RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

COSTANTIN NASTASESCU

La filtrazione di Gabriel - II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 189-195

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__189_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 50 (1973)

La filtrazione di Gabriel - II.

Costantin Nastasescu (*)

0. Alcune definizioni.

Il presente lavoro continua la ricerca intrapresa in [5]. Siano A un anello commutativo e con unità e Mod A la categoria degli A-moduli unitari.

Si può definire per induzione transfinita su Mod A una filtrazione nel seguente modo: denotiamo con $(\text{Mod } A)_0$ la più piccola categoria localizzante di Mod A [2] contenente tutti gli A-moduli semplici.

(Nel senso di Lambek [4], $(\text{Mod } A)_0$ è la minima teoria della torsione nella quale tutti gli A-moduli semplici sono di torsione).

Se α è un ordinale non limite, allora $(\text{Mod } A)_\alpha$ è la sottocategoria localizzante di Mod A tale che la categoria quoziente $(\text{Mod } A)_\alpha/\text{Mod})_{\alpha-1}$ sia la minima sottocategoria localizzante di $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_{\alpha-1}$ contenente tutti gli oggetti semplici.

Se α è un numero ordinale limite, allora $(\text{Mod } A)_\alpha$ è la più piccola categoria localizzante contenente tutte le sottocategorie $(\text{Mod } A)_\beta$ con $\beta < \alpha$. In questo modo otteniamo una successione transfinita: $(\text{Mod } A)_0 \subseteq \subseteq (\text{Mod } A)_1 \subseteq \ldots \subseteq (\text{Mod } A)_\alpha \subseteq (\text{Mod } A)_{\alpha+1} \subseteq \ldots$ di sottocategorie locallizanti.

È chiaro che, poichè A è un insieme, che esiste un ordinale ξ tale che

$$(\text{Mod } A)_\xi = (\text{Mod } A)_{\xi+1} = \ldots .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Universitatea Bucuresti, Facultatea Matematica, Mecanica - Str. Academiei 14 - Romania.

Questo lavoro è stato fatto mentre l'autore usufruiva di una borsa di dircerca per matematici stranieri del C.N.R. presso l'Università di Ferrara.

Se esiste un ordinale α tale $(\mathrm{Mod}\, A)_\alpha = \mathrm{Mod}\, A$ diciamo che l'anello A ha dimensione di *Krull* *definita*, oppure che A è semi-noetheriano (7).

In tal caso il minimo ordinale α per cui $(\mathrm{Mod}\, A)_\alpha = \mathrm{Mod}\, A$ si chiama la dimensione di *Krull* di $\mathrm{Mod}\, A$ e lo si denota com $\dim_k A$.

Sia $\mathrm{spec}\, A$ lo spettro primo di A (che noi considereremo senza topologia). In [5] è stata definita su $\mathrm{spec}\, A$ la seguente filtrazione:

$(\mathrm{Spec}\, A)_0$ è l'insieme di tutti gli ideali massimali di A; se α è un ordinale non limite $(\mathrm{Spec}\, A)_\alpha = \{P | P \in \mathrm{Spec}\, A;\ \forall Q \in \mathrm{Spec}\, A,\ P \subset Q,\ P \neq Q \Rightarrow Q \in (\mathrm{Spec}\, A)_{\alpha-1}\}$. Se α è un ordinale limite

$$(\mathrm{Spec}\, A)_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mathrm{Spec}\, A)_\beta\ .$$

È chiaro che esiste un numero ordinale η tale che:

$$(\mathrm{Spec}\, A)_\eta = (\mathrm{Spec}\, A)_{\eta+1} = \dots\ .$$

Se esiste un ordinale α tale che $(\mathrm{Spec}\, A)_\alpha = \mathrm{Spec}\, A$ si dice [5] che $\mathrm{Spec}\, A$ ha dimensione di *Krull* definita. In [5] è stato dimostrato che $\mathrm{Spec}\, A$ ha dimensione di *Krull* definita se e solo se l'anello A verifica la condizione del massimo per gli ideali primi.

1. Risultati preliminari.

Se M è un A-modulo qualunque, denotiamo con $\mathrm{Ass}(M)$ l'insieme.

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\boldsymbol{p} | \boldsymbol{p} \in \mathrm{Spec}\, A,\ \exists x \in M,\ x \neq 0,\ \boldsymbol{p} = \mathrm{Ann}\,(x)\}\ .$$

Teorema 1.1 [5]. *Siano α un numero ordinale ed M un A-modulo; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

1) $M \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$;
2) $\mathrm{Ass}\,(M/M') \neq \emptyset$ *e* $\mathrm{Ass}\,(M/M') \subseteq (\mathrm{Spec}\, A)_\alpha$ *per ogni* $M' \subseteq M$, $M' \neq M$.

La dimostrazione è data in [5].

Corollario 1.2 [5]. *Sia A un anello commutativo con unità, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1) *A ha dimensione Krull definita (oppure è semi neotheriano)*;

2) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *per ogni* $M \neq 0$ $\mathrm{Spec}\, A$ *ha dimensione Krull definita*;
3) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *per ogni* $M \neq 0$ *ed* A *verifica la condizione del massimo per gli ideali primi*;
4) *Per ogni ideale* $\boldsymbol{a} \subset A$, $\boldsymbol{a} \neq A$, *esiste* $x \in A$ *tale che* $\{\boldsymbol{a}: x\}$ *è un ideale primo ed* A *verifica la condizione del massimo per ideali primi.*

La dimostrazione è data in [5].

Ricordiamo che l'anello A ha dimensione di Krull (classica) finita se l'estremo superiore delle lunghezze delle catene di ideali primi è finita.

COROLLARIO 1.3 [5]. *Se* A *è un anello con dimensione Krull finita, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

1) A *ha dimensione Krull definita*;
2) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *per ogni* $M \neq 0$, $M \in \mathrm{Mod}\, A$.

COROLLARIO 1.4. *Sia* A *un anello di valutazione di altezza* n [1]. *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

1) *Il gruppo di valutazione* $G \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n}$ (*ordinato lessicografico*).
2) A *ha dimensione Krull definita.*

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Per $n = 1$ risulta a [5]. Supponiamo la affermazione vera per $n-1$. Se $\boldsymbol{p}$ è un ideale primo tale che $ht(\boldsymbol{p}) = 1$ allora $A/\boldsymbol{p}$ ha dimensione Krull definita (per induzione) e $A\boldsymbol{p}$ è noetheriano. Quindi $\bigcap_{n \geqslant 1} \boldsymbol{p}^n = 0$. Se $\boldsymbol{a}$ è un ideale $\neq 0$ allora esiste $k \geqslant 1$ tale che $\boldsymbol{a} \supseteq \boldsymbol{p}^k$; da qui segue $\mathrm{Ass}\,(A/\boldsymbol{a}) \neq \emptyset$.

Per corollario 1.2 risulta 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Per $n = 1$ risulta a [5]. Sia H il gruppo isolato associato all'ideale $\boldsymbol{p}(ht(\boldsymbol{p}) = 1)$. Poichè $A\boldsymbol{p}$ è discreto [5] allora dalla sequenza esatta:

$$0 \to H \to G \to G/H \simeq \mathbb{Z} \to 0$$

segue $G \simeq \mathbb{Z} \times H$ dove $H \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n-1}$ (per ipotesi di induzione).

Indichiamo con la F_α la topologia additiva (oppure il sistema topologizzante ed idempotente nel senso di [2]) associata alla sottocategoria localizzante $(\mathrm{Mod}\, A)_\alpha$, cioè

$$F = \{\boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \subseteq A,\ A/\boldsymbol{a} \in (\mathrm{Mod}\, A)_\alpha\}$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia A un anello commutativo ed $\boldsymbol{a} \subset A$ un ideale; allora le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

1) $\boldsymbol{a} \in F_\alpha$;

2) *per ogni ideale $\boldsymbol{b} \subset A$, $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$, esiste un elemento $x \in A$, tale che $(\boldsymbol{b} : x)$ è un ideale primo e*

$$(\boldsymbol{b} : x) \in (\operatorname{Spec} A)_\alpha ;$$

3) *$A/\boldsymbol{a}$ è un anello con dimensione Krull definita e* $\dim_k A/\boldsymbol{a} \leqslant \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2) Se $\boldsymbol{b} \subseteq A$; $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$, allora $\boldsymbol{b} \in F_\alpha$; dunque $A/\boldsymbol{b} \in (\operatorname{Mod} A)_\alpha$. Poichè $\operatorname{Ass}(A/\boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ esiste un elemento $\hat{x} \in A/\boldsymbol{b}$, tale che $\hat{x} \neq 0$ e $\operatorname{Ann}(\hat{x})$ è un ideale primo. È chiaro che $\operatorname{Ann}(\hat{x}) = (\boldsymbol{b} : x)$ e $(\boldsymbol{b} : x) \in (\operatorname{Spec} A)_\alpha$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sia M un $A/\boldsymbol{a}$-modulo, $M \neq 0$; allora M è un A-modulo non-nullo. Consideriamo $m \in M$, $m \neq 0$. È chiaro che $\operatorname{Ann}(m) \supseteq \boldsymbol{a}$ e $\operatorname{Ann}(m) \neq A$. Supponiamo che esista $x \in A$ tale che $\boldsymbol{p} = (\operatorname{Ann}(m) : x)$ sia un ideale primo appartenente a $(\operatorname{Spec} A)_\alpha$.

Essendo $A/\boldsymbol{a} \cdot m \simeq A/\operatorname{Ann}(m)$, allora $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Ass} A/\boldsymbol{a}(M)$.

Dal teorema 1.1 e dal Corollario 1.2 segue che $A/\boldsymbol{a}$ è un anello con dimensione di Krull definita e $\dim_k A/\boldsymbol{a} \leqslant \alpha$ 3) $\Rightarrow$ 1) Se ottiene dal teorema 1.1.

Della teorema 1.1. segue:

PROPOSIZIONE 1.6. *Sia $M \in (\operatorname{Mod} A)_{\alpha_0}$, allora esiste una filtrazione $(M_\alpha)_{\alpha \in W}$ indicata con un insieme di numeri ordinali, con le seguenti proprietà:*

1) $$M_0 = \sum_{\substack{x \in M \\ \operatorname{Ann}(x) \text{ primo}}} Ax = \sum_{\substack{x \in M \\ \operatorname{Ann}(x) \in (\operatorname{Spec} A)_{\alpha_0}}} Ax ,$$

2) *Se α è un numero ordinale non limite, allora*

$$M_\alpha / M_{\alpha-1} = \sum_{\substack{x \in M/M_{\alpha-1} \\ \operatorname{Ann}(x) \text{ primo}}} Ax = \sum_{\substack{x \in M/M_{\alpha-1} \\ \operatorname{Ann}(x) \in (\operatorname{Spec} A)_{\alpha_0}}} Ax ,$$

Se α è un numero ordinale limite, allora

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta .$$

3) $$M = \bigcup_{\alpha \in W} M_\alpha .$$

2. La filtrazione di Gabriel associata ad un anello di polinomi.

Sia A un anello commutativo con unità, denotiamo con $A[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello di polinomi in n-variabili a coefficienti in A.

Se M è un A-modulo poniamo:

$$M[X_1, X_2, \ldots, X] = M \underset{A}{\otimes} A[X_1, \ldots, X_n] .$$

TEOREMA 2.1. *Siano A un anello commutativo ed $\alpha = \theta + n$, un numero ordinale (θ ordinale limite ed n un numero naturale) Se M è un A-modulo tale che $M \in (\operatorname{Mod} A)_\alpha$, allora:*

$$M[x] \in \big(\operatorname{Mod} A[x]\big)_\theta \quad \textit{se} \quad n = 0$$

$$M[x] \in \big(\operatorname{Mod} A[x]\big)_{\theta+k} \quad \textit{dove} \quad n \neq 0, \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n+1$$

Se $\alpha = 0$ allora $M \in (\operatorname{Mod} A)_0$, quindi M è uno A-modulo semi-artiniano [6] e per il teorema 3.5. di [5], $M[X] \in \big(\operatorname{Mod} A[x]\big)_1$.

Supponiamo che la nostra affermazione vera per ogni numero ordinale $\beta < \alpha$ e dimostriamola per α. Sia $M \in (\operatorname{Mod} A)_\alpha$; per la proposizione 1.6., possiamo supporre M della forma $M = A/\boldsymbol{p}$ dove $\boldsymbol{p} \in (\operatorname{Spec} A)_\alpha$. Indichiamo con B, l'anello $A/\boldsymbol{p}$ e con K il corpo delle frazioni di B. Se S è l'insieme di tutti elementi non-nulli din B, allora $K = B_s$ e dunque

$$K[X] = \big(B[X]\big)_s .$$

Abbiamo la sequenza esatta di categorie:

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{A} \to \operatorname{Mod} B[X] \to \operatorname{Mod} K[X] \to 0$$

dove $\operatorname{Mod} K[X]$ è una categoria quoziente dalla $\operatorname{Mod} B[X]$ e $\mathcal{A}$ una categoria localizzata dello $\operatorname{Mod} B[X]$, cioè:

$$\mathcal{A} = \{M \in M \in \operatorname{Mod} B[X],\ \forall x \in M,\ x \neq 0,\ \operatorname{Ann}(x) \cap S \neq \emptyset\} .$$

Sia $M \in \mathcal{A}$ ed $x \in M$, $x \neq 0$, poniamo:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{Ann}(x) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cap B .$$

Poichè $\boldsymbol{a} \cap S \neq \emptyset$, allora $\boldsymbol{b} \neq 0$ e quindi l'anello $B/\boldsymbol{b}$ è con dimensione Krull definita ed inoltre:

$$\beta = \dim_k B/\boldsymbol{b} < \alpha .$$

Da qui risulta che $B/\boldsymbol{b}[X]$ è un anello con dimensione Krull definita e quindi $B/b[X]$ è un $A[X]$-modulo che appartiene a $(\text{Mod}\, A[X])_{\beta+1}$.

Della sequenza esatta di $A[X]$-moduli

$$B/b[X] \to B[X]/\boldsymbol{a} \to 0$$

otteniamo che $B[X]/\boldsymbol{a} \in (\text{Mod}\, B[X])_{\beta+l}$ e quindi $\mathcal{A} \subseteq (\text{Mod}\, B[X])_{\beta+l}$, cioè $\mathcal{A}$ è una categoria con dimensione Krull definita.

D'altra parte dalla proposizione 1 ([2] chap. IV) e della sequenza esatta $(*)$ si ottiene che l'anello $B[X]$ è con dimensione Krull definita e

$$\dim_k B[X] \leqslant \beta + l + \dim_k K[X] = \beta + l + 2$$

($K[X]$ essendo un anello principale).

Ora se $n = 0$, allora $\alpha = \theta$ e $\beta + l + 2 < \alpha$ quindi $M[X] = B[X] \in \in (\text{Mod}\, A[X])_\theta$.

Se $n \neq 0$, possiamo supporre che $M = A/p \in (\text{Mod}\, A)_\alpha$ e $M \notin \notin (\text{Mod}\, A)_{\alpha-1}$. In questo caso $\beta \leqslant \alpha - 1 = \theta + n - 1$ Allora per ipotesi $\mathcal{A} \subseteq (\text{Mod}\, A[X])_{\theta+k'}$, dove $n \leqslant k' \leqslant 2n - 1$.

Dalla sequenza esatta $(*)$ e dalla prop 1 ([2], chap IV) risulta che $M[X] = B[X] \in (\text{Mod}\, A[X])_{\theta+k}$, dove $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n + 1$.

Corollario 2.2. *Sia A un aχello commutativo, allora le affermazioni che seguono sono equivalenti*:

1) *A ha dimensione Krull definita*;
2) *$A[X_1, \ldots, X_n]$ ha dimensione Krull definita.*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Ragionando per induzione su n, basta provare il corollario per $n = 1$.

Poichè A ha dimensione Krull definita, allora esiste un numero ordinale α tale che $\text{Mod}\, A = (\text{Mod}\, A)_\alpha$.

Consideriamo un $A[X]$-Modulo P ed il morfismo

$$\varphi_\alpha\, P[X] \to P$$

così definita

$$\varphi(p \otimes Q(x)) = Q(x) \cdot p \qquad \text{con } p \in P \text{ e } Q(X) \in A[x]$$

è surettivo. D'altra parte $P \in (\text{Mod } A)_\alpha$ e per il teorema 2.1., $P[X] \in (\text{Mod } A[X])_{\alpha+k}$, pertanto $P \in (\text{Mod } A[X])_{\alpha+1}$ (la sottocategoria $(\text{Mod } A[X])_{\alpha+k}$ è localizzante). (k nuero naturale, $k \geqslant 0$)

2) $\Rightarrow$ 1). Poichè $A \cong A[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)$ allora otteniamo da [5] che A è un anello con dimensione Krull definita.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 6, Paris, Hermann.

[2] P. Gabriel, *Des catègories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 323-448.

[3] J. Kaplansky, *Commutative Rings*, Lectures in Mathematics, Chicago.

[4] J. Lambek, *Tonsion theories, Additive semantics and Rings of Quotienst*, Lecture Notes on Math., Springer-Verlag, 177.

[5] C. Nastasescu, *La filtration de Gabriel I*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (in corso di stampa).

[6] C. Nastasescu - N. Popescu, *Anneaux semi-artinien*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 357-368.

[7] N. Popescu, *La decomposition primaires des anneaux semi-noetheriens*, Journal of Algebra, **23**, no. 3 (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1973.