) = {} & d_0(t)\,\varrho^k(1+\varrho^2)^{(\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)-k} + \\ & + \ldots + d_{k/2}(t)(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)-k+(k-1)/2}\,, \end{aligned}$$

$c_s(t)$, $d_r(t)$ essendo polinomi in $t \in \mathbf{R}$.

Nel primo caso, allora,

$$\begin{aligned} (1+\varrho^2)^{(\alpha_0-m+l)/2}\,|D^k(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)}|\,|D^{l-k}\varphi(x)| \leqslant {} & (1+\varrho^2)^{(\alpha_0-m+l)/2}\cdot \\ & \cdot|p_0(t)(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)\theta-k/2}\big(\varrho(1+\varrho^2)^{-\frac12}\big)^k + \\ & + \ldots + p_{(k-1)/2}(t)(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)\theta-k/2}\big(\varrho(1+\varrho^2)^{-\frac12}\big)|\cdot \\ & \cdot|D^{l-k}\varphi(x)| \leqslant P_0(t)(1+\varrho^2)^{(\alpha\theta-m+l-k)/2}\,|D^{l-k}\varphi(x)|\,. \end{aligned}$$

Inoltre, poichè

$$\begin{aligned} (1+\varrho^2)^{(\alpha_0-m+l)/2}\,|d_{k/2}(t)(1+\varrho^2)^{((\alpha_1-\alpha_0)/2)(\theta-it)-k/2}|\,|D^{l-k}\varphi(x)| \leqslant & \\ \leqslant q_{k/2}(t)(1+\varrho^2)^{(\alpha\theta-m+l-k)/2}\,|D^{l-k}\varphi(x)|\,, & \end{aligned}$$

una analoga maggiorazione vale per k pari. Dunque,

$$(1+\varrho^2)^{(\alpha_0-m+q)/2}D^q\big(\phi(it)\big)(x)| \leqslant Q_0(t)\sum_{s=0}^{q}(1+\varrho^2)^{(\alpha\theta-m+s)/2}\,|D^s\varphi(x)|\,,$$

$Q_0(t)$ essendo un polinomio in $t \in \mathbf{R}$.

Ne segue che

$$\|\phi(it)\|_{W^{m,p}_{\alpha_0}(U)} \leqslant Q_1(t)\|\varphi\|_{W^{m,p}_{\alpha\theta}(U)}.$$

Ragionando nella medesima maniera si prova che

$$\|\phi(1+it)\|_{W^{m,p}_{\alpha_1}(U)} \leqslant Q_2(t)\|\varphi\|_{W^{m,p}_{\alpha\theta}(U)};$$

$Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ sono dei polinomi in $t\in\mathbb{R}$.

Ciò permette di concludere (cfr. la prova del Teorema 4.2 di [1]) che $\varphi=\phi(\theta)\in[W^{m,p}_{\alpha_0}(U), W^{m,p}_{\alpha_1}(U)]_\theta$ e

$$\|\varphi\|_W \leqslant C\|\varphi\|_{W^{m,p}_{\alpha\theta}(U)}.$$

COROLLARIO. *Sia* $m=-r$, $r\in\mathbb{N}$. *Se* $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $(i=0,1)$, $1<p<+\infty$, *allora*

$$[W^{m,p}_{\alpha_0}(\mathbb{R}^n), W^{m,p}_{\alpha_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta = W^{m,p}_{\alpha\theta}(\mathbb{R}^n),$$

con equivalenza delle norme.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione discende dal Teorema 4.1, dalla riflessività degli spazi $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ e dal fatto che per spazi di Banach riflessivi vale (cfr. [10], p. 150)

$$[A, B]'_\theta = [A', B']_\theta.$$

5. Gli spazi $V^{k,p}_\alpha(U)$.

Sia $U=\mathbb{R}^n_+$ oppure U sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ la cui frontiera Γ è una varietà di classe C^∞ di dimensione $n-1$, U essendo localmente da una parte di Γ.

Sia $1<p<+\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Sia ϱ una funzione $\in C^\infty(\overline{U})$, $\varrho(x)>0$ su U, $\varrho(x)=0$ su Γ e, se $d(x,\Gamma)$ denota la distanza di x da Γ, $\lim_{x\to x_0}\varrho(x)/d(x,\Gamma)= = d\neq 0$, $x_0\in\Gamma$, se U è limitato.

Se $U=\mathbb{R}^n_+$, allora $\varrho(x)=\varrho((x_1,\dots,x_n))=x_n$, (cfr. [7], p. 38).

DEFINIZIONE 5.1. *Si pone*

$$V_\alpha^{k,p}(U) = \left\{u \in \mathfrak{D}'(U);\ \|u\|_{V_\alpha^{k,p}(U)} = \Big(\sum_{0\leq|r|\leq k} \|D^r u\|^p_{L^p(\varrho^{\alpha-k+|r|};U)}\Big)^{1/p} < +\infty\right\}.$$

$V_\alpha^{k,p}(U)$ è uno spazio di Banach.

TEOREMA 5.1. *Sia* $1 < p < +\infty$, $k \in \mathbf{N}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $(i = 0, 1)$. *Se* $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\theta \in]0, 1[$, *allora*

$$[V_{\alpha_0}^{k,p}(U), V_{\alpha_1}^{k,p}(U)]_\theta = V_{\alpha_\theta}^{k,p}(U),$$

con equivalenza delle norme.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che $V_{\alpha_\theta}^{k,p}(U) \hookrightarrow [V_{\alpha_0}^{k,p}(U), V_{\alpha_1}^{k,p}(U)]_\theta$. Possiamo supporre senz'altro, passando a carte locali, che sia $U = \mathbf{R}^n_+$.

Sia $\varphi \in V_{\alpha_\theta}^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$. Poniamo

$$(\phi(z))(x) = x_n^{(\alpha_1-\alpha_0)(\theta-z)}\varphi(x), \qquad z \in \bar{\Omega},\ x \in \mathbf{R}^n_+.$$

Si ha

$$\frac{\partial^q}{\partial x_n^q}(x_n^\alpha \varphi(x)) = \sum_{j=1}^q c_j x_n^{\alpha-q+j} \frac{\partial^j}{\partial x_n^j}\varphi(x), \qquad q \leq k,$$

e quindi

$$\|\phi(it)\|_{V_{\alpha_0}^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)} = \Big(\sum_{|m|\leq k} \int_{\mathbf{R}^n_+} x_n^{\alpha_0 p-(k-|m|)p} |D^m(\phi(it))(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leq P_0(t)\|\varphi\|_{V_{\alpha_\theta}^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)},$$

$P_0(t)$ essendo un polinomio in $t \in \mathbf{R}$.

Infatti, se $|m| = l_1 + \ldots + l_n$,

$$\Big(\int_{\mathbf{R}^n_+}\Big((x_n^{\alpha_0-k+|m|}|D^m(\phi(it))(x)|\Big)^p dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{\mathbf{R}^n_+}(x_n^{\alpha_\theta-k+|m|}|D^m\varphi(x)|)^p dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ c_1(t)\Big(\int_{\mathbf{R}^n_+}\Big(x_n^{\alpha_\theta-k+l_1+\ldots+(l_n-1)}\Big|\frac{\partial^{l_1+\ldots+(l_n-1)}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_{n-1}^{l_{n-1}}}\varphi(x)\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ \ldots + c_{l_n}(t)\Big(\int_{\mathbf{R}^n_+}\Big(x_n^{\alpha_\theta-k+l_1+\ldots+l_{n-1}}\Big|\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_{n-1}}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_{n-1}^{l_{n-1}}}\varphi(x)\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p},$$

$c_j(t)$ essendo un polinomio in t, $j = 1, \ldots, l_n$.

In modo analogo si ottiene

$$\|\varphi(1+it)\|_{V^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n_+)} \leqslant P_1(t)\,\|\varphi\|_{V^{k,p}_{\alpha\theta}(\mathbf{R}^n_+)} .$$

Quindi, come nella prova del Teorema 4.1, si può concludere che esiste $C>0$ tale che

$$\|\varphi(\theta)\|_{[V^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n_+),V^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n_+)]_\theta} = \|\varphi\|_{[V^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n_+),V^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n_+)]_\theta} \leqslant C\,\|\varphi\|_{V^{k,p}_{\alpha\theta}(\mathbf{R}^n_+)} .$$

Con ciò la prova della affermazione è conclusa, poichè la immersione inversa è valida in generale (cfr. Proposizione 3.2).

Teorema 5.2. *Nelle ipotesi del* Teorema 5.1, *si ha*

$$\big(V^{k,p}_{\alpha_0}(U),\, V^{k,p}_{\alpha_1}(U)\big)_{\theta,p} = V^{k,p}_{\alpha\theta}(U) ,$$

con equivalenza delle norme.

Dimostrazione. Si può senz'altro supporre $U=\mathbf{R}^n_+$. Inoltre è sufficiente provare che $V^{k,p}_{\alpha\theta}(U) \hookrightarrow \big(V^{k,p}_{\alpha_0}(U),\, V^{k,p}_{\alpha_1}(U)\big)_{\theta,p}$.

Sia $\{\psi_s\}$, $s\in I$, una partizione dell'unità tale che

$$x\in\mathbf{R}^+ \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s\,\psi_s(x) = 1 , \qquad \operatorname{supp}\psi_s \subset E_s = \{x\in\mathbf{R}^+;\ 2^{s-1}<x<2^{s+1}\} ,$$
$$|D^r\psi_s(x)| \leqslant C2^{-sr} , \qquad 0\leqslant r\leqslant k .$$

Una tale partizione dell'unità esiste (cfr. [11], p. 296).

Supponiamo $\alpha_0<\alpha_1$ e poniamo $x=t^{\alpha_1-\alpha_0}$, $x, t\in\mathbf{R}^+$ e, corrispondentemente,

$$\psi_s(x) = \psi_s(t^{\alpha_1-\alpha_0}) = \omega_s(t) .$$

Allora $\operatorname{supp}\omega_s \subset F_s = \{t\in\mathbf{R}^+;\ 2^{s-1}<t^{\alpha_1-\alpha_0}<2^{s+1}\}$.

Inoltre, poichè

$$t^r\omega_s^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i x^i \psi_s^{(i)}(x) , \qquad 1\leqslant r\leqslant k ,$$

vale

$$|t^r\omega^{(r)}(t)| < \sum_{i=1}^{r} c_i C\cdot 2^{(s+1)i}2^{-si} = K_r ,$$

indipendentemente da $s\in I$.

Poichè $r \leqslant k$, esiste dunque una costante K per cui

$$|t^r \omega_s^{(r)}(t)| \leqslant K , \qquad 0 \leqslant r \leqslant k .$$

Si è in definitiva mostrato che esiste una partizione dell'unità $\{\omega_s\}$, $s \in I$, tale che

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \omega_s(x) = 1 , \quad x \in \mathbf{R}^+ , \quad \operatorname{supp} \omega_s \subset F_s = \{x \in \mathbf{R}^+, 2^{s-1} < x^{\alpha_1 - \alpha_0} < 2^{s+1}\} ,$$

$$|x^r \omega_s^{(r)}(x)| \leqslant C , \qquad s \in I , \qquad 0 \leqslant r \leqslant k .$$

Sia dunque $\varphi \in V^{k,p}_{\alpha\theta}(\mathbf{R}^n_+)$. Definiamo

$$\phi_s(x) = \omega_s(x_n)\varphi(x) .$$

Allora $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \phi_s(x) = \varphi(x)$; inoltre si ha, se $|m| = l_1 + \dots + l_n$,

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n_+} 2^{s\theta} x_n^{\alpha_0 - k + |m|} |D^m \phi_s(x)|^p dx_1 \dots dx_n\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{l_n} c_r \left(\int_{\mathbf{R}^n_+} \left(2^{s\theta} x_n^{\alpha_0 - k + |m|} \left| \omega_s^{(r)}(x_n) \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n - r}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n - r}} \varphi(x)\right|\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{l_n} c_r' \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{F_s} \left(x_n^{\alpha\theta - k + |m|} \left| \omega_s^{(r)}(x_n) \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n - r}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n - r}} \varphi(x)\right|\right)^p dx_n\right) dx_1 \dots dx_{n-1}\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{l_n} c_r'' \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{F_s} \left(x_n^{\alpha\theta - k + l_1 + \dots + l_n - r} \left| \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n - r}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n - r}} \varphi(x)\right|\right)^p dx_n\right) dx_1 \dots dx_{n-1}\right)^{1/p} ,$$

in base al fatto che $\operatorname{supp} \omega_s \subset F_s$ e in F_s, $2^{s\theta} < 2^{\theta} x_n^{(\alpha_1 - \alpha_0)\theta}$ con $|\omega_s^{(r)}(x_n)| \leqslant \leqslant C x_n^{-r}$.

Dunque

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \left(\sum_{|m| \leqslant k} \int_{\mathbf{R}^n_+} (x_n^{\alpha_0 - (k - |m|)} |D^m \phi_s(x)|)^p dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|m| \leqslant k} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \tilde{c}_m \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{F_s} (x_n^{\alpha\theta - (k - |m|)} |D^m \varphi(x)|)^p dx_n\right) dx_1 \dots dx_{n-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c} \sum_{|m| \leqslant k} \int_{\mathbf{R}^n_+} (x_n^{\alpha\theta - (k - |m|)} |D^m \varphi(x)|)^p dx ,$$

poichè $F_r \cap F_s \neq \phi$ se e solo se $r \in \{s - 1, s, s + 1\}$.

Quindi,

$$\|(2^{s\theta}\phi_s)\|_{l^p(V^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n_+))} \leqslant C\|\varphi\|_{V^{k,p}_{\alpha_\theta}(\mathbf{R}^n_+)} .$$

Con lo stesso procedimento, sfruttando il fatto che su F_s vale

$$2^{s(\theta-1)} < 2^{1-\theta} x_n^{\theta-1} ,$$

si trova che esiste una costante C_1 per cui

$$\|(2^{s(\theta-1)}\phi_s)\|_{l^p(V^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n_+))} \leqslant C_1\|\varphi\|_{V^{k,p}_{\alpha_\theta}(\mathbf{R}^n_+)} .$$

Tali disuguaglianze permettono di concludere la prova della nostra affermazione.

6. Gli spazi $W^{k,p}_\alpha(O)$ e $\mathring{W}^{k,p}_\alpha(O)$.

DEFINIZIONE 6.1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$, $1 < p < +\infty$ *e valgano le ipotesi della* DEFINIZIONE 5.1 *sulla regolarità dell'aperto* O *di* $\mathbf{R}^n$. *Allora se* k *è un intero* $\geqslant 0$, *si denota con* $W^{k,p}_\alpha(O)$ *lo spazio* $W^k_p(\varrho^\alpha; O)$ (cfr. [2], p. 3).

TEOREMA 6.1. *Sia* $1 < p < +\infty$, $k \in \mathbf{N}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1)$. *Se* $\theta \in]0, 1[$ *e* $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 \notin \{1-1/p, \dots, k-1/p\}$, *allora*

$$[\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(O)]_\theta = \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_\theta}(O) ,$$

con equivalenza delle norme.

DIMOSTRAZIONE. Per carte locali ci si riconduce a provare l'affermazione per $O = \mathbf{R}^n_+$. Poichè inoltre la dimostrazione nel caso di $n > 1$ ripete quella per $O = \mathbf{R}^+$, ci limitiamo a considerare questo caso.

Sia dunque $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^+)$. Si pone, come nella prova del Teorema 5.1,

$$\big(\phi(z)\big)(x) = x^{(\alpha_0-\alpha_1)(z-\theta)}\varphi(x) , \qquad x \in \mathbf{R}^+ , \ z \in \bar{\Omega} .$$

Notiamo che $\phi(z) \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^+)$ perchè φ ha supporto compatto.

Vale (cfr. Teorema 5.1):

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(x^{\alpha_0}|D^q(\phi(it))(x)|\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \sum_{r=0}^{q} c_r(t)\left(\int_0^{+\infty}\left(x^{\alpha_\theta-r}|D^{q-r}\varphi(x)|\right)^p dx\right)^{1/p}.$$

D'altra parte, per il Teorema di Hardy (cfr. [6], p. 245; [4], p. 261), poichè $\alpha_\theta \notin \{1-1/p, \ldots, k-1/p\}$, se $m \leqslant q$,

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha_\theta p - mp}|D^{q-m}\varphi(x)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{p}{|(\alpha_\theta - m)p+1|}\right)^p \int_0^{+\infty} x^{\alpha_\theta p-(m-1)p}|D^{q-m+1}\varphi(x)|^p dx\,;$$

quindi, iterando la applicazione del teorema ricordato,

$$\int_0^{+\infty}\left(x^{\alpha_\theta-m}|D^{q-m}\varphi(x)|\right)^p dx \leqslant C_1\int_0^{+\infty}\left(x^{\alpha_\theta}|D^q\varphi(x)|\right)^p dx\,.$$

Pertanto

$$\|\phi(it)\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^+)} \leqslant P_0(t)\,\|\varphi\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_\theta}(\mathbf{R}^+)}\,,$$

dove $P_0(t)$ è un polinomio in $t \in \mathbf{R}$.

Analogamente, sfruttando ancora il Teorema di Hardy,

$$\|\varphi(1+it)\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^+)} \leqslant P_1(t)\,\|\varphi\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_\theta}(\mathbf{R}^+)}\,,$$

dove $P_1(t)$ è un polinomio in $t \in \mathbf{R}$.

Ciò implica che $\varphi \in [\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^+)]_\theta$.

Per la densità di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^+)$ nello spazio $\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_\theta}(\mathbf{R}^+)$, la immersione $\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_\theta}(\mathbf{R}^+) \hookrightarrow [\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^+)]_\theta$ risulta provata.

TEOREMA 6.2. *Nelle ipotesi del* Teorema 6.1, *vale*

$$(\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(O))_{\theta,p} = \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_\theta}(O)\,,$$

con equivalenza delle norme.

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità supporremo $O = \mathbb{R}^+$.

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$. Sia $\{\omega_s\}$, $s \in I$, la partizione dell'unità introdotta nella dimostrazione del Teorema 5.2.

Così, se $\phi_s(x) = \omega_s(x)\varphi(x)$, si ha $\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \phi_s(x)$.

Procedendo come nella prova del suddetto Teorema, si trova che

$$\left(\int_0^{+\infty} (x^{\alpha_0} 2^{s\theta} |D^m \phi_s(x)|)^p dx\right)^{1/p} \leqslant C_1 \sum_{r=0}^{m} \left(\int_{F_s} (x^{\alpha\theta - r} |D^{m-r}\varphi(x)|)^p dx\right)^{1/p}, \qquad m \leqslant k .$$

Quindi,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \left(\sum_{m=0}^{k} \int_0^{+\infty} (x^{\alpha_0} 2^{s\theta} |D^m \phi_s(x)|)^p dx\right) \leqslant \sum_{m=0}^{k} \tilde{c}_m \left(\sum_{r\leqslant m} \int_0^{+\infty} (x^{\alpha\theta - r} |D^{m-r}\varphi(x)|)^p dx\right) .$$

D'altra parte, per il Teorema di Hardy,

$$\int_0^{+\infty} (x^{\alpha\theta - r} |D^{m-r}\varphi(x)|)^p dx \leqslant C_2 \int_0^{+\infty} (x^{\alpha\theta} |D^m \varphi(x)|)^p dx .$$

Perciò, in definitiva,

$$\|(2^{s\theta}\phi_s)\|_{l^p(\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+))} \leqslant C_3 \|\varphi\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha\theta}(\mathbb{R}^+)} .$$

Procedendo nello stesso modo si prova che

$$\|(2^{s(\theta-1)}\phi_s)\|_{l^p(\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbb{R}^+))} \leqslant C_4 \|\varphi\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha\theta}(\mathbb{R}^+)} .$$

Pertanto la immersione $\mathring{W}^{k,p}_{\alpha\theta}(\mathbb{R}^+) \hookrightarrow (\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+), \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_1}(\mathbb{R}^+))_{\theta,p}$ risulta stabilita. Ciò conclude la prova.

Seguendo un ragionamento vicino a quello di Goudjo (cfr. [3]), dimostreremo un risultato per gli spazi $W^{k,p}_{\alpha}(O)$ che discende dal Teorema 6.2.

Facciamo notare che per $\alpha \leqslant -1/p$ oppure $\alpha > k - 1/p$ vale $W^{k,p}_{\alpha}(O) = \mathring{W}^{k,p}_{\alpha}(O)$.

COROLLARIO. *Sia* $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha_i + 1/p < l$ $(i = 0, 1)$ *e, se* $[s]_-$ *denota il più grande intero* $< s$, *sia* $m = [l - \alpha_i - 1/p]_-$.

Se $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 \notin \{1-1/p, \dots, l-1/p\}$, *allora*

$$\left(W^{l,p}_{\alpha_0}(O),\ W^{l,p}_{\alpha_1}(O)\right)_{\theta,p} = W^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)\,,$$

con equivalenza delle norme.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma_j\colon u \to (\partial/\partial\nu)^j u$, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$.

È noto che, se $0 < \alpha + 1/p < l$, allora

$$W^{l,p}_{\alpha}(O) \xrightarrow{\gamma} \prod_{0 \leq j \leq [l-\alpha-1/p]^-} W^{l-j-\alpha-1/p,p}(\Gamma)\,,$$

(Γ essendo la frontiera di O), è una applicazione continua e suriettiva dotata di inversa destra continua.

Si supponga ora che $T \in L(A_i, B_i)$, $i = 0, 1$, sia tale che $T(A_i) = B_i$ ed esiste inversa destra continua $R\colon B_i \to A_i$.

Per interpolazione, T risulta allora continua da $(B_0, B_1)_{\theta,p}$ a $(A_0, A_1)_{\theta,p}$.

D'altra parte, se $\xi \in (B_0, B_1)_{\theta,p}$, sarà $\xi = \xi_0 + \xi_1$, $\xi_i \in B_i$.

Poichè T è su, esiste $x_i \in A_i$ $(x_i = R\xi_i)$ tale che $Tx_i = \xi_i$, e quindi $T(x_0 + x_1) = \xi$.

Ma $x = R\xi_0 + R\xi_1 = R\xi$; inoltre, poichè $R\colon (B_0, B_1)_{\theta,p} \to (A_0, A_1)_{\theta,p}$, vale $R(\xi) = x \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$.

Si può pertanto asserire che γ è continuo da $\left(W^{l,p}_{\alpha_0}(O), W^{l,p}_{\alpha_1}(O)\right)_{\theta,p}$ su $\prod_{j=0}^{m} W^{l-j-\alpha_\theta-1/p,p}(\Gamma)$.

Infatti,

$$\left(\prod_{j=0}^{m} W^{l-j-\alpha_0-1/p,p}(\Gamma), \prod_{j=0}^{m} W^{l-j-\alpha_1-1/p,p}(\Gamma)\right)_{\theta,p} =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left(W^{l-j-\alpha_0-1/p,p}(\Gamma),\ W^{l-j-\alpha_1-1/p,p}(\Gamma)\right)_{\theta,p} = \prod_{j=1}^{m} W^{l-j-\alpha_\theta-1/p,p}(\Gamma)\,.$$

Ora, se $u \in W^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)$ allora $\gamma u \in \prod_{j=0}^{m} W^{l-j-\alpha_\theta-1/p,p}(\Gamma)$.

D'altro canto, per la suriettività stabilita sopra, esiste

$$w \in \left(W^{l,p}_{\alpha_0}(O),\ W^{l,p}_{\alpha_1}(O)\right)_{\theta,p} \left(\hookrightarrow W^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)\right)$$

tale che $\gamma w = \gamma u$, cioè $\gamma(u - w) = 0$.

Ma allora $u - w \in \mathring{W}^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)$.

Poichè $\mathring{W}^{l,p}_{\alpha_\theta}(O) = (\mathring{W}^{l,p}_{\alpha_0}(O), \mathring{W}^{l,p}_{\alpha_1}(O))_{\theta,p}$,

$$u = (u - w) + w \in (W^{l,p}_{\alpha_0}(O), W^{l,p}_{\alpha_1}(O))_{\theta,p} .$$

Poniamo ora $\mathring{W}^{k,p}_0(O) = \mathring{W}^{k,p}(O)$.
$\mathring{W}^{k,p}(O)$ è dunque il completamento di $\mathfrak{D}(O)$ rispetto alla norma di $W^{k,p}(O)$.

Teorema 6.3. *Sia $\alpha_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1)$. Se $\alpha_0 \notin \{1 - 1/p, \ldots, k - 1/p\}$ e $\alpha_\theta = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\theta \in]0, 1[$, allora*

$$[\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), L^p_{\alpha_1}(O)]_\theta = \{u \in \mathfrak{D}'(O);\ \varrho^{\alpha_\theta} u \in [\mathring{W}^{k,p}(O), L^p(O)]_\theta\} ,$$

dove si è posto $L^p_{\alpha_1}(O) = L^p(\varrho^{\alpha_1}; O)$.

Dimostrazione. Come si è fatto per provare il Teorema 3.3, usiamo tecniche di Lions-Magenes (cfr. [7], pp. 194-198).

Inoltre, supporremo $O = \mathbf{R}^+$ per cui $\varrho(x) = x$.

Sia $u \in [\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), L^p_{\alpha_1}(O)]_\theta = W$.

Ciò implica che esiste $f \in \mathcal{H}(\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(O), L^p_{\alpha_1}(O)) = \mathcal{H}$ tale che $f(\theta) = u$. Poniamo

$$g(z) = \varrho^{(1-z)\alpha_0 + z\alpha_1} f(z) , \qquad z \in \bar{\Omega} .$$

Si ha

$$D^q(g(it))(x) = \sum_{r=0}^{q} c_{0,r}(t)\, x^{\alpha_0 - r + it(\alpha_1 - \alpha_0)} D^{q-r}(f(it))(x) ,$$

dove $c_{0,r}(t)$ è un polinomio in $t \in \mathbf{R}$. Ora

$$\int_0^{+\infty} x^{(\alpha_0 - r)p} |D^{q-r}(f(it))(x)|^p dx \leqslant C \int_0^{+\infty} x^{\alpha_0 p} |D^q(f(it))(x)|^p dx$$

perchè per ipotesi $f(it) \in \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+)$ e $\alpha_0 \notin \{1 - 1/p, \ldots, k - 1/p\}$.

Quindi $g(it) \in W^{k,p}(\mathbf{R}^+)$. D'altra parte, poichè $f(it) \in \mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+)$, esiste $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $f_n \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^+)$,

$$\text{(i)} \qquad \|f_n - f(it)\|_{W^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Sia $g_n(x) = x^{\alpha_0 + it(\alpha_1 - \alpha_0)} f_n(x)$, $x \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}$.

Si ha $g_n \in \mathcal{D}(R^+)$ e

$$\int_0^{+\infty} \left|D^m\big(g_n(x) - (g(it))(x)\big)\right|^p dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,, \qquad m \leq k\,.$$

Infatti, $\int_0^{+\infty} x^{\alpha_0 p} |D^m(f_n(x)) - (f(it))(x)|^p dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $0 \leq m \leq k$, per la (i).

Inoltre, poichè $f_n - f(it) \in \overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+)$ e $\alpha_0 \notin \{1 - 1/p, \dots, k - 1/p\}$, si ha, come prima,

$$\int_0^{+\infty} x^{(\alpha_0 - r)p} \left|D^{q-r}\big(f_n(x) - (f(it))\big)(x)\right|^p dx \leq$$

$$\leq C_1 \int_0^{+\infty} x^{\alpha_0 p} \left|D^q\big(f_n(x) - (f(it))\big)(x)\right|^p dx\,, \qquad q \leq k\,.$$

Con ciò si è mostrato che $g(it) \in \overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\mathbf{R}^+)$ e

$$\|g(it)\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\mathbf{R}^+)} \leq P_0(t) \|f(it)\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^+)}\,,$$

$P_0(t)$ essendo un polinomio in $t \in \mathbf{R}$.

Vale inoltre

$$\|g(1 + it)\|_{L^p(\mathbf{R}^+)} = \|f(1 + it)\|_{L^p_{\alpha_1}(\mathbf{R}^+)}\,.$$

Come nella prova del Teorema 3.3 si riconosce poi che $z \to g(z)$ è continua da $\bar{\Omega}$ a $L^p(\mathbf{R}^+)$, olomorfa da Ω a $L^p(\mathbf{R}^+)$ e $t \to g(it)$ (rispettivamente, $t \to g(1 + it)$) risulta continua a crescenza polinomiale da $\mathbf{R}$ a $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\mathbf{R}^+)$, (rispettivamente, da $\mathbf{R}$ a $L^p(\mathbf{R}^+)$).

Ne segue che

$$g(\theta) = \varrho^{\alpha\theta} u \in [\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\mathbf{R}^+), L^p(\mathbf{R}^+)]_\theta\,.$$

Viceversa, sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^+)$ tale che $\varrho^{\alpha\theta} u \in [\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\mathbf{R}^+), L^p(\mathbf{R}^+)]_\theta$.

Ciò implica che esiste $f \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\mathbf{R}^+), L^p(\mathbf{R}^+))$ tale che $f(\theta) = \varrho^{\alpha\theta} u$ e quindi che $u(x) = (\varrho(x))^{(\theta-1)\alpha_0 - \theta\alpha_1}(f(\theta))(x)$. Poniamo

$$g(z) = \varrho^{(z-1)\alpha_0 - z\alpha_1} f(z)\,, \qquad z \in \bar{\Omega}\,.$$

Vale

$$D^q\big(g(it)\big)(x)=\sum_{r=0}^{q}c_r(t)x^{-\alpha_0-r+it(\alpha_0-\alpha_1)}D^{q-r}\big(f(it)\big)(x)\,.$$

Quindi

$$x^{\alpha_0}|D^q\big(g(it)\big)(x)|\leqslant\sum_{r=0}^{q}c_r'(t)x^{-r}\,|D^{q-r}\big(f(it)\big)(x)|\,.$$

D'altra parte, se $\lim\limits_{t\to 0}h(t)=0$ e $\alpha<p-1$ si ha

(1) $$\int_0^{+\infty}|h(t)|^p t^{\alpha-p}dt\leqslant\big(p/|\alpha-p+1|\big)^p\int_0^{+\infty}|h'(t)|^p t^\alpha dt\,.$$

Per $\alpha=0$ attraverso la (1) si ottiene

$$\int_0^{+\infty}x^{-p}|D^{q-1}\big(f(it)\big)(x)|^p dx\leqslant C_3\int_0^{+\infty}|D^q\big(f(it)\big)(x)|^p dx\;;$$

iterando la applicazione della (1),

$$\int_0^{+\infty}x^{-rp}|D^{q-r}\big(f(it)\big)(x)|^p dx\leqslant C_4\int_0^{+\infty}|D^q\big(f(it)\big)(x)|^p dx\,,\qquad 1\leqslant r\leqslant q\,.$$

Così, come prima, $g(it)\in\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+)$ e $\|g(it)\|_{\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+)}\leqslant Q_0(t)\|f(it)\|_{\mathring{W}^{k,p}(\mathbb{R}^+)}$, $Q_0(t)$ polinomio in $t\in\mathbb{R}$. Inoltre

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha_1 p}|\big(g(1+it)\big)(x)|^p dx\leqslant C_5\int_0^{+\infty}|\big(f(1+it)\big)(x)|^p dx\,.$$

Di qui, (cfr. la prova del Teorema 3.3),

$$g(\theta)=u\in[\mathring{W}^{k,p}_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+),\,L^p_{\alpha_1}(\mathbb{R}^+)]_\theta\,.$$

TEOREMA 6.4. *Se*

$$\alpha_0\notin\{1-1/p,\,\ldots,\,k-1/p\}\,,\qquad \alpha_1\notin\{1-1/p,\,\ldots,\,k-1-1/p\}\,,$$

allora

$$[\overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\alpha_0}(O), \overset{\circ}{W}{}^{k-1,p}_{\alpha_1}(O)]_\theta = \{u \in \mathfrak{D}'(O);\ \varrho^{\alpha\theta} u \in [\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(O), \overset{\circ}{W}{}^{k-1,p}(O)]_\theta\}\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella del Teorema 6.3.

COROLLARIO 1. *Se* $(1-\theta)k = l \in \mathbb{N}$ *e valgono le condizioni del* Teorema 6.3, *allora, se* $\alpha_\theta \notin \{1-1/p, \ldots, l-1/p\}$,

$$[\overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\alpha_0}(O), L^p_{\alpha_1}(O)]_\theta = \overset{\circ}{W}{}^{k,p}_{\alpha_\theta}(O)\ .$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù del Teorema 6.3, basta riconoscere che

$$\{u \in \mathfrak{D}'(O);\ \varrho^{\alpha\theta} u \in [\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(O), L^p(O)]_\theta\} = \overset{\circ}{W}{}^{l,p}_{\alpha_0}(O)\ .$$

Ora si sa che $[\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(O), L^p(O)]_\theta = \overset{\circ}{W}{}^{l,p}(O)$.

Sia dunque $\varrho^{\alpha\theta} u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,p}(O)$; allora $D^q(\varrho^{\alpha\theta} u) \in L^p(O)$, $|q| \leqslant l$.

Ne segue che $u \in L^p_{\alpha_\theta}(O)$, $u \in W^{1,p}_{\alpha_\theta}(O) \cap L^p_{\alpha_\theta - 1}(O)$, $u \in W^{2,p}_{\alpha_\theta}(O) \cap$ $\cap\, W^{1,p}_{\alpha_\theta - 1}(O) \cap L^p_{\alpha_\theta - 2}(O)$, ecc.

Ma allora (cfr. [4], p. 261), $u \in L^p_{\alpha_\theta}(O)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\alpha_\theta}(O)$, ecc., $u \in \overset{\circ}{W}{}^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)$.

D'altra parte, se $u \in \overset{\circ}{W}{}^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)$, esiste $u_n \in \mathfrak{D}(O)$, $\|u_n - u\|_{W^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Allora $\varrho^{\alpha\theta} u_n \in \mathfrak{D}(O)$ e

$$\|\varrho^{\alpha\theta}(u_n - u)\|_{L^p(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ , \qquad \|\varrho^{\alpha\theta}(D^s(u_n - u))\|_{L^p(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ , \qquad |s| \leqslant l\ ;$$

$$\|\varrho^{\alpha\theta - r}(D^{s-r}(u_n - u))\|_{L^p(\theta)} \leqslant C \|\varrho^{\alpha\theta} D^s(u_n - u)\|_{L^p(\theta)}\ ,$$

perchè $u_n - u \in \overset{\circ}{W}{}^{l,p}_{\alpha_\theta}(O)$ e $\alpha_\theta \notin \{1-1/p, \ldots, l-1/p\}$.

In definitiva, $\|\varrho^{\alpha\theta} u_n - \varrho^{\alpha\theta} u\|_{W^{l,p}(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e quindi $\varrho^{\alpha\theta} u \in \overset{\circ}{W}{}^{l,p}(O)$.

COROLLARIO 2. *Sia O limitato,* $p = 2$, α_0 *soddisfi le condizioni del* Teorema 6.3. *Se* $(1-\theta)k \neq$ intero $+ \frac{1}{2}$, *allora*

$$[\overset{\circ}{W}{}^{k,2}_{\alpha_0}(O), L^2_{\alpha_1}(O)]_\theta = \{u \in \mathfrak{D}'(O);\ \varrho^{\alpha\theta} u \in H_0^{(1-\theta)k}(O)\}\ .$$

e pertanto $[\overset{\circ}{W}{}^{k,2}_{\alpha_0}(O), L^2_{\alpha_1}(O)]_\theta$ *coincide col complemento di* $\mathfrak{D}(O)$ *rispetto alla norma di* $H^{(1-\theta)k}(O)$; (*per le notazioni,* cfr. [7], p. 70).

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza immediata dei risultati sugli spazi $H_0^s(O)$ in [7]; (cfr. [7], p. 197).

Analogamente si ha

COROLLARIO 3. *Sia O limitato, $p=2$. Se α_i soddisfa le condizioni del* Teorema 6.4 *e* $1-\theta\neq\frac{1}{2}$, *allora*

$$[\overset{\circ}{W}{}^{k,2}_{\alpha_0}(O), \overset{\circ}{W}{}^{k-1,2}_{\alpha_1}(O)]_\theta = \{u\in\mathfrak{D}'(O);\ \varrho^{\alpha\theta}u\in\overset{\circ}{W}{}^{k-\ ,2}(O)\}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta ricordare che, se H_0, H_1 sono spazi di Hilbert, allora $(H_0, H_1)_{\theta,2}=[H_0, H_1]_\theta$ e che

$$\big(\overset{\circ}{W}{}^{s,p}(O), \overset{\circ}{W}{}^{s-1,p}(O)\big)_{\theta,p} = \overset{\circ}{W}{}^{s-\theta,p}(O)\,.$$

$1<p<+\infty$, $s\in\mathbf{N}$, $1-\theta\neq 1/p$ (cfr. [8], p. 41).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. FAVINI, *Sulla interpolazione degli spazi $K\{M_p\}$*, in corso di stampa sul Boll. U.M.I.

[2] C. GOUDJO, *Problème aux limites dans les espaces de Sobolev avec poids*, Thèse, 1970.

[3] C. GOUDJO, *Une nouvelle présentation des problèmes aux limites elliptiques dans les espaces de Sobolev avec poids*, C.R.A.S. Paris, **270** (1970), 857-860.

[4] P. GRISVARD, *Espaces intermediaires entre espaces de Sobolev avec poids*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **17** (1963), 255-296.

[5] B. HANOUZET, *Espaces de Sobolev avec poids et interpolation*, C.R.A.S. Paris, **271** (1971), 26-29.

[6] G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD - G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[7] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. **1**, Dunod, 1968.

[8] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problemi ai limiti non-omogenei* (V), Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **16** (1962), 1-44.

[9] J. L. LIONS - J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études, **19** (1964), 5-68.

[10] E. MAGENES, *Spazi d'interpolazione ed equazioni a derivate parziali*, Atti Congresso U.M.I., Genova, (1964), 134-197.

[11] J. PEETRE, *Espaces d'interpolation et théoreme de Sobolev*, Ann. Inst. Fourier, **16** (1966), 297-317.
[12] M. SCHECHTER, *Complex interpolation*, Compositio Math., (1967), 117-147.
[13] H. TRIEBEL, *Singülare elliptische Differentialgleichungen und Interpolationssätze für Sobolev-Slobodesckiy-Räume mit Gewichtsfunktionen*, Arch. Rational Mech. Anal., **32** (1969), 111-134.
[14] J. WLOKA, *Grundräume und verallgemeinerte Funktionen*, Springer, 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 Febbraio 1973.