

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

**Su una estensione del metodo d'interpolazione
complesso**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 243-298

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__243_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UNA ESTENSIONE DEL METODO
D'INTERPOLAZIONE COMPLESSO

ANGELO FAVINI *)

Introduzione.

Un'estensione del metodo d'interpolazione reale a n -ple di spazi di Banach è stata fatta da A. Yoshikawa [12].

Il presente lavoro è invece dedicato allo studio del metodo d'interpolazione complesso per una terna di spazi di Banach, di cui si trova già un cenno in J. L. Lions, [8]: l'estensione da tre a n non presenta difficoltà nuove.

La prima parte è dedicata alla prova di risultati interpolatori corrispondenti a quelli già stabiliti per coppie di spazi, (cfr. [1], [4], [9], [10]).

Viene poi studiata la relazione fra terne e coppie di spazi d'interpolazione complessa, e in particolare, si prova (vedi, per la notazione, la Definizione 2) che, se A_0, A_1 sono spazi di Banach,

$$[A_0, A_1, A_1]_{\theta, \rho} = [A_0, A_1]_{\theta + \rho}.$$

(cfr. la Nota al Teorema 6).

Viene poi provato che, sotto una certa condizione, $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$; inoltre, si stabilisce un legame di immersione dipendente dai due parametri e , precisamente,

$$A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0 \text{ normalmente} \Rightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'},$$

con $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, $0 \leq \theta' + \rho' \leq 1$, $\theta \leq \theta'$, $\rho \leq \rho'$ (cfr. Teorema 8).

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Bologna.

Poi si ottiene, fra l'altro, che in generale valgono le seguenti immersioni

$$(I) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho},$$

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [[A_0, A_1]_{\theta+\rho}, [A_0, A_2]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}.$$

Si considerano infine tre esempi. I primi due sono dati dagli spazi $B^{\lambda, p}$ e $H^{\lambda, p}$ e si verifica che per essi le inclusioni (I) sopra richiamate sono delle identità; il terzo esempio è una estensione a due operatori del calcolo operazionale che si trova nel lavoro di M. Schechter [9].

Una terna d'interpolazione (B_0, B_1, B_2) è una terna di spazi di Banach complessi, B_0, B_1, B_2 , immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico \mathcal{A} .

Se su $B_0 \cap B_1 \cap B_2 = \{x \in \mathcal{A}, x \in B_i, i=0, 1, 2\}$ si introduce la norma

$$\|x\|_{B_0 \cap B_1 \cap B_2} = \max\{\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}, \|x\|_{B_2}\},$$

$B_0 \cap B_1 \cap B_2$ diventa uno spazio di Banach.

Analogamente, se $B_0 + B_1 + B_2$ è lo spazio vettoriale degli elementi x di \mathcal{A} per cui esistono $x_i \in B_i$ ($i=0, 1, 2$) tali che

$$x = x_0 + x_1 + x_2,$$

la funzione

$$x \rightarrow \|x\|_{B_0 + B_1 + B_2} = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1} + \|x_2\|_{B_2}\}$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutte le terne x_0, x_1, x_2 con $x = x_0 + x_1 + x_2$, è una norma su $B_0 + B_1 + B_2$ e $B_0 + B_1 + B_2$ è uno spazio di Banach.

Notiamo che sia $B_0 \cap B_1 \cap B_2$ che $B_0 + B_1 + B_2$ sono immersi con continuità in \mathcal{A} .

DEFINIZIONE 1. Siano B_0, B_1, B_2 spazi di Banach immersi con continuità in \mathcal{A} . Consideriamo l'insieme $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ delle funzioni $f = f(z, w)$, definite su $\overline{\Omega}$, a valori in $B_0 + B_1 + B_2$, dove

$$\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, \Re z \geq 0, \Re w \geq 0, 0 \leq \Re z + \Re w \leq 1\},$$

che sono:

- (a) continue e limitate da $\overline{\Omega}$ a $B_0 + B_1 + B_2$;
- (b) olomorfe da Ω a $B_0 + B_1 + B_2$;
- (c) $\forall t, \tau \in \mathbf{R}, f(it, i\tau) \in B_0, f(1+it, i\tau) \in B_1, f(it, 1+i\tau) \in B_2,$

la f essendo continua e uniformemente limitata nella topologia di tali spazi.

PROPOSIZIONE 1. *Munito della norma*

$$\|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \max \left\{ \sup_{i, \tau} \|f(it, i\tau)\|_{B_0}, \sup_{i, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{B_1}, \sup_{i, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{B_2} \right\},$$

$\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella di Calderón, relativa a una coppia di spazi di Banach (cfr. [1], p. 129), in base al teorema di convessità in più dimensioni (cfr. [3], p. 521).

DEFINIZIONE 2. Per ogni $(\theta, \rho) \in \overline{\Omega}, \theta, \rho \in \mathbf{R}$, lo spazio $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è l'insieme di tutti gli elementi x di $B_0 + B_1 + B_2$ tali che $x = f(\theta, \rho)$ per una $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$, normato con

$$\|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}} = \inf_{f(\theta, \rho) = x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}.$$

PROPOSIZIONE 2. $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo, infatti, che $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è l'immagine di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ attraverso l'applicazione lineare da $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ a $B_0 + B_1 + B_2$ definita da: $f \rightarrow f(\theta, \rho)$.

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \|f(\theta, \rho)\|_{B_0 + B_1 + B_2} &\leq \max \left\{ \sup_{i, \tau} \|f(it, i\tau)\|_{B_0 + B_1 + B_2}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{i, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{B_0 + B_1 + B_2}, \sup_{i, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{B_0 + B_1 + B_2} \right\} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}. \end{aligned}$$

Pertanto, $f \rightarrow f(\theta, \rho)$ è continua da $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ a $B_0 + B_1 + B_2$.

Così se $\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ denota il sottospazio di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ di tutte le funzioni f tali che $f(\theta, \rho) = 0$, allora $\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ è il nucleo della $f \rightarrow f(\theta, \rho)$ e, per la continuità di tale applicazione, $\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$.

Di qui, $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è identificato allo spazio quoziente $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)/\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ ed è perciò uno spazio di Banach, (cfr. [1], p. 129).

OSSERVAZIONE. Notiamo che

$$B_0 \cap B_1 \cap B_2 \hookrightarrow [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow B_0 + B_1 + B_2,$$

dove il simbolo \hookrightarrow denota immersione continua.

Infatti, che $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow B_0 + B_1 + B_2$ è chiaro.

Sia $x \in B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Sia f la funzione tale che

$$f(z, w) = x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Allora $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \max\{\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}, \|x\|_{B_2}\} = \|x\|_{B_0 \cap B_1 \cap B_2},$$

da cui

$$\|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}} = \inf_{f(\theta, \rho) = x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} \leq \|x\|_{B_0 \cap B_1 \cap B_2}.$$

TEOREMA 1. *Siano (A_0, A_1, A_2) e (B_0, B_1, B_2) due terne di interpolazione, $A_i \hookrightarrow \mathcal{A}$, $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}$. Sia T un operatore lineare da $A_0 + A_1 + A_2$ a $B_0 + B_1 + B_2$ tale che $x \in A_i$ implica che $Tx \in B_i$ ($i=0, 1, 2$) e*

$$\|Tx\|_{B_i} \leq C_i \|x\|_{A_i}.$$

Allora, $x \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \Rightarrow Tx \in [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ e

$$\|Tx\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^\theta C_2^\rho \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per comodità di scrittura, useremo a volte, nella

prova di questo risultato e nel seguito, $A_{\theta, \rho}$ per $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, $B_{\theta, \rho}$ per $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$, ecc.

Sia dunque x un elemento di $A_{\theta, \rho}$. Allora dalla Definizione 2 segue che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che

$$f(\theta, \rho) = x \quad \text{e} \quad \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|x\|_{A_{\theta, \rho}} + \varepsilon.$$

Poniamo:

$$g(z, w) = C_0^{z+w-1} C_1^{-z} C_2^{-w} T(f(z, w)), \quad (z, w) \in \bar{\Omega}.$$

Si ha:

$$\|g(it, i\tau)\|_{B_0} = C_0^{-1} \|T(f(it, i\tau))\|_{B_0} \leq \|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)};$$

$$\begin{aligned} \|g(1+it, i\tau)\|_{B_1} &= C_1^{-1} \|T(f(1+it, i\tau))\|_{B_1} \leq \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g(it, 1+i\tau)\|_{B_2} &= C_2^{-1} \|T(f(it, 1+i\tau))\|_{B_2} \leq \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}. \end{aligned}$$

Inoltre, poichè T è un operatore lineare e continuo da A_i a B_i e quindi da $A_0 + A_1 + A_2$ a $B_0 + B_1 + B_2$, e $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, g risulta limitata e continua da $\bar{\Omega}$ a $B_0 + B_1 + B_2$, olomorfa da Ω a $B_0 + B_1 + B_2$.

Dunque, $g \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$. D'altro canto, $g(\theta, \rho) = C_0^{\theta+\rho-1} C_1^{-\theta} C_2^{-\rho} T x$. Quindi, poichè

$$\|g\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|x\|_{A_{\theta, \rho}} + \varepsilon,$$

e ε è un numero positivo arbitrario,

$$\|Tx\|_{B_{\theta, \rho}} = C_0^{1-\theta-\rho} C_1^{\theta} C_2^{\rho} \|g(\theta, \rho)\|_{B_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^{\theta} C_2^{\rho} \|x\|_{A_{\theta, \rho}}.$$

Il Teorema 1 sopra stabilito ammette una generalizzazione a certi operatori non lineari (cfr. [4]). Infatti, vale la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Supponiamo $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$, $B_2 \hookrightarrow B_1 \hookrightarrow B_0$. Sia*

T un operatore derivabile secondo Fréchet da A_0 a B_0 , tale che:

$$u \in A_i \Rightarrow \|Tu\|_{B_i} \leq C_i \|u\|_{A_i} \quad (i=0, 1, 2).$$

Allora,

$$u \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \Rightarrow \|Tu\|_{B_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^\theta C_2^\rho \|u\|_{A_{\theta, \rho}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Prima di tutto notiamo che se $E_2 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E_0$, allora $E_0 + E_1 + E_2$ coincide con E_0 , le norme nei due spazi essendo equivalenti, (cfr. [1], p. 160), per il teorema dell'inverso continuo.

Il risultato segue allora dal fatto che, se φ è una funzione di $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, quindi olomorfa da Ω a A_0 , e T è Fréchet-derivabile da A_0 a B_0 , allora $T \circ \varphi$ è separatamente olomorfa, e di qui olomorfa, da Ω a B_0 .

In base a questa osservazione, la Proposizione 3 è conseguenza immediata del Teorema 1.

DEFINIZIONE 3. Se A, B sono spazi di Banach e $H(z, w) \in L(A, B)$ per ogni coppia $(z, w) \in \Xi \subset \mathcal{C}^2$, si dice che H è continua (olomorfa) su Ξ se per ogni $x \in A$, la funzione $(z, w) \rightarrow H(z, w)x$ è continua (olomorfa) da Ξ a B , (cfr. [9], p. 123).

TEOREMA 2. Sia $H(z, w)$ un elemento dello spazio $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$, per ogni $(z, w) \in \overline{\Omega}$; inoltre $H(z, w)$ sia una funzione continua e limitata su $\overline{\Omega}$, olomorfa su Ω .

Se

$$H(it, i\tau) \in L(A_0, B_0), \quad H(1+it, i\tau) \in L(A_1, B_1), \quad H(it, 1+i\tau) \in L(A_2, B_2)$$

e sono continui e uniformemente limitati in questi spazi, con

$$\|H(it, i\tau)\|_{A_0 \rightarrow B_0} \leq C_0, \quad \|H(1+it, i\tau)\|_{A_1 \rightarrow B_1} \leq C_1,$$

$$\|H(it, 1+i\tau)\|_{A_2 \rightarrow B_2} \leq C_2,$$

allora

$$H(\theta + it, \rho + i\tau) \in L(A_{\theta, \rho}, B_{\theta, \rho}), \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}$$

e

$$\| H(\theta + it, \rho + i\tau) \|_{A_{\theta, \rho} \rightarrow B_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^\theta C_2^\rho.$$

DIMOSTRAZIONE. È del tutto analoga a quella del Teorema 1. Basta, per esempio, introdurre la funzione

$$g_{t, \tau}(z, w) = C_0^{z+w-1} C_1^{-z} C_2^{-w} H(z + it, w + i\tau) f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

con t, τ numeri reali e $f(z, w)$ elemento di $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ per cui

$$f(\theta, \rho) = x, \quad \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \| x \|_{A_{\theta, \rho}} + \varepsilon.$$

TEOREMA 3. Sia B un operatore n -lineare da

$$(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + A_2^{(1)}) \times \dots \times (A_0^{(n)} + A_1^{(n)} + A_2^{(n)}) \text{ a } B_0 + B_1 + B_2,$$

tale che

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_i^{(1)} \times \dots \times A_i^{(n)}$$

implica che $B(x_1, \dots, x_n) \in B_i$ ($i=0, 1, 2$) e

$$\| B(x_1, \dots, x_n) \|_{B_i} \leq M_i \| x_1 \|_{A_i^{(1)}} \dots \| x_n \|_{A_i^{(n)}}.$$

Allora

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_{\theta, \rho}^{(1)} \times \dots \times A_{\theta, \rho}^{(n)} \Rightarrow B(x_1, \dots, x_n) \in B_{\theta, \rho}$$

e

$$\| B(x_1, \dots, x_n) \|_{B_{\theta, \rho}} \leq M_0^{1-\theta-\rho} M_1^\theta M_2^\rho \| x_1 \|_{A_{\theta, \rho}^{(1)}} \dots \| x_n \|_{A_{\theta, \rho}^{(n)}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'affermazione per il caso di $n=2$. Sia

$$x \in [A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}]_{\theta, \rho}, \quad y \in [A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}]_{\theta, \rho}.$$

Allora, $\forall \varepsilon > 0$ esistono

$$f \in \mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}), \quad g \in \mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})$$

per cui

$$x = f(\theta, \rho), \quad \|f\|_{\mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)})} \leq \|y\|_{A_{\theta, \rho}^{(1)}} + \varepsilon;$$

$$y = g(\theta, \rho), \quad \|g\|_{\mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})} \leq \|x\|_{A_{\theta, \rho}^{(2)}} + \varepsilon.$$

Sia

$$\Phi(z, w) = M_0^{z+w-1} M_1^{-z} M_2^{-w} B(f(z, w), g(z, w)), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 1, si riconosce che $\Phi \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ e

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)})} \|g\|_{\mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})}.$$

Di qui, poichè $\Phi(\theta, \rho) = M_0^{\theta+\rho-1} M_1^{-\theta} M_2^{-\rho} B(x, y)$, risulta

$$\begin{aligned} \|M_0^{\theta+\rho-1} M_1^{-\theta} M_2^{-\rho} B(x, y)\|_{B_{\theta, \rho}} &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)})} \|g\|_{\mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})} \\ &\leq [\|x\|_{A_{\theta, \rho}^{(1)}} + \varepsilon][\|y\|_{A_{\theta, \rho}^{(2)}} + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε , l'affermazione è così provata. Per $n > 2$, la prova è del tutto analoga.

TEOREMA 4. *Sia $x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$. Allora, $\forall(\theta, \rho) \in \overline{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$, vale*

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x\|_{A_0}^{1-\theta-\rho} \|x\|_{A_1}^{\theta} \|x\|_{A_2}^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo:

$$f(z, w) = \left(\frac{\|x\|_{A_1}}{\|x\|_{A_0}} \right)^{z-\theta} \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_2}} \right)^{w-\rho} x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Si è supposto $x \neq 0$. In caso contrario, l'affermazione è ovvia. Dalla definizione segue che f è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olo-morfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. Poi,

$$\begin{aligned} \|f(it, i\tau)\|_{A_0} &= \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = \\ &= \|x\|_{A_0}^{1-\theta-\rho} \|x\|_{A_1}^{\theta} \|x\|_{A_2}^{\rho}. \end{aligned}$$

Quindi, $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$. Inoltre, $f(\theta, \rho) = x$. Pertanto,

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} = \inf \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|x\|_{A_0}^{1-\theta-\rho} \|x\|_{A_1}^{\theta} \|x\|_{A_2}^{\rho}.$$

LEMMA 1. Sia $\Theta = \{z \in \mathbf{C}, 0 < \Re z < 1\}$ e V, A, B siano spazi di Banach, con $A+B \hookrightarrow V$.

Sia poi $f: \overline{\Theta} \rightarrow V$, continua e limitata da $\overline{\Theta}$ a V , olomorfa da Θ a V , tale che $f(it) \in A$, ed è continua e limitata da \mathbf{R} a A , $f(1+it) \in B$ ed è continua e limitata da \mathbf{R} a B .

Allora $f(\theta) \in [A, B]_{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$, (per cui, dunque, si può supporre $f \in \mathcal{H}(A, B)$).

DIMOSTRAZIONE. Poniamo (cfr. [1], p. 160)

$$g(z) = e^{(z-\theta)^2} f(z), \quad z \in \overline{\Theta}.$$

Poichè f è continua e limitata in $\overline{\Theta}$, g è continua e limitata in $\overline{\Theta}$; inoltre, g è chiaramente olomorfa in Θ .

Poi, $g(it) \in A$, $g(1+it) \in B$ e g è continua nella topologia di tali spazi. Infine,

$$\|g(it)\|_A = \|e^{(it-\theta)^2} f(it)\|_A = e^{-t^2} \|e^{\theta^2} f(it)\|_A \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0;$$

$$\|g(1+it)\|_B = \|e^{(1+it-\theta)^2} f(1+it)\|_B = e^{-t^2} \|e^{1+\theta^2-2\theta} f(1+it)\|_B \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0.$$

Ne segue, per un risultato di Calderón, (cfr. [1], p. 116), che g è continua e limitata da $\overline{\Theta}$ a $A+B$, olomorfa da Θ a $A+B$.

Pertanto, $g(\theta) \in [A, B]_{\theta}$. Ma $g(\theta) = f(\theta)$; di qui, $f(\theta) \in [A, B]_{\theta}$.

PROPOSIZIONE 4. Se $0 \leq \theta, \rho \leq 1$ allora

$$(1) \quad [B_0, B_1, B_2]_{\theta, 0} \hookrightarrow [B_0, B_1]_{\theta};$$

$$(2) \quad [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [B_0, B_2]_{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la (1). Sia x un elemento di $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, 0}$. Allora, per definizione, esiste una $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ tale che $f(\theta, 0) = x$.

Ora,

$$f(it, i\tau) \in B_0, f(1+it, i\tau) \in B_1, f(it, 1+i\tau) \in B_2, \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Di qui, la funzione

$$g(z) = f(z, 0), \quad 0 \leq \Re z \leq 1,$$

soddisfa

$$g(it) = f(it, 0) \in B_0, \quad g(1+it) = f(1+it, 0) \in B_1,$$

con

$$\|g(it)\|_{B_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}, \quad \|g(1+it)\|_{B_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}$$

e tali funzioni sono continue in queste norme.

Inoltre, g è, per le proprietà della $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$, continua e limitata da $\bar{\Theta}$ a $B_0 + B_1 + B_2$, olomorfa da Θ a $B_0 + B_1 + B_2$.

Allora, per il Lemma 1, segue che g è continua e limitata da $\bar{\Theta}$ a $B_0 + B_1$, olomorfa da Θ a $B_0 + B_1$.

Così, $g \in \mathcal{H}(B_0, B_1)$ e

$$x = f(\theta, 0) = g(\theta).$$

Infine,

$$\|g\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1)} = \max \left\{ \sup_t \|g(it)\|_{B_0}, \sup_t \|g(1+it)\|_{B_1} \right\} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}.$$

D'altra parte, f è un elemento di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ per cui $f(\theta, 0) = x$.

Così

$$\begin{aligned} \|x\|_{[B_0, B_1]_0} &= \inf_{g(\theta)=x} \|g\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1)} \leq \inf_{f(\theta, 0)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \\ &= \|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, 0}}. \end{aligned}$$

La prova della (2) è analoga. Infatti, se $x \in [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$, allora $x = f(0, \rho)$, con $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$. Definiamo:

$$h(w) = f(0, w), \quad 0 \leq \Re w \leq 1.$$

Vale $h(\rho) = f(0, \rho) = x$. Inoltre, come sopra, si prova che h appartiene a $\mathcal{H}(B_0, B_2)$, poichè

$$f(it, i\tau) \in B_0, f(it, 1 + \tau) \in B_2, \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Infine, dal fatto che $\|h\|_{\mathcal{H}(B_0, B_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}$ e che f è arbitrariamente scelto, segue

$$\|x\|_{[B_0, B_2]_{\rho}} = \inf_{h(\rho)=x} \|h\|_{\mathcal{H}(B_0, B_2)} \leq \inf_{h(0, \rho)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}}.$$

TEOREMA 5. Sia $(\theta, \rho) \in \overline{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$. Allora

$$(1) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta};$$

$$(2) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho};$$

$$(3) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 1-\theta-\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE Proviamo la (1). Sia x un elemento di $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$. Allora esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$.

Poniamo

$$g(z, w) = f(w, z), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

In base alla definizione e alle proprietà di f, g risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$.

Poi, dal momento che $f(it, i\tau) \in A_0, f(1 + it, i\tau) \in A_1, f(it, 1 + i\tau) \in A_2$, vale

$$g(it, i\tau) = f(i\tau, it) \in A_0, \quad g(1 + it, i\tau) = f(i\tau, 1 + it) \in A_2,$$

$$g(it, 1 + i\tau) = f(1 + i\tau, it) \in A_1.$$

Dunque, $g \in \mathcal{H}(A_0, A_2, A_1)$ e, per l'arbitrarietà della f ,

$$\begin{aligned} \|x\|_{[A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta}} &= \inf_{g(\rho, \theta)=x} \|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_2, A_1)} \leq \inf_{f(\theta, \rho)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \\ &= \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}}. \end{aligned}$$

Per simmetria, allora, $\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x\|_{[A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta}}$.
Di qui, segue la (1).

(2). Sia $x \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$; dunque, esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Poniamo:

$$g(z, w) = f(1 - z - w, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Si osservi che se $(z, w) \in \overline{\Omega}$ allora anche $(1 - z - w, w) \in \overline{\Omega}$.

Poi, $g(1 - \theta - \rho, \rho) = f(\theta, \rho) = x$. Inoltre, g è una funzione continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. In più,

$$g(it, i\tau) = f(1 - it - i\tau, i\tau) = f(1 - i(t + \tau), i\tau) \in A_1;$$

$$g(1 + it, i\tau) = f(-i(t + \tau), i\tau) \in A_0;$$

$$g(it, 1 + i\tau) = f(1 - it - 1 - i\tau, 1 + i\tau) = f(-i(t + \tau), 1 + i\tau) \in A_2.$$

Pertanto, $g \in \mathcal{H}(A_1, A_0, A_2)$ e così,

$$\|x\|_{[A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho}} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}}.$$

Con un ragionamento analogo, supponendo $x \in [A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho}$, si prova che

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x\|_{[A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho}},$$

e la (2) risulta provata.

(3). Per la (1),

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta}.$$

Ma, per la (2), $[A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta} = [A_2, A_0, A_1]_{1-\theta-\rho, \theta}$.
Di qui, ancora in base alla (1),

$$[A_2, A_0, A_1]_{1-\theta-\rho, \theta} = [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 1-\theta-\rho}.$$

PROPOSIZIONE 5. Sia $A_2 \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_0$. Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,1} = A_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Si è visto (cfr. Proposizione 4 (2)) che

$$[A_0, A_1, A_2]_{0, \theta} \hookrightarrow [A_0, A_2]_{\theta}, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

In particolare, per $\theta=1$, $[A_0, A_1, A_2]_{0,1} \hookrightarrow [A_0, A_2]_1$. Ma, per ipotesi, $A_2 \hookrightarrow A_0$ e quindi $[A_0, A_2]_1 = A_2$ (cfr. [7], p. 132).

D'altro canto, se $x \in A_2$, abbiamo già provato precedentemente che la funzione

$$(z, w) \rightarrow \psi(z, w) = x, \quad (z, w) \in \bar{\Omega},$$

è un elemento di $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$. Quindi,

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,1}} \leq \|\psi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq C \|x\|_{A_2}.$$

Perciò $[A_0, A_1, A_2]_{0,1}$ e A_2 coincidono, con equivalenza delle norme.

Notiamo che, se $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente¹⁾, allora si ha l'uguaglianza delle norme, perchè $\|\psi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \|x\|_{A_2}$.

PROPOSIZIONE 6. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$, con $\|x\|_{A_0} \leq \|x\|_{A_1} \leq \|x\|_{A_2}$ ($x \in A_2$). Allora:

$$x \in A_2 \Rightarrow \|x\|_{A_1} = \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}}.$$

DIMOSTRAZIONE. In base alla Proposizione 4 (1)

$$(i) \quad \forall x \in A_2, \quad \|x\|_{[A_0, A_1]_0} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}}.$$

Poichè $A_1 \hookrightarrow A_0$ risulta $\|x\|_{A_1} = \|x\|_{[A_0, A_1]_1}$ (cfr. [7], p. 132), e quindi, $\|x\|_{A_1} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}}$.

Supponiamo $x \neq 0$. Per $x=0$, l'affermazione è ovvia.

Poniamo:

$$\varphi(z, w) = \left(\frac{\|x\|_{A_1}}{\|x\|_{A_0}} \right)^{1-z} \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_2}} \right)^w x, \quad (z, w) \in \bar{\Omega}.$$

¹⁾ Ricordiamo che uno spazio di Banach E si dice immerso normalmente nello spazio di Banach F se $E \hookrightarrow F$, E è denso in F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E, \forall x \in E$, (cfr. [7], p. 93).

φ è una applicazione continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 \cong A_0 + A_1 + A_2$, olo-
morfa da Ω a A_0 . Inoltre,

$$\|\varphi(it, i\tau)\|_{A_0} = \|\varphi(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \|\varphi(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = \|x\|_{A_1}.$$

Quindi, $\varphi \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e $\varphi(1, 0) = x$. In più

$$(ii) \quad \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \|x\|_{A_1}.$$

Pertanto, dalla (i) e dalla (ii) segue che $\forall x \in A_2$, $\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} = \|x\|_{A_1}$.

COROLLARIO. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente. Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{1,0} = A_1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla proposizione 4 (1) segue che

$$[A_0, A_1, A_2]_{1,0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_1 = A_1.$$

Quindi, vale senz'altro

$$A_2 \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{1,0} \hookrightarrow A_1.$$

D'altra parte, se $x \in A_1$, per la densità di A_2 in A_1 , esiste una suc-
cessione di elementi x_n di A_2 tale che $\|x_n - x\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ora, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è anche una successione di Cauchy in A_1 , per cui
cioè, $\|x_m - x_n\|_{A_1} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Però, $\forall m, n \in \mathbf{N}$, $x_m - x_n \in A_2$ e, in base
alla Proposizione 6, $\|x_m - x_n\|_{A_1} = \|x_m - x_n\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}}$.

Così, $\|x_m - x_n\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Per la completezza dello spa-
zio $[A_0, A_1, A_2]_{1,0}$, esiste $\bar{x} \in [A_0, A_1, A_2]_{1,0}$ tale che

$$\|x_n - \bar{x}\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \rightarrow 0.$$

Dunque, esistono $x \in A_1$, $\bar{x} \in [A_0, A_1, A_2]_{1,0}$ per cui

$$\|x_n - x\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|x_n - \bar{x}\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Poichè $[A_0, A_1, A_2]_{1,0} \hookrightarrow A_1$, vale anche $\|x_n - \bar{x}\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Di qui, per la unicità del limite, $x = \bar{x}$.

Allora, tenendo presente la Proposizione 6,

$$\|x\|_{A_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{A_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} = \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}}.$$

Ciò prova la coincidenza dei due spazi considerati.

PROPOSIZIONE 7. *Supponiamo $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ e A_2 sia immerso normalmente in A_0 . Allora:*

$$x \in A_2 \Rightarrow \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}} = \|x\|_{A_0}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è ovvia per $x=0$. Supponiamo $x \neq 0$.

Per la Proposizione 4 (2) è $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_2]_0$ e $[A_0, A_2]_0 = A_0$ perchè $A_2 \hookrightarrow A_0$ normalmente, (cfr. [7], p. 133).

Perciò vale:

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow A_0, \text{ con } \|x\|_{A_0} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}}.$$

Sempre supponendo $x \in A_2$, definiamo la seguente applicazione:

$$\varphi(z, w) = \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_1}} \right)^z \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_2}} \right)^w x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Prima di tutto, $\varphi(0, 0) = x$. Poi, è facile riconoscere che φ è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a A_0 ($\cong A_0 + A_1 + A_2$), olomorfa da Ω a A_0 . Inoltre,

$$\|\varphi(it, i\tau)\|_{A_0} = \|\varphi(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \|\varphi(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = \|x\|_{A_0}.$$

Quindi, $\varphi \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \|x\|_{A_0}.$$

Così,

$$x \in A_2 \Rightarrow \|x\|_{A_0} = \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}}.$$

COROLLARIO. Se $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente, allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} = A_0.$$

DIMOSTRAZIONE. È identica a quella del Corollario alla Proposizione 6, in virtù della Proposizione 7.

OSSERVAZIONE. In base al Teorema 5, se $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente, l'ordine dei termini nella Proposizione 5 e nei due Corollari precedenti è irrilevante; per esempio,

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0,0} &= [A_1, A_2, A_0]_{1,0} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{0,1} = [A_0, A_1, A_2]_{0,1} = A_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{1,0} &= [A_1, A_2, A_0]_{0,0} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{0,0} = [A_0, A_1, A_2]_{1,0} = A_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0,1} &= [A_2, A_0, A_1]_{1,0} = \\ &= [A_0, A_2, A_1]_{0,0} = [A_0, A_1, A_2]_{0,0} = A_0. \end{aligned}$$

LEMMA 2. Sia $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, con

$$\|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq M_0, \quad \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq M_1, \quad \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \leq M_2$$

$\forall t, \tau \in \mathbf{R}.$

Se $\theta \geq 0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta + \rho \leq 1$, allora

$$f(\theta + it, \rho + i\tau) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$$

e

$$\|f(\theta + it, \rho + i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq M_1^{1-\theta-\rho} M_1^\theta M_2^\rho.$$

(Nel caso di due spazi, cfr. [9], p. 123).

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$g(z, w) = M_0^{z+w-1} M_1^{-z} M_2^{-w} f(z+it, w+i\tau), \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

con t, τ elementi di \mathbf{R} , arbitrariamente scelti. Poichè $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$,

g è definita su $\overline{\Omega}$, continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. Inoltre, sempre per le proprietà di f ,

$$g(it', i\tau') = M_0^{it'+i\tau'-1} M_1^{-it'} M_2^{-i\tau'} f(i(t+t'), i(\tau+\tau')) \in A_0$$

e

$$\|g(it', i\tau')\|_{A_0} = M_0^{-1} \|f(i(t+t'), i(\tau+\tau'))\|_{A_0} \leq M_0^{-1} \sup_{t, \tau} \|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq 1;$$

$$g(1+it', i\tau') = M_0^{it'+i\tau'} M_1^{-1-it'} M_2^{-i\tau'} f(1+i(t+t'), i(\tau+\tau')) \in A_1,$$

con

$$\begin{aligned} \|g(1+it', i\tau')\|_{A_1} &= M_1^{-1} \|f(1+i(t+t'), i(\tau+\tau'))\|_{A_1} \leq \\ &\leq M_1^{-1} \sup_{t, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq 1; \end{aligned}$$

$$g(it', 1+i\tau') = M_0^{it'+i\tau'} M_1^{-it'} M_2^{-1-i\tau'} f(i(t+t'), 1+i(\tau+\tau')) \in A_2,$$

con

$$\begin{aligned} \|g(it', 1+i\tau')\|_{A_2} &= M_2^{-1} \|f(i(t+t'), 1+i(\tau+\tau'))\|_{A_2} \leq \\ &\leq M_2^{-1} \sup_{t, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \leq 1. \end{aligned}$$

Ne segue che $g \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e $\|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq 1$. Pertanto,

$$\|g(\theta, \rho)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} = \inf_{h(\theta, \rho) = g(\theta, \rho)} \|h\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq 1.$$

Ma $g(\theta, \rho) = M_0^{\theta+\rho-1} M_1^{-\theta} M_2^{-\rho} f(\theta+it, \rho+i\tau)$. Dunque,

$$\|f(\theta+it, \rho+i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq M_0^{1-\theta-\rho} M_1^{\theta} M_2^{\rho}.$$

TEOREMA 6. *Sia $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \rho + \sigma \leq 1$. Se A_1 è immerso normalmente in A_0 e $0 \leq \theta \leq 1$, allora*

$$[A_0, A_1, [A_0, A_1]_{\theta}]_{\rho, \sigma} = [A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $\rho = \sigma = 0$.

Per il Teorema 5 (1),

$$[A_0, A_1, \{[A_0, A_1]_\theta\}_{0,0}] = [A_0, [A_0, A_1]_\theta, A_1]_{0,0};$$

quindi, poichè $A_1 \hookrightarrow [A_0, A_1]_\theta \hookrightarrow A_0$ normalmente, per il Corollario alla Proposizione 7, $[A_0, [A_0, A_1]_\theta, A_1]_{0,0} = A_0$.

D'altra parte, $[A_0, A_1]_0 = A_0$, essendo $A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente (cfr. [7], p. 133).

Ne segue che il risultato è provato per $\rho = \sigma = 0$, $\theta \in [0, 1]$.

Supponiamo, dunque, $0 < \rho + \sigma \leq 1$. Sia x un elemento dello spazio $[A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}$. Allora, per definizione, esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$ tale che $f(\rho + \theta\sigma) = x$.

Poniamo:

$$g(z, w) = f(z + \theta w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

La funzione g è ben definita, poichè, se $0 \leq \Re z + \Re w \leq 1$, $\Re z, \Re w \geq 0$, allora $0 \leq \Re(z + \theta w) \leq 1$. Vale $g(\rho, \sigma) = f(\rho + \theta\sigma) = x$, e, per le proprietà della f , g è limitata e continua da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1$ (e quindi da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + [A_0, A_1]_\theta$), olomorfa da Ω a $A_0 + A_1$ (e anche da Ω a $A_0 + A_1 + [A_0, A_1]_\theta$).

Inoltre,

$$g(it, i\tau) = f(i(t + \theta\tau)) \in A_0,$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{A_0} \leq \sup_t \|f(it)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)};$$

$$g(1 + it, i\tau) = f(1 + i(t + \theta\tau)) \in A_1,$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(1 + it, i\tau)\|_{A_1} \leq \sup_t \|f(1 + it)\|_{A_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)};$$

$$g(it, 1 + i\tau) = f(it + \theta(1 + i\tau)) = f(\theta + i(t + \tau)) \in [A_0, A_1]_\theta$$

e

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, 1 + i\tau)\|_{[A_0, A_1]_\theta} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)}$$

(cfr. [9], p. 123).

Di qui,

$$g \in \mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta) \text{ e } \|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)}.$$

Così, per l'arbitrarietà della f ,

$$\begin{aligned} \|x\|_{[A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\rho, \sigma}} &= \inf_{h(\rho, \sigma)=x} \|h\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)} \leq \\ &\leq \inf_{f(\rho+\theta\sigma)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)} = \|x\|_{[A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}}. \end{aligned}$$

Sia ora $x \in [A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\rho, \sigma}$. Per definizione, $x = f(\rho, \sigma)$, con f un elemento di $\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)$. Poniamo:

$$g(z) = f\left(\frac{\rho z}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma z}{\rho + \sigma}\right), \quad 0 \leq \Re z \leq 1.$$

Poichè $\frac{\rho z}{\rho + \sigma} + \frac{\sigma z}{\rho + \sigma} = z$, la definizione è ben posta. Si ha $g(\rho + \sigma) = f(\rho, \sigma) = x$. Inoltre,

$$g(it) = f\left(i \frac{t\rho}{\rho + \sigma}, i \frac{t\sigma}{\rho + \sigma}\right) \in A_0$$

e

$$\sup_t \|g(it)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)};$$

per il Lemma 2 si ha poi

$$\begin{aligned} g(1+it) &= f\left(\frac{\rho}{\rho + \sigma} + i \frac{t\rho}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma}{\rho + \sigma} + i \frac{t\sigma}{\rho + \sigma}\right) \in \\ &\in [A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\rho}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma}{\rho + \sigma}}, \end{aligned}$$

$$\sup_t \|g(1+it)\|_{[A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\rho}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma}{\rho + \sigma}}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)},$$

perchè $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)$.

Ma

$$\begin{aligned} [A_0, A_1, [A_0, A_1]_0]_{1-\eta, \eta} &= [A_1, A_0, [A_0, A_1]_0]_{0, \eta} = \\ &= [A_1, [A_0, A_1]_0, A_0]_{\eta, 0}. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$[A_1, [A_0, A_1]_0, A_0]_{\eta, 0} \leftrightarrow [A_1, [A_0, A_1]_0]_{\eta}.$$

Quindi, nel nostro caso,

$$g(1+it) \in [A_1, [A_0, A_1]_0]_{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

D'altra parte,

$$[A_1, [A_0, A_1]_0]_{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}} = [[A_0, A_1]_1, [A_0, A_1]_0]_{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}} = [A_0, A_1]_{\frac{\rho}{\rho+\sigma} + \theta \frac{\sigma}{\rho+\sigma}},$$

per la proprietà di reiterazione per gli spazi di interpolazione complessa, (cfr. [1], p. 121).

In definitiva, vale

$$(i) \quad g(it) \in A_0, \quad g(1+it) \in [A_0, A_1]_{\frac{\rho}{\rho+\sigma} + \theta \frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

Ne segue, sempre sulla base della definizione di g , che

$$g \in \mathcal{H}(A_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}})$$

e dunque, che

$$g(\rho+\sigma) \in [A_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}}]_{\rho+\sigma}.$$

Ma, ancora perchè $A_0 = [A_0, A_1]_0$, essendo A_1 immerso normalmente in A_0 , per la proprietà di reiterazione, si ha

$$[A_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}}]_{\rho+\sigma} = [[A_0, A_1]_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}}]_{\rho+\sigma} = [A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}.$$

Dunque, $g(\rho + \sigma) = x \in [A_0, A_1]_{\rho + \theta\sigma}$ e, infine,

$$\|x\|_{[A_0, A_1]_{\rho + \theta\sigma}} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, [A_0, A_1]_{\theta}]_{\rho, \sigma}}.$$

NOTA. Dal Teorema 6 segue, in particolare, che $A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente $\Rightarrow [A_0, A_1, A_1]_{\rho, \sigma} = [A_0, A_1]_{\rho + \sigma}$.

Basta infatti porre $\theta = 1$ e notare che $[A_0, A_1]_1 = A_1$ (cfr. [7], p. 133).

Tuttavia, risulta $[A_0, A_1, A_1]_{\rho, \sigma} = [A_0, A_1]_{\rho + \sigma}$ anche senza la assunzione che $A_1 \hookrightarrow A_0$. Ciò è intanto vero per $\rho = \sigma = 0$. Infatti per la Proposizione 4 risulta $[A_0, A_1, A_1]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_0$; d'altra parte, se $x \in [A_0, A_1]_0$, allora $x = f(0)$, con $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$; definiamo $g(z, w) = f(z + w)$, $(z, w) \in \Omega$; risulta $g \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_1)$, perchè

$$g(1 + it, i\tau) = g(it, 1 + i\tau) = f(1 + i(t + \tau)) \in A_1;$$

inoltre, $g(0, 0) = f(0) = x$; dunque $[A_0, A_1, A_1]_{0,0} = [A_0, A_1]_0$.

Se è poi $\rho + \sigma > 0$ la immersione $[A_0, A_1]_{\rho + \sigma} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_1]_{\rho, \sigma}$ si prova come la prima parte del Teorema 6; la immersione inversa segue dalla definizione di una $g \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$ attraverso una $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_1)$, $f(\rho, \sigma) = x$, per mezzo di

$$g(z) = f\left(\frac{\rho}{\rho + \sigma}z, \frac{\sigma}{\rho + \sigma}z\right), \quad 0 \leq \Re z \leq 1.$$

COROLLARIO 1. Sia $0 \leq \theta \leq 1$. Allora, per ogni $\rho \in [0, 1]$ tale che $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, vale

$$[A_0, A_0, A_1]_{\rho, \theta} = [A_0, A_1]_{\theta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$[A_0, A_0, A_1]_{\rho, \theta} = [A_0, A_1, A_0]_{\theta, \rho} = [A_1, A_0, A_0]_{1 - \theta - \rho, \rho}.$$

Per la Nota precedente, $[A_1, A_0, A_0]_{1 - \theta - \rho, \rho} = [A_1, A_0]_{1 - \theta}$, che, d'altra parte, coincide con $[A_0, A_1]_{\theta}$.

COROLLARIO 2. Sia A_1 immerso normalmente in A_0 . Se $0 \leq s, t \leq 1$, $0 \leq s + t \leq 1$, $0 \leq \sigma, \theta \leq 1$, allora

$$(i) \quad [A_0, [A_0, A_1]_\sigma, [A_0, A_1]_\theta]_{s,t} = [A_0, A_1]_{s\sigma + \theta t}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i tre casi possibili:

1° caso: $\sigma = \theta$. Allora, per il Teorema 6,

$$[A_0, [A_0, A_1]_\theta, [A_0, A_1]_\theta]_{s,t} = [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{s+t}.$$

D'altra parte, per la proprietà di reiterazione,

$$[A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{s+t} = [[A_0, A_1]_\theta, [A_0, A_1]_\theta]_{s+t} = [A_0, A_1]_{s\theta + t\theta},$$

e quindi la (i) è vera.

2° caso: $\sigma < \theta$. Allora, sempre per la proprietà di reiterazione,

$$[A_0, A_1]_\sigma = [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\sigma}{\theta}}.$$

Perciò,

$$\begin{aligned} & [A_0, [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\sigma}{\theta}}, [A_0, A_1]_\theta]_{s,t} = \\ & = [A_0, [A_0, A_1]_\theta, [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\sigma}{\theta}}]_{t,s} = [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{t + \frac{\sigma}{\theta}s}, \end{aligned}$$

in base al Teorema 6.

Allora, di nuovo utilizzando la proprietà di reiterazione,

$$[A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{t + \frac{\sigma}{\theta}s} = [A_0, A_1]_{s\sigma + t\theta}.$$

3° caso: $\sigma < \theta$. Allora $[A_0, A_1]_\theta = [A_0, [A_0, A_1]_\sigma]_{\frac{\theta}{\sigma}}$, e così:

$$\begin{aligned} & [A_0, [A_0, A_1]_\sigma, [A_0, [A_0, A_1]_\sigma]_{\frac{\theta}{\sigma}}]_{s,t} = \\ & = [A_0, [A_0, A_1]_\sigma]_{s + \frac{\theta}{\sigma}t} = [A_0, A_1]_{s\sigma + t\theta}, \end{aligned}$$

e si ottiene ancora la formula (i).

TEOREMA S. Sia A_1 , oppure A_2 , immerso normalmente in A_0 . Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_2]_\theta, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

DIMOSTRAZIONE. In generale, vale (cfr. Teorema 5 (2)),

$$[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_0, A_2]_{0, \theta}.$$

Quindi, per la Proposizione 4 (2),

$$(i) \quad [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} \Leftrightarrow [A_1, A_2]_{\theta}.$$

Supponiamo $A_1 \Leftrightarrow A_0$ normalmente. Per il Corollario 1 al Teorema 6,

$$[A_1, A_2]_{\theta} = [A_1, A_1, A_2]_{\sigma, \theta}, \quad \forall \theta, \sigma \geq 0, 0 \leq \theta + \sigma \leq 1.$$

In particolare, ciò vale per $\sigma = 0$. Così:

$$(ii) \quad [A_1, A_2]_{\theta} = [A_1, A_1, A_2]_{0, \theta}.$$

Ora, per la definizione dello spazio $[X_0, X_1, X_2]_{\alpha, \beta}$, si ha

$$(iii) \quad [A_1, A_1, A_2]_{0, \theta} \Leftrightarrow [A_1, A_0, A_2]_{0, \theta} = [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta}.$$

Dalle (i)-(ii)-(iii) segue che

$$A_1 \Leftrightarrow A_0 \Rightarrow [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_2]_{\theta}.$$

Supponiamo ora che sia $A_2 \Leftrightarrow A_0$ normalmente. Per la Nota al Teorema 6, si ha

$$(iv) \quad [A_1, A_2]_{\theta} = [A_1, A_2, A_2]_{\theta, 0} = [A_1, A_2, A_2]_{0, \theta} = [A_2, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta}.$$

D'altra parte, per la (i), $[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} \Leftrightarrow [A_1, A_2]_{\theta}$.

Dunque, poichè $A_2 \Leftrightarrow A_0$,

$$(v) \quad [A_2, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} \Leftrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta},$$

si ha:

Se $A_2 \Leftrightarrow A_0$ normalmente, allora $[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_2]_{\theta}$.
Ciò completa la prova.

COROLLARIO 1. *Sia $A_2 \hookrightarrow A_1$ normalmente, con A_0 arbitrario. Allora:*

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} = [A_0, A_2]_{\theta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5 (2) si ha

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} = [A_1, A_0, A_2]_{1-\theta,0}.$$

Quindi, per il Teorema 7, poichè $A_2 \hookrightarrow A_1$, vale

$$[A_1, A_0, A_2]_{1-\theta,0} = [A_0, A_2]_{\theta}.$$

Di qui segue l'asserto.

COROLLARIO 2. *Sia $A'_1 \hookrightarrow A'_2$ oppure $A'_0 \hookrightarrow A'_2$, con immersione normale. Se A_0 e A_1 sono riflessivi, allora*

$$[A'_0, A'_1, A'_2]'_{\theta,0} = [A_0, A_1]_{\theta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5,

$$\begin{aligned} [A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta,0} &= [A'_1, A'_0, A'_2]_{1-\theta,0} = \\ &= [A'_1, A'_2, A'_0]_{0,1-\theta} = [A'_2, A'_1, A'_0]_{\theta,1-\theta}. \end{aligned}$$

Allora, per il Teorema 7,

$$[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta,0} = [A'_1, A'_0]_{1-\theta} = [A'_0, A'_1]_{\theta}.$$

D'altra parte, per la riflessività di A_0 e di A_1 , (cfr. [10], p. 2), $[A_0, A_1]'_{\theta} = [A'_0, A'_1]_{\theta}$ e $[A_0, A_1]_{\theta}$ è riflessivo. Quindi,

$$[A'_0, A'_1]_{\theta} = [A_0, A_1]'_{\theta} = [A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta,0}.$$

Passando ai duali, infine, $[A_0, A_1]_{\theta} = [A'_0, A'_1, A'_2]'_{\theta,0}$.

TEOREMA 8. *Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ e le immersioni siano normali. Allora, se $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, $0 \leq \theta' + \rho' \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \theta'$, $0 \leq \rho \leq \rho'$,*

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\theta' = \rho' = 0$, allora $\theta = \rho = 0$ e la immersione da provare è ovvia, essendoci uguaglianza degli spazi.

Supponiamo $\theta' \neq 0$, $\rho = \rho' = 0$. Si ha, per il Teorema 5 e il Teorema 7,

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 0} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\theta, 0} = [A_1, A_0, A_2]_{0, 1-\theta} = \\ &= [A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta} = [A_1, A_2]_{1-\theta} = [A_2, A_1]_{\theta}. \end{aligned}$$

Analogamente, $[A_2, A_1, A_0]_{\theta', 0} = [A_2, A_1]_{\theta'}$.

Ma $[A_2, A_1]_{\theta} \hookrightarrow [A_2, A_1]_{\theta'}$, se $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$ (cfr. [1], p. 160).

Dunque l'affermazione è vera per $\theta' \neq 0$ e $\rho = \rho' = 0$.

Sia $\rho' \neq 0$, $\theta = \theta' = 0$. Dal Teorema 5 e dal Corollario 1 al Teorema 7 segue che

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0, \rho} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\rho, \rho} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{\rho, 1-\rho} = [A_0, A_1, A_2]_{0, 1-\rho} = \\ &= [A_0, A_2]_{1-\rho}; \quad [A_2, A_1, A_0]_{0, \rho'} = [A_0, A_2]_{1-\rho'}. \end{aligned}$$

Poichè $[A_0, A_2]_{1-\rho} = [A_2, A_0]_{\rho} \hookrightarrow [A_2, A_0]_{\rho'} = [A_0, A_1]_{1-\rho'}$, l'affermazione è provata nel caso di $\rho' \neq 0$ e $\theta = \theta' = 0$.

Supponiamo, dunque, $\theta' > 0$, $\rho' > 0$.

Se $\theta = \rho = 0$, allora, poichè

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0, 0} &= [A_1, A_2, A_0]_{1, 0} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{0, 1} = [A_0, A_1, A_2]_{0, 1} = A_2 \end{aligned}$$

(cfr. Proposizione 5), si ha $[A_2, A_1, A_0]_{0, 0} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}$.

Se $\theta \neq 0$, $\rho = 0$, allora $[A_2, A_1, A_0]_{\theta, 0} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta}$, che coincide con $[A_1, A_2]_{1-\theta} = [A_2, A_1]_{\theta}$, per il Teorema 7.

Ora, per il Teorema 6,

$$[A_2, A_1]_{\theta'+\rho'} = [A_2, A_1, A_1]_{\theta', \rho'} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}.$$

Poichè $\theta' + \rho' \geq \theta$, si ha (cfr. [1], p. 160),

$$[A_2, A_1]_{\theta} = [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 0} \hookrightarrow [A_2, A_1]_{\theta'+\rho'}.$$

Se

$$\begin{aligned} \theta=0, \rho \neq 0, [A_2, A_1, A_0]_{0,\rho} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\rho,\rho} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{\rho,1-\rho} = [A_0, A_1, A_2]_{0,1-\rho} = [A_0, A_2]_{1-\rho} = [A_2, A_0]_{\rho} \end{aligned}$$

(cfr. Corollario 1 al Teorema 7).

Per il Teorema 6,

$$\begin{aligned} [A_2, A_0]_{\rho'} &= [A_0, A_2]_{1-\rho'} = [A_0, A_2, A_2]_{1-\rho'-\theta',\theta'} = \\ &= [A_2, A_0, A_2]_{\rho',\theta'} = [A_2, A_2, A_0]_{\theta',\rho'} \leftrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta',\rho'}. \end{aligned}$$

Poichè $\rho \leq \rho'$, $[A_2, A_0]_{\rho} \leftrightarrow [A_2, A_0]_{\rho'}$; si ha dunque,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta,\rho} = [A_2, A_0]_{\rho} \leftrightarrow [A_2, A_0]_{\rho'} \leftrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta',\rho'}.$$

Possiamo ora supporre $\theta, \rho \neq 0$. Sia x un elemento di $[A_2, A_1, A_0]_{\theta,\rho}$. Allora esiste $f \in \mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Poniamo

$$g(z, w) = f\left(z \frac{\theta}{\theta'}, w \frac{\rho}{\rho'}\right), (z, w) \in \bar{\Omega}.$$

Poichè $\theta \leq \theta', \rho \leq \rho'$, la definizione di g ha senso. Inoltre, poichè $f \in \mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)$, g è continua e limitata da $\bar{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olo-morfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. In più,

$$g(it, i\tau) = f\left(i \frac{t\theta}{\theta'}, i \frac{\tau\rho}{\rho'}\right) \in A_2, \sup_{t,\tau} \|g(it, i\tau)\|_{A_2} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)};$$

$$g(1+it, i\tau) = f\left(\frac{\theta'}{\theta} + i \frac{t\theta}{\theta'}, i \frac{\tau\rho}{\rho'}\right) \in [A_2, A_1, A_0]_{\frac{\theta}{\theta'},0} \leftrightarrow$$

(cfr. Lemma 2) $\leftrightarrow [A_2, A_1]_{\frac{\theta}{\theta'}}$ (per la Proposizione 4 (1)) $\leftrightarrow A_1$, con

$$\sup_{t,\tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)}.$$

Analogamente, per la Proposizione 4 (2) e il Lemma 2,

$$g(it, 1+i\tau) = f\left(i \frac{\theta}{\theta'}, \frac{\rho}{\rho'} + i \frac{\tau\rho}{\rho'}\right) \in [A_2, A_1, A_0]_{0, \frac{\rho}{\rho'}} \hookrightarrow [A_2, A_0]_{\frac{\rho}{\rho'}} \hookrightarrow A_0,$$

$$\sup \|g(it, 1+i\tau)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)}.$$

Di qui, $g \in \mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)$ e, d'altra parte, $g(\theta', \rho') = f(\theta, \rho) = x$.
 Poichè vale $\|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)}$,

$$\|x\|_{[A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}} \leq \|x\|_{[A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho}}.$$

COROLLARIO. *Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente. Se $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, $0 \leq \theta' + \rho' \leq 1$, $\theta \leq \theta'$, $\rho \leq \rho'$, allora*

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta-\rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 8,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}.$$

Ma si ha:

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\theta-\rho, \rho} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{\rho, 1-\theta-\rho} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta-\rho} \end{aligned}$$

e analogamente,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

Di qui,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta-\rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

TEOREMA 9. *Esista una successione P_n di operatori lineari continui da A_i a $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ ($i=0, 1, 2$), tale che*

(i)
$$\|P_n x_i - x_i\|_{A_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x_i \in A_i, (i=0, 1, 2).$$

Allora $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, $(\theta, \rho) \in \bar{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che, per il teorema della limitatezza uniforme, dalla (i) segue $\|P_n\|_{A_i \rightarrow A_i} \leq C_i$, indipendentemente da n . Inoltre, P_n si estende univocamente come un operatore lineare continuo da $A_0 + A_1 + A_2$ in sè.

Infatti, se $a \in A_0 + A_1 + A_2$, onde $a = a_0 + a_1 + a_2$, con $a_i \in A_i$, la definizione di P_n attraverso

$$(ii) \quad P_n(a) = P_n(a_0) + P_n(a_1) + P_n(a_2)$$

realizza tale prolungamento.

Osserviamo che la (ii) non dipende dalla scelta degli $a_i \in A_i$, $a = a_0 + a_1 + a_2$. Proviamo tale affermazione nel modo seguente.

Sia $c = c_1 + c_2 = d_1 + d_2$, $c_i, d_i \in A_i$ ($i = 1, 2$). Si ha $c_1 - d_1 = d_2 - c_2$ e quindi, per la linearità di P_n su A_1 e A_2 , $P_n(c_1 - d_1) = P_n(c_1) - P_n(d_1)$, $P_n(d_2 - c_2) = P_n(d_2) - P_n(c_2)$; pertanto, poichè $P_n(c_1 - d_1) = P_n(d_2 - c_2)$,

$$P_n(c_1) + P_n(c_2) = P_n(d_1) + P_n(d_2).$$

Se $a = a_0 + a_1 + a_2 = b_0 + b_1 + b_2$, $a_i, b_i \in A_i$, allora $a_0 - b_0 = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \in A_1 + A_2$. Per quello che si è provato sopra,

$$\begin{aligned} P_n((b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)) &= P_n(b_1 - a_1) + P_n(b_2 - a_2) = \\ &= P_n(b_1) - P_n(a_1) + P_n(b_2) - P_n(a_2). \end{aligned}$$

D'altra parte, $a_0 - b_0 \in A_0$ e quindi $P_n(a_0 - b_0) = P_n(a_0) - P_n(b_0)$. Dunque,

$$P_n(a_0 - b_0) = P_n(a_0) - P_n(b_0) = P_n(b_1) - P_n(a_1) + P_n(b_2) - P_n(a_2).$$

E allora,

$$P_n(a_0) + P_n(a_1) + P_n(a_2) = P_n(b_0) + P_n(b_1) + P_n(b_2).$$

Vale $P_n(a) \in A_0 \cap A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow A_0 + A_1 + A_2$; per la definizione dello spazio normato $A_0 + A_1 + A_2$, si ha

$$\begin{aligned} \|P_n(a)\|_{A_0 + A_1 + A_2} &\leq \|P_n(a_0)\|_{A_0} + \|P_n(a_1)\|_{A_1} + \|P_n(a_2)\|_{A_2} \leq \\ &\leq C(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} + \|a_2\|_{A_2}). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà degli a_i ,

$$\| P_n(a) \|_{A_0+A_1+A_2} \leq C \| a \|_{A_0+A_1+A_2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad a \in A_0+A_1+A_2.$$

Sia $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Possiamo supporre che

$$\begin{aligned} \lim_{|t|+|\tau| \rightarrow \infty} \| f(it, i\tau) \|_{A_0} &= \lim_{|t|+|\tau| \rightarrow \infty} \| f(1+it, i\tau) \|_{A_1} = \\ &= \lim_{|t|+|\tau| \rightarrow \infty} \| f(it, 1+i\tau) \|_{A_2} = 0. \end{aligned}$$

In caso contrario, la g definita da $g(z, w) = e^{(z-\theta)^2+(w-\rho)^2} f(z, w)$ appartiene a $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e gode della proprietà suddetta.

Definiamo

$$v_n(z, w) = P_n(f(z, w)) - f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Poichè $P_n \in L(A_0+A_1+A_2, A_0+A_1+A_2)$ e f è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0+A_1+A_2$, olomorfa da Ω a $A_0+A_1+A_2$, v_n risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0+A_1+A_2$, olomorfa da Ω a $A_0+A_1+A_2$.

Inoltre, poichè $f(it, i\tau) \in A_0$, $f(1+it, i\tau) \in A_1$, $f(it, 1+i\tau) \in A_2$ e $P_n(A_i) \subset A_0 \cap A_1 \cap A_2$ si ha, per ogni $t, \tau \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \| v_n(it, i\tau) \|_{A_0} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \| v_n(1+it, i\tau) \|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \| v_n(it, 1+i\tau) \|_{A_2} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

D'altra parte, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$ (indipendente da n) tale che

$$\begin{aligned} |t|+|\tau| > N_\varepsilon &\Rightarrow \| P_n(f(it, i\tau)) - f(it, i\tau) \|_{A_0} \leq \\ &\leq (C+1) \| f(it, i\tau) \|_{A_0} \leq (C+1) \frac{\varepsilon}{2(C+1)} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ma $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\sup_{|t|+|\tau| \leq N_\varepsilon} \| P_n(f(it, i\tau)) - f(it, i\tau) \|_{A_0} < \varepsilon/2,$$

purchè sia $n > n(\varepsilon)$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \sup_{t, \tau} \| v_n(it, i\tau) \|_{A_0} &\leq \sup_{|t|+|\tau| \leq N_\varepsilon} \| v_n(it, i\tau) \|_{A_0} + \\ &+ \sup_{|t|+|\tau| > N_\varepsilon} \| v_n(it, i\tau) \|_{A_0} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

purchè sia $n > n(\varepsilon)$. Pertanto, $\sup_{t, \tau} \|v_n(it, i\tau)\|_{A_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Analogamente,

$$\sup_{t, \tau} \|v_n(1+it, i\tau)\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sup_{t, \tau} \|v_n(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Così, $v_n \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2) \forall n$, e, poichè

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} &= \\ &= \max \left\{ \sup_{t, \tau} \|v_n(it, i\tau)\|_{A_0}, \sup_{t, \tau} \|v_n(1+it, i\tau)\|_{A_1}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{t, \tau} \|v_n(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \right\}, \quad \|v_n\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

D'altro canto,

$$\begin{aligned} \|P_n f(\theta, \rho) - f(\theta, \rho)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} &= \|P_n x - x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \\ &\leq \|v_n\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}, \end{aligned}$$

e quindi $\|P_n x - x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ma $P_n x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$.

Ne segue che $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$.

OSSERVAZIONE. Dalle ipotesi segue già la densità di $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ in A_i ($i=0, 1, 2$).

TEOREMA 10. Se $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, allora

$$[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prova segue le linee di [1]. Poichè A'_0, A'_1, A'_2 sono immersi con continuità in $(A_0 \cap A_1 \cap A_2)' \cong A'_0 + A'_1 + A'_2$, viene definito sulla somma diretta $(A_0 \cap A_1 \cap A_2) \oplus (A'_0 + A'_1 + A'_2)$ un funzionale bilineare $\langle x, x' \rangle$ nel modo seguente: se $x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$ e $x' \in A'_0 + A'_1 + A'_2$, allora $\langle x, x' \rangle$ è il valore del funzionale lineare continuo x' nel punto x .

D'altra parte, se $x' \in A'_0$ o ad A'_1 o ad A'_2 ,

$$|\langle x, x' \rangle| \leq \|x\|_{A_i} \|x'\|_{A'_i}, \quad (i=0, 1, 2).$$

Quindi, per il Teorema 3,

$$|\langle x, x' \rangle| \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \|x'\|_{[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}} .$$

Dunque, a ogni $x' \in [A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}$ è associato un funzionale lineare su $A_0 \cap A_1 \cap A_2$, continuo rispetto alla norma di $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$.

D'altro canto, poichè per ipotesi $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, tale funzionale lineare può essere esteso in modo unico su $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, con norma $\leq \|x'\|_{[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}}$.

Così,

$$\forall x' \in [A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}, \|x'\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x'\|_{[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}},$$

e quindi,

$$[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}.$$

OSSERVAZIONE. La immersione stabilita nel Teorema 10 vale, per esempio, se è soddisfatta la condizione del Teorema 9.

TEOREMA 11. (Cfr. [9], p. 123). *Siano A_i, B_i ($i=0, 1, 2$) spazi di Banach, con $A_i \hookrightarrow \mathcal{A}$, $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}$, \mathcal{A} e \mathcal{B} spazi vettoriali topologici.*

$L(A, B)$ denoti, come solito, lo spazio di Banach degli operatori lineari continui da A a B , munito della norma d'operatore. Allora

$$\begin{aligned} & [L(A_0, B_0), L(A_1, B_1), L(A_2, B_2)]_{\theta, \rho} \hookrightarrow \\ & \hookrightarrow L([A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}, [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $T \in [L(A_0, B_0), L(A_1, B_1), L(A_2, B_2)]_{\theta, \rho}$.

Allora esiste $\varphi \in \mathcal{H}(L(A_0, B_0), L(A_1, B_1), L(A_2, B_2))$ tale che $\varphi(\theta, \rho) = T$.

Ora, è chiaro che lo spazio $L(A_0, B_0) + L(A_1, B_1) + L(A_2, B_2)$ è immerso in $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$ e pertanto, φ risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$, olomorfa da Ω a $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$.

D'altra parte, per definizione,

$$\varphi(it, i\tau) \in L(A_0, B_0), \quad \varphi(1+it, i\tau) \in L(A_1, B_1), \quad \varphi(it, 1+i\tau) \in L(A_2, B_2),$$

con norme uniformemente limitate in tali spazi.

Quindi, in base al Teorema 2,

$$\varphi(\theta + it, \rho + i\tau) \in L([A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}, [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}), \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

In particolare,

$$\varphi(\theta, \rho) \in L([A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}, [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}).$$

Ma $\varphi(\theta, \rho) = T$. L'immersione stabilita è poi continua, sempre per il Teorema 2.

TEOREMA 12. (cfr. [9], p. 123). Sia $H(z, w) \in L(A_0 + A_1 + A_2, A_0 + A_1 + A_2)$, $(z, w) \in \overline{\Omega}$, una funzione continua e limitata in $\overline{\Omega}$, ologomorfa in Ω .

Se

$$H(it, i\tau) \in L(A_j, A_j), \quad \sup_{t, \tau} \|H(it, i\tau)\|_{A_j \rightarrow A_j} \leq M_j \quad (j=0, 1, 2),$$

$$H(1+it, i\tau) \in L(A_0, A_1), \quad \sup_{t, \tau} \|H(1+it, i\tau)\|_{A_0 \rightarrow A_1} \leq M_3,$$

$$H(it, 1+i\tau) \in L(A_0, A_2), \quad \sup_{t, \tau} \|H(it, 1+i\tau)\|_{A_0 \rightarrow A_2} \leq M_4,$$

e $0 \leq \theta + \rho + \theta_0 + \rho_0 \leq 1$, $\theta, \theta_0, \rho, \rho_0 \geq 0$, allora

$$H(\theta, \rho) \in L([A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0 + \theta, \rho_0 + \rho})$$

con

$$\|H(\theta, \rho)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0} \rightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0 + \theta, \rho_0 + \rho}} \leq M_0^{1-\theta-\rho-\theta_0-\rho_0} M_1^{\theta_0} M_2^{\rho_0} M_3^{\theta} M_4^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che per ogni $\tau \in \mathbf{R}$ fissato, la funzione $z \rightarrow H(z, i\tau)$ è un elemento di $\mathcal{H}(L(A_1, A_1), L(A_0, A_1))$ e così, (cfr. [9], p. 123), $H(u+it, i\tau) \in L([A_1, A_0]_u, A_1)$, $u \in [0, 1]$ e

$$(i) \quad \|H(u+it, i\tau)\|_{[A_1, A_0]_u \rightarrow A_1} \leq M_1^{1-u} M_3^u.$$

Analogamente, $w \rightarrow H(it, w)$, $t \in \mathbf{R}$, fissato, è un elemento di $\mathcal{H}(L(A_2, A_2), L(A_0, A_2))$ e pertanto,

$$\forall v \in [0, 1], \quad H(it, v+i\tau) \in L([A_2, A_0]_v, A_2)$$

e

$$(ii) \quad \| H(it, v + i\tau) \|_{[A_2, A_0]_v \rightarrow A_2} \leq M_2^{1-\nu} M_4^\nu.$$

Sia ora x un elemento di $[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}$. Ciò implica che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta_0, \rho_0) = x$ e

$$\| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \| x \|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}} + \varepsilon.$$

Poniamo:

$$h(z, w) = H \left(\frac{\theta z}{\theta_0 + \theta}, \frac{\rho w}{\rho_0 + \rho} \right) f \left(\frac{\theta_0 z}{\theta_0 + \theta}, \frac{\rho_0 w}{\rho_0 + \rho} \right), \quad (z, w) \in \bar{\Omega},$$

dove si è supposto $\theta + \theta_0 > 0$, $\rho + \rho_0 > 0$ (Se $\theta + \theta_0 = \rho + \rho_0 = 0$, allora $\theta = \theta_0 = \rho = \rho_0 = 0$ e l'affermazione è vera per il Teorema 2).

La definizione ha senso perchè se $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, 0 \leq \alpha + \beta \leq 1$, si ha

$$\frac{\theta \alpha}{\theta_0 + \theta} + \frac{\rho \beta}{\rho_0 + \rho} \leq \frac{(\theta_0 + \theta) \alpha}{\theta_0 + \theta} + \frac{(\rho_0 + \rho) \beta}{\rho_0 + \rho} \leq 1,$$

e analogamente

$$\frac{\theta_0 \alpha}{\theta_0 + \theta} + \frac{\rho_0 \beta}{\rho_0 + \rho} \leq 1.$$

Per le ipotesi su H e perchè $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, h è una funzione continua e limitata da $\bar{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$.

Poi,

$$\begin{aligned} \| h(it, i\tau) \|_{A_0} &= \left\| H \left(i \frac{t\theta}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho}{\rho_0 + \rho} \right) f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right) \right\|_{A_0} \leq \\ &\leq M_0 \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right) \right\|_{A_0} \leq M_0 \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}; \\ \| h(1 + it, i\tau) \|_{A_1} &= \left\| H \left(\frac{\theta}{\theta_0 + \theta} + i \frac{t\theta}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho}{\rho_0 + \rho} \right) \right. \\ &\left. f \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta} + i \frac{t\theta_0}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right) \right\|_{A_1} \leq (\text{per la (i)}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \left\| f \left(\frac{\theta_0}{\theta_0+\theta} + i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{[A_0, A_1]_{\rho/(\rho+\rho_0)}} \leq \\
&\leq M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \max \left\{ \sup_t \left\| f \left(it, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{A_0}, \right. \\
&\quad \left. \sup_t \left\| f \left(1+it, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{A_1} \right\} \leq \\
&\leq M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \max \left\{ \sup_{t, \tau} \| f(it, i\tau) \|_{A_0}, \sup_{t, \tau} \| f(1+it, i\tau) \|_{A_1}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{t, \tau} \| f(it, 1+i\tau) \|_{A_2} \right\} = \\
&= M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}.
\end{aligned}$$

In base alla formula (ii),

$$\begin{aligned}
&\| h(it, 1+i\tau) \|_{A_2} = \left\| H \left(i \frac{t\theta}{\theta_0+\theta}, \frac{\rho}{\rho_0+\rho} + i \frac{\tau\rho}{\rho_0+\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, \frac{\rho_0}{\rho_0+\rho} + i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{A_2} \leq \\
&\leq M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, \frac{\rho_0}{\rho_0+\rho} + i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{[A_0, A_2]_{\rho/(\rho_0+\rho)}} \leq \\
&\leq M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \max \left\{ \sup_{\tau} \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, i\tau \right) \right\|_{A_0}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{\tau} \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, 1+i\tau \right) \right\|_{A_2} \right\} \leq \\
&\leq M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \max \left\{ \sup_{t, \tau} \| f(it, i\tau) \|_{A_0}, \sup_{t, \tau} \| f(1+it, i\tau) \|_{A_1}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{t, \tau} \| f(it, 1+i\tau) \|_{A_2} \right\} = \\
&= M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}.
\end{aligned}$$

Di qui,

$$H(\theta, \rho)f(\theta_0, \rho_0) = H(\theta, \rho)x = h(\theta + \theta_0, \rho + \rho_0) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta+\theta_0, \rho+\rho_0}.$$

Inoltre, per il lemma 2,

$$\begin{aligned} \| h(\theta + \theta_0, \rho + \rho_0) \|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta + \theta_0, \rho + \rho_0}} &\leq M_0^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} (M_1^{\theta_0/(\theta+\theta_0)} M_3^{\theta/(\theta+\theta)})^{\theta_0+\theta} \cdot \\ &\cdot (M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)})^{\rho_0+\rho} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \\ &= M_0^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} M_1^{\theta_0} M_2^{\rho_0} M_3^{\theta} M_4^{\rho} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \\ &\leq M_0^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} M_1^{\theta_0} M_2^{\rho_0} M_3^{\theta} M_4^{\rho} (\| x \|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Dal momento che ε è un numero positivo arbitrario, il Teorema risulta provato.

COROLLARIO. *Sia $A_2 \hookrightarrow A_0, A_2 \hookrightarrow A_1$. Allora, se $\theta, \theta', \rho, \rho' \in [0, 1], 0 \leq \theta + \theta' + \rho + \rho' \leq 1$,*

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta+\theta', 1-\theta-\theta'-\rho-\rho'}$$

e pertanto,

$$[A_0, A_1, A_2]_{u, v} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{u+\theta, v-\theta-\rho}$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù del Teorema 12, prendendo come $H(z, w)$ l'operatore di immersione, si ha

$$(i) \quad [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta+\theta', \rho+\rho'}.$$

D'altra parte, per il Teorema 5 (3),

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

Quindi, il risultato segue immediatamente dalla (i).

TEOREMA 13. *Sia $0 \leq \theta_i + \rho_i \leq 1, 0 \leq \theta + \rho \leq 1, \theta_i, \rho_i, \theta, \rho \geq 0, (i=0, 1, 2)$. Allora, se*

$$\alpha = (1 - \theta - \rho)\theta_0 + \theta\theta_1 + \rho\theta_2, \quad \beta = (1 - \theta - \rho)\rho_0 + \theta\rho_1 + \rho\rho_2,$$

$$\begin{aligned} &[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta} \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}]_{\theta, \rho}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia x un elemento di $[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta}$. Allora dalla definizione di $[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta}$ segue che esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\alpha, \beta) = x$. Definiamo:

$$g(z, w) = f((1-z-w)\theta_0 + z\theta_1 + w\theta_2, (1-z-w)\rho_0 + z\rho_1 + w\rho_2), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

La definizione ha senso, perchè, se $0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1$, allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1-x-y)\theta_0 + x\theta_1 + y\theta_2 + (1-x-y)\rho_0 + x\rho_1 + y\rho_2 \leq \\ &\leq 1-x-y+x+y=1. \end{aligned}$$

Si riconosce che g è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, ologomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. Inoltre,

$$g(it, i\tau) = f(\theta_0 + i\varphi_0, \rho_0 + i\psi_0) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0},$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)};$$

$$g(1+it, i\tau) = f(\theta_1 + i\varphi_1, \rho_1 + i\psi_1) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}$$

con

$$\sup_{t, \tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)};$$

$$g(it, 1+i\tau) = f(\theta_2 + i\varphi_2, \rho_2 + i\psi_2) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}$$

con

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, 1+i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}.$$

Ma allora, (cfr. [1], § 9.1, p. 116 e p. 132, p. 159), g è pure continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2},$$

ologomorfa da Ω a

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}$$

e, dunque,

$$g \in \mathcal{H}([A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}).$$

D'altra parte, $g(\theta, \rho) = f(\alpha, \beta) = x$. Così,

$$\|x\|_{[[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}], \theta, \rho} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta}}.$$

COROLLARIO 1. Sia $0 \leq \theta_i$, $0 \leq \theta_i + \rho_i \leq 1$, ($i=0, 1$). Se $0 \leq \sigma \leq 1$, allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1} \hookrightarrow \\ \llbracket [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} \rrbracket_{\sigma}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 13,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \llbracket [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} \rrbracket_{\theta, \rho},$$

con $\alpha = (1 - \theta - \rho)\theta_0 + (\theta + \rho)\theta_1$, $\beta = (1 - \theta - \rho)\rho_0 + (\theta + \rho)\rho_1$.

Allora, (cfr, la Nota al Teorema 6),

$$[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta} \hookrightarrow \llbracket [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} \rrbracket_{\theta + \rho}.$$

Di qui, ponendo $\sigma = \theta + \rho$, si ha $\alpha = (1 - \sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1$, $\beta = (1 - \sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1$, e quindi,

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \llbracket [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} \rrbracket_{\sigma}.$$

COROLLARIO 2. Sia $0 \leq \theta$, $\rho \leq 1$, $0 \leq \theta + \rho \leq 1$. Allora

$$(1) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho}.$$

(Se $\theta = \rho = 0$, la (1) è ancora valida, nel senso che $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_0]_0$).

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 1 al Teorema 13, si ha

$$(i) \quad [A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0+\sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0+\sigma\rho_1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\sigma}.$$

Se $\theta + \rho \neq 0$, poniamo

$$\theta_0 = \rho_0 = 0, \theta_1 = 1 - \nu, \rho_1 = \nu = \rho / (\theta + \rho), \sigma = \theta + \rho.$$

È $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow [A_0, A_1]_0 \Leftrightarrow A_0$ (per la seconda inclusione, cfr. [1], p. 116) e

$$[A_0, A_1, A_2]_{1-\nu, \nu} = [A_1, A_0, A_2]_{0, \nu} \Leftrightarrow [A_1, A_2]_{\nu}.$$

Pertanto, $[A_0, A_1, A_2]_{\sigma(1-\nu), \sigma\nu} \Leftrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_{\nu}]_{\sigma}$.

Inoltre, $\sigma(1-\nu) = \theta$, $\sigma\nu = \rho$.

Se $\theta + \rho = 0$, ancora per il Corollario 1 al Teorema 13, con $\theta_0 = \rho_1 = \rho_0 = 0$, $\theta_1 = 1$, si ha

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{0,0}, [A_0, A_1, A_2]_{1,0}]_0.$$

Quindi, poichè $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow A_0$, applicazione del Teorema 5 e della Proposizione 4 porta a

$$[A_0, A_1, A_2]_{1,0} = [A_1, A_0, A_2]_{0,0} = [A_1, A_2, A_0]_{0,0} \Leftrightarrow [A_1, A_2]_0.$$

Così, $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_0]_0$.

COROLLARIO 3. Sia $0 \leq \theta$, $\rho \leq 1$, $0 \leq \theta + \rho \leq 1$. Allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \Leftrightarrow [[A_0, A_1]_{\theta+\rho}, [A_0, A_2]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 4,

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow [A_0, A_1]_0, [A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow [A_0, A_2]_0,$$

e quindi

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \Leftrightarrow [[A_0, A_1]_0, [A_0, A_2]_0]_0.$$

Come nella prova del precedente Corollario 2,

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0+\sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0+\sigma\rho_1} \leftrightarrow \\ [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_\sigma.$$

Ora poniamo $\theta_0=\rho_1=u$, $\rho_0=\theta_1=0$.

Allora, poichè

$$[A_0, A_1, A_2]_{u, 0} \leftrightarrow [A_0, A_1]_u, [A_0, A_1, A_2]_{0, u} \leftrightarrow [A_0, A_2]_u,$$

si ha

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)u, \sigma u} \leftrightarrow [[A_0, A_1]_u, [A_0, A_2]_u]_\sigma.$$

Sia $(1-\sigma)u=\theta$, $\sigma u=\rho$. Allora $u=\theta+\rho$, $\sigma=\rho/(\theta+\rho)$. E quindi,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \leftrightarrow [[A_0, A_1]_{\theta+\rho}, [A_0, A_2]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}.$$

Gli esempi successivi estendono risultati di M. Schechter in [9].

ESEMPIO 1. Sia $u(x)$ una distribuzione su \mathbf{R}^n , $x=(x_1, \dots, x_n)$.

Con $\mathcal{F}u(\xi)$ oppure $\widehat{u}(\xi)$ denotiamo la trasformata di Fourier di $u(x)$, $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Se $\lambda(\xi)$ è una funzione misurabile da \mathbf{R}^n a \mathbf{R} , strettamente positiva, $B^{\lambda, p}$ denota l'insieme di quelle $u(x)$ tali che $\lambda \mathcal{F}u = \widehat{\lambda u} \in L^p(\mathbf{R}^n)$, con $1 \leq p \leq +\infty$; su $B^{\lambda, p}$ si definisce la norma

$$\|u\|_{B^{\lambda, p}} = \|\lambda \mathcal{F}u\|_{L^p},$$

che ne fa uno spazio di Banach, (cfr. [9], p. 125).

TEOREMA 14. Siano $\lambda_0(\xi)$, $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ funzioni misurabili soddisfacenti la condizione $0 < \lambda_0(\xi) \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$ e siano $p_0, p_1, p_2 \in [1, +\infty]$. Poniamo

$$\beta(\xi) = [\lambda_1(\xi)/\lambda_0(\xi)]^{-\theta} [\lambda_2(\xi)/\lambda_0(\xi)]^{-\rho}, \quad 0 \leq \theta, \rho \leq 1,$$

$$0 \leq \theta + \rho \leq 1, \quad \lambda_{\theta, \rho} = \lambda_0/\beta = \lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^\theta \lambda_2^\rho.$$

Inoltre sia $1/p_{\theta, \rho} = (1-\theta-\rho)/p_0 + \theta/p_1 + \rho/p_2$.

Allora:

$$B^{\lambda_0, \rho, p_0, \rho} = [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}.$$

Per provare il Teorema 14, stabiliamo il seguente

LEMMA 4. $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$ se e solo se esiste $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ tale che

$$\mathfrak{F}u = \widehat{u} = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\rho} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\theta} g(\theta, \rho).$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$ implica che esiste f , elemento di $\mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$ tale che $f(\theta, \rho) = u$. Poniamo

$$g(z, w) = \lambda_0^{1-z-w} \lambda_1^z \lambda_2^w \mathfrak{F}f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

cioè,

$$(g(z, w))(\xi) = (\lambda_0(\xi))^{1-z-w} (\lambda_1(\xi))^z (\lambda_2(\xi))^w (\mathfrak{F}f(z, w))(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Poichè $f \in \mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$, vale

$$\lambda_0 \mathfrak{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}, \quad \lambda_1 \mathfrak{F}f(1+it, i\tau) \in L^{p_1}, \quad \lambda_2 \mathfrak{F}f(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}.$$

Di qui,

$$|(g(it, i\tau))(\xi)| = \lambda_0(\xi) |(\mathfrak{F}f(it, i\tau))(\xi)| \Rightarrow g(it, i\tau) \in L^{p_0}, \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Analogamente,

$$g(1+it, i\tau) \in L^{p_1}, \quad g(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}.$$

Inoltre, per le ipotesi sulla f ,

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < +\infty; \quad \sup_{t, \tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{L^{p_1}} < +\infty;$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, 1+i\tau)\|_{L^{p_2}} < +\infty.$$

Segue anche che g è continua e limitata da $\bar{\Omega}$ a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$, olomorfa da Ω a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$. Quindi, $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$.

D'altra parte,

$$\mathfrak{F}u = \mathfrak{F}f(\theta, \rho) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho).$$

Pertanto, una implicazione della equivalenza enunciata è provata.

Ora supponiamo $\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho)$, con $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$.

Si definisce una funzione f attraverso

$$\mathfrak{F}f(z, w) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-z} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-w} g(z, w).$$

f è un elemento di $\mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$.

Infatti, $|\mathfrak{F}f(it, i\tau)| = \lambda_0^{-1} |g(it, i\tau)|$; ma $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ e pertanto, $g(it, i\tau) \in L^{p_0}$, con $\sup_{i, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < +\infty$. Di qui, $\lambda_0 \mathfrak{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}$ e

$$\|f(it, i\tau)\|_{B^{\lambda_0, p_0}} = \|\lambda_0 \mathfrak{F}f(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} = \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < M_0,$$

dove M_0 è una costante indipendente da t e τ .

Analogamente, si prova che $f(1+it, i\tau) \in B^{\lambda_1, p_1}$, $f(it, 1+i\tau) \in B^{\lambda_2, p_2}$, con

$$\sup_{i, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{B^{\lambda_1, p_1}} < M_1, \quad \sup_{i, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{B^{\lambda_2, p_2}} < M_2.$$

Inoltre, poiché $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$, la f definita sopra è continua e limitata da $\bar{\Omega}$ a $B^{\lambda_0, p_0} + B^{\lambda_1, p_1} + B^{\lambda_2, p_2}$, olomorfa da Ω a $B^{\lambda_0, p_0} + B^{\lambda_1, p_1} + B^{\lambda_2, p_2}$.

$$\text{È } \mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho) = \mathfrak{F}f(\theta, \rho). \text{ Dunque, } u = f(\theta, \rho).$$

Pertanto, poiché $f \in \mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$, si può concludere che

$$u = f(\theta, \rho) \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 14. Sia $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

Allora, per il Lemma 4, esiste $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ tale che

$$\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho).$$

Poichè

$$g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2}, g(\theta, \rho) \in L^{p_{\theta, \rho}} (= [L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2}]_{\theta, \rho})),$$

(cfr. [8], p. 1855).

Inoltre,

$$\lambda_{\theta, \rho} \mathfrak{F}u = \frac{\lambda_0}{\beta} \mathfrak{F}u = \frac{\lambda_0}{\beta} \frac{\beta}{\lambda_0} g(\theta, \rho) = g(\theta, \rho) \in L^{p_{\theta, \rho}}.$$

Dunque, $u \in B^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}}$.

Viceversa, sia $u \in B^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}}$. Allora, per definizione di $B^{\lambda, p}$,

$$\lambda_{\theta, \rho} \mathfrak{F}u = \lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^\theta \lambda_2^\rho \mathfrak{F}u \in L^{p_{\theta, \rho}} = [L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2}]_{\theta, \rho}.$$

Dunque, esiste $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ tale che

$$\lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^\theta \lambda_2^\rho \mathfrak{F}u = g(\theta, \rho).$$

Ma allora, per il Lemma 4, poichè $\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho)$, si ha $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

Ciò conclude la prova del Teorema 14.

COROLLARIO. *Siano λ_0, λ_1 funzioni misurabili strettamente positive, come nel Teorema 14, e $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$.*

Se $\lambda_\theta = \lambda_0^{1-\theta} \lambda_1^\theta$, $\theta \in]0, 1[$, $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, allora

$$B^{\lambda_\theta, p_\theta} = [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}]_\theta.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Nota al Teorema 6 e dal Teorema 14. Infatti,

$$[B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}]_\theta = [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_1, p_1}]_{\theta, 0} = B^{\lambda_\theta, p_\theta}.$$

OSSERVAZIONE. Dal Teorema 14 e dal suo Corollario segue che

$$[B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho} = B^{\lambda_0, p_0, p_0, \rho} = [B^{\lambda_0, p_0}, [B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho}.$$

Infatti, $[B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\rho/(\theta+\rho)} = B^{\lambda_3, p}$ con $\lambda_3 = \lambda_1^{\theta/(\theta+\rho)} \lambda_2^{\rho/(\theta+\rho)}$ e

$$1/p = \theta/(p_1(\theta+\rho)) + \rho/(p_2(\theta+\rho)); [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_3, p}]_{\theta+\rho} = B^{\lambda_0, p, \tilde{p}}$$

dove

$$1/\tilde{p} = (1-\theta-\rho)/p_0 + (\theta+\rho)/p = 1/p_{\theta, \rho}, \text{ cioè, } \tilde{p} = p_{\theta, \rho}.$$

ESEMPIO 2. Sia $\lambda(\xi)$ una funzione misurabile strettamente positiva su \mathbf{R}^n . Allora con $H^{\lambda, p}$, $p \in [1, +\infty[$, si intende l'insieme delle distribuzioni $u(x)$ tali che $\mathcal{F}^{-1} \lambda \mathcal{F} u = \widetilde{\lambda u} \in L^p(\mathbf{R}^n)$, dove \mathcal{F}^{-1} denota la trasformata di Fourier inversa; munito della norma

$$\|u\|_{H^{\lambda, p}} = \|\mathcal{F}^{-1} \lambda \mathcal{F} u\|_{L^p},$$

$H^{\lambda, p}$ risulta essere uno spazio di Banach, (cfr. [9], p. 128).

Per provare un risultato corrispondente al Teorema 14 per gli spazi $H^{\lambda, p}$ dobbiamo ricordare qualche definizione.

Sia m una funzione misurabile limitata su \mathbf{R}^n . Allora si definisce una trasformazione lineare T_m , di dominio $L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n)$, per mezzo della seguente relazione fra trasformate di Fourier

$$(T_m f)(x) = m(x) \widehat{f}(x), \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n).$$

Si dice che m è un moltiplicatore in $L^p(1 \leq p \leq +\infty)$ se

$$f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n) \Rightarrow T_m f \in L^p(\mathbf{R}^n),$$

e T_m è limitata, cioè, esiste $A > 0$ per cui

$$(1) \quad \|T_m(f)\|_{L^p} \leq A \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n).$$

La più piccola A tale che (1) è vera, si chiama la norma del moltiplicatore m e si dice che $m \in M_p$.

Se vale (1) ed è $p < +\infty$ allora T_m ha una estensione unica e limitata a $L^p(\mathbf{R}^n)$, che ancora soddisfa (1). Tale estensione si denota con T_m .

Sui moltiplicatori, cfr. [11], p. 94 e sgg.

LEMMA 5. Sia $1 < p_0, p_1, p_2 < +\infty$; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ siano funzioni misurabili strettamente positive, con $0 < \lambda_0(\xi) \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$, tali che

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau} \in M_{p_j}, \quad (j=0, 1, 2) \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}$$

e la norma in M_{p_j} di

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau}$$

sia uniformemente limitata in t e τ ($j=0, 1, 2$).

Allora:

$$u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho} \text{ se e solo se esiste } g \in \mathcal{K}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$$

tale che

$$\mathcal{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-\rho} \mathcal{F}g(\theta, \rho).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

Allora esiste $f \in \mathcal{K}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})$, tale che $f(\theta, \rho) = u$.

Definiamo una funzione g attraverso la relazione fra trasformate di Fourier

$$\mathcal{F}g(z, w) = \lambda_0^{1-z-w} \lambda_1^z \lambda_2^w \mathcal{F}f(z, w), \quad (z, w) \in \bar{\Omega}.$$

Poichè $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau}$ è un elemento di M_{p_j} ($j=0, 1, 2$), si ha

$$(2) \quad h \in L^{p_j} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau} \mathcal{F}h \in L^{p_j}.$$

Poichè $f \in \mathcal{K}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})$, $\mathcal{F}^{-1} \lambda_0 \mathcal{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}$.

Quindi, per la (2),

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{i\tau} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau) \in L^{p_0}.$$

Ma $\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{i\tau} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau) = g(it, i\tau)$. Dunque, $g(it, i\tau) \in L^{p_0}$, $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$.

D'altra parte, per la limitatezza uniforme di $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{i\tau}$ nella norma di M_{p_0} ,

$$\begin{aligned} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} &\leq A \cdot \|\mathfrak{F}^{-1} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} = A \|f(it, i\tau)\|_{H^{\lambda_0, p_0}} \leq \\ &\leq A \|f\|_{\mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})}. \end{aligned}$$

Così, $\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < +\infty$.

Allo stesso modo si prova che $g(1+it, i\tau) \in L^{p_1}$, $g(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}$ e

$$\sup_{t, \tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{L^{p_1}} < +\infty, \quad \sup_{t, \tau} \|g(it, 1+i\tau)\|_{L^{p_2}} < +\infty.$$

Poichè \mathfrak{F} è un operatore lineare e continuo e

$$f \in \mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}),$$

g risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$, olomorfa da Ω a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$. Ne segue che $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ e allora, dalla definizione di g si deduce che

$$u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho} \Rightarrow \exists g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$$

tale che

$$\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} \mathfrak{F}g(\theta, \rho).$$

Viceversa, sia

$$\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} \mathfrak{F}g(\theta, \rho),$$

con $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$. Poniamo, come definizione di f ,

$$\mathfrak{F}f(z, w) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-z} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-w} \mathfrak{F}g(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Poichè $g(it, i\tau) \in L^{p_0}$ e

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-i\tau} \in M_{p_0}, \quad \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-i\tau} \mathfrak{F}g(it, i\tau) \in L^{p_0}.$$

Ne segue che $\mathfrak{F}^{-1}\lambda_0\mathfrak{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \|f(it, i\tau)\|_{H^{\lambda_0, p_0}} &= \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-i\tau} \mathfrak{F}g(it, i\tau) \right\|_{L^{p_0}} \leq \\ &\leq A \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} \leq A \|g\|_{\mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})}. \end{aligned}$$

Con analogo ragionamento, si riconosce che $\mathfrak{F}^{-1}\lambda_1\mathfrak{F}f(1+it, i\tau) \in L^{p_1}$, $\mathfrak{F}^{-1}\lambda_2\mathfrak{F}f(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}$, con

$$\begin{aligned} \|f(1+it, i\tau)\|_{H^{\lambda_1, p_1}} &\leq A \|g\|_{\mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})}, \quad \|f(it, 1+i\tau)\|_{H^{\lambda_2, p_2}} \leq \\ &\leq A \|g\|_{\mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})}. \end{aligned}$$

Infine, f è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $H^{\lambda_0, p_0} + H^{\lambda_1, p_1} + H^{\lambda_2, p_2}$, olo-morfa da Ω a $H^{\lambda_0, p_0} + H^{\lambda_1, p_1} + H^{\lambda_2, p_2}$. Quindi,

$$f \in \mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})$$

e

$$f(\theta, \rho) \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}.$$

D'altra parte,

$$\mathfrak{F}u = \mathfrak{F}f(\theta, \rho).$$

Dunque, $u = f(\theta, \rho)$. Pertanto, $u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

TEOREMA 15. *Valgano le ipotesi dela Lemma 5. Allora:*

$$H^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}} = [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho},$$

con $\lambda_{\theta, \rho} = \lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^\theta \lambda_2^\rho$, $1/p_{\theta, \rho} = (1-\theta-\rho)/p_0 + \theta/p_1 + \rho/p_2$.

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella del Teorema 14, sulla base del Lemma 5.

COROLLARIO. Siano $\lambda_0, \lambda_1, p_0, p_1 \in]1, +\infty[$, come nel Lemma 5. Se $\lambda_\theta = \lambda_0^{1-\theta} \lambda_1^\theta$, $\theta \in]0, 1[$, $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, allora

$$H^{\lambda_\theta, p_\theta} = [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}]_\theta.$$

Osserviamo infine che anche per gli spazi $H^{\lambda, p}$ vale la relazione

$$\begin{aligned} [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho} &= [H^{\lambda_0, p_0}, [H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho} = \\ &= [[H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}]_{\theta+\rho}, [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3. Sia X uno spazio di Banach riflessivo e A, B siano due operatori lineari chiusi in X con domini $D(A)$ e $D(B)$ densi (in X).

Inoltre, il risolvente di A e di B contenga l'asse reale negativo e valgano:

- (I) $\|(\lambda + A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq M(1 + \lambda)^{-1}$, $\lambda > 0$;
- (II) $\|(\mu + B)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq N(1 + \mu)^{-1}$, $\mu > 0$;
- (III) $(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1} = (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}$, $\lambda, \mu > 0$.

Si introduce una funzione $\Phi(z, w; \lambda, \mu)$, definita per $(z, w) \in \overline{\Omega}$, $0 < \lambda, \mu < +\infty$, a valori complessi, tale che

(a) $\forall (z, w) \in \overline{\Omega}$, $\Phi(z, w; \lambda, \mu)$ è una funzione misurabile di (λ, μ) e

$$(IV) \sup_{\Omega} \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(z, w; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu < +\infty;$$

(b) $(z, w) \rightarrow \Phi(z, w; \lambda, \mu)$ è continua in $\overline{\Omega}$, nel senso che $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(z, w; \lambda, \mu) - \Phi(z', w'; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu < \epsilon,$$

purchè $|z - z'| < \delta(\epsilon)$, $|w - w'| < \delta(\epsilon)$, $(z, w) \in \overline{\Omega}$, $(z', w') \in \overline{\Omega}$, ed è limitata nel senso che vale (IV).

(c) $(z, w) \rightarrow \Phi(z, w; \lambda, \mu)$ è olomorfa in Ω , nel senso che esistono Φ'_z, Φ'_w per cui

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\Phi(z + \Delta z, w; \lambda, \mu) - \Phi(z, w; \lambda, \mu)}{\Delta z} - \Phi'_z(z, w; \lambda, \mu) \right| \cdot (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0;$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\Phi(z, w + \Delta w; \lambda, \mu) - \Phi(z, w; \lambda, \mu)}{\Delta w} - \Phi'_w(z, w; \lambda, \mu) \right| \cdot (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \xrightarrow{\Delta w \rightarrow 0} 0.$$

Infine, si suppone che valgano le seguenti maggiorazioni:

$$(V) \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \leq 1;$$

$$(VI) \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \leq 1;$$

$$(VII) \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, 1 + i\tau; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} d\lambda d\mu \leq 1.$$

Poniamo ora la seguente

DEFINIZIONE 4. Se $\Phi(z, w; \lambda, \mu)$ soddisfa le condizioni (a)-(b)-(c) e le maggiorazioni (IV)-(VII), e A, B sono sottoposti alle (I)-(III), si denota con $\psi(z, w; A, B)$ l'integrale

$$\psi(z, w; A, B) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(z, w; \lambda, \mu) (\lambda + A)^{-1} (\mu + B)^{-1} d\lambda d\mu, \quad (z, w) \in \bar{\Omega}.$$

Osserviamo che se $(z, w) \in \bar{\Omega}$, per le (I)-(II), si ha

$$\begin{aligned} \|\psi(z, w; A, B)\|_{X \rightarrow X} &= \left\| \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(z, w; \lambda, \mu) (\lambda + A)^{-1} (\mu + B)^{-1} d\lambda d\mu \right\|_{X \rightarrow X} \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(z, w; \lambda, \mu)| MN(1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Quindi, per la (IV), $\|\psi(z, w; A, B)\|_{X \rightarrow X} \leq MN \cdot C$.

Così, $\psi(z, w; A, B)$ è un operatore lineare limitato in X .

D'altra parte, per la disuguaglianza (V),

$$MN \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| (1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} d\lambda d\mu \leq MN.$$

Dunque,

PROPOSIZIONE 8. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\psi(it, i\tau; A, B)$ è un operatore lineare limitato da X in sè e $\|\psi(it, i\tau; A, B)\|_{X \rightarrow X} \leq MN$.

Ricordiamo che, A e B essendo operatori lineari chiusi con domini $D(A)$ e $D(B)$ densi in X , $D(A)$ e $D(B)$ possono essere muniti di norme che ne fanno degli spazi di Banach; precisamente,

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X, \quad \|y\|_{D(B)} = \|y\|_X + \|By\|_X.$$

D'ora in poi intenderemo appunto $D(A)$ e $D(B)$ come spazi di Banach.

Facciamo anche notare (cfr. [9], p. 130) che gli operatori aggiunti di A e di B (aggiunti di operatori lineari non necessariamente limitati), godono delle medesime proprietà di A e di B , rispettivamente. In particolare,

$$(i) \quad \|(\lambda + A^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \leq M(1+\lambda)^{-1}, \quad \lambda > 0,$$

$$(ii) \quad \|(\mu + B^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \leq N(1+\mu)^{-1}, \quad \mu > 0.$$

Di qui, poichè

$$f \in D(A^*) \Rightarrow (\lambda + A^*)^{-1} A^* f = f - \lambda(\lambda + A^*)^{-1} f = A^*(\lambda + A^*)^{-1} f,$$

$$(iii) \quad \| A^*(\lambda + A^*)^{-1} \|_{X' \rightarrow X'} \leq \left(1 + M \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right) \leq 1 + M, \quad \lambda > 0.$$

Analogamente,

$$(iv) \quad \| B^*(\mu + B^*)^{-1} \|_{X' \rightarrow X'} \leq 1 + N, \quad \mu > 0.$$

Poniamo $y = \psi(1 + it, i\tau; A, B)x$, $x \in X$, e sia $z \in D(A^*)$. Se $\langle x, f \rangle$ denota il valore del funzionale f in x , si ha:

$$\begin{aligned} \langle y, A^*z \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu) \langle (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x, A^*z \rangle d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu) \langle x, (\mu + B^*)^{-1}(\lambda + A^*)^{-1}A^*z \rangle d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Così,

$$\begin{aligned} |\langle y, A^*z \rangle| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| \|x\|_X \|(\mu + B^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \\ &\quad \|(\lambda + A^*)^{-1}A^*\|_{X' \rightarrow X'} \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq (\text{per la (iii)}) \leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| \|x\|_X \|(\mu + B^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \\ &\quad (1 + M) \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| N(1 + M)(1 + \mu)^{-1} \|x\|_X \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq (M + 1)N \|x\|_X \|z\|_{X'}, \end{aligned}$$

in base alla (ii) e alla (VI).

Ma allora $y \in D(A)$ e $\langle y, A^*z \rangle = \langle Ay, z \rangle$. Inoltre, dal fatto che $D(A^*)$ è denso in X (cfr. [6], p. 168) e X è riflessivo, deduciamo che

$$\begin{aligned} \|Ay\|_X &= \sup_{f \in X'} \frac{|\langle Ay, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \|Ay\|_{X'} = \sup_{f \in D(A^*)} \frac{|\langle Ay, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} \\ &= \sup_{z \in D(A^*)} \frac{|\langle y, A^*z \rangle|}{\|z\|_{X'}} \leq (M + 1)N \|x\|_X. \end{aligned}$$

Ciò significa che $\| A\psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow X} \leq (M+1)N$.

Pertanto, $(\psi(1+it, i\tau; A, B))X \subset D(A)$. Valutiamo la norma

$$\| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(A)} .$$

Sia $x \in X$. Allora

$$\begin{aligned} \| \psi(1+it, i\tau, A, B)x \|_{D(A)} &= \| \psi(1+it, i\tau; A, B)x \|_X + \\ &+ \| A\psi(1+it, i\tau; A, B)x \|_X \leq \\ &\leq \| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_X + (M+1)N \| x \|_X . \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} &\| \psi(1+it, i\tau; A, B)x \|_X \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty | \Phi(1+it, i\tau; \lambda, \mu) | MN(1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} \| x \|_X d\lambda d\mu \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty | \Phi(1+it, i\tau; \lambda, \mu) | MN(1+\mu)^{-1} \| x \|_X d\lambda d\mu \leq MN \| x \|_X , \end{aligned}$$

in base alla disuguaglianza (VI). Perciò,

$$\| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(A)} \leq (M+1)N + MN = (2M+1)N.$$

Si può allora stabilire la

PROPOSIZIONE 9. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$ l'operatore $\psi(1+it, i\tau; A, B)$ è lineare continuo da X a $D(A)$ con norma

$$\| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(A)} \leq (2M+1)N.$$

Seguendo le medesime linee di ragionamento, si prova la

PROPOSIZIONE 10. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$ l'operatore $\psi(it, 1+i\tau; A, B)$ è lineare continuo da X a $D(B)$ con norma

$$\| \psi(it, 1+i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(B)} \leq (2N+1)M.$$

Si può allora provare il seguente

TEOREMA 16. Sia $0 < \theta + \rho < 1$, $0 < \theta$, $\rho < 1$. Allora l'operatore $\psi(\theta, \rho; A, B)$ è continuo da X a $[X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}$ e

$$\|\psi(\theta, \rho; A, B)\|_{X \rightarrow [X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}} \leq MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. La funzione $\psi(z, w; A, B)$ soddisfa, per le assunzioni fatte inizialmente, tutte le condizioni per poter applicare il Teorema 2; infatti, con la notazione usata in quel teorema,

$$\psi(z, w; A, B) = H(z, w).$$

Di qui, $\psi(\theta, \rho; A, B)$ è limitato da $[X, X, X]_{\theta, \rho} \equiv X$ a $[X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}$, in base alle Proposizioni 8 - 9 - 10.

Inoltre, sempre per il Teorema 2,

$$\begin{aligned} \|\psi(\theta, \rho; A, B)\|_{X \rightarrow [X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}} &\leq (MN)^{1-\theta-\rho} N^{\theta} (2N+1)^{\rho} (2M+1)^{\theta} M^{\rho} = \\ &= M^{1-\theta} N^{1-\rho} (2M+1)^{\theta} (2N+1)^{\rho} = MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}. \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi che $(\lambda + A)^{-1}$ e $(\mu + B)^{-1}$ sono commutativi per $\mu, \lambda > 0$.

Supponiamo $x \in D(A)$. Vale:

$$\begin{aligned} A(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x &= (I - \lambda(\lambda + A)^{-1})(\mu + B)^{-1}x = \\ &= (\mu + B)^{-1}x - \lambda(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x = \\ &= (\mu + B)^{-1}x - \lambda(\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}x = (\mu + B)^{-1}(I - \lambda(\lambda + A)^{-1})x = \\ &= (\mu + B)^{-1}A(\lambda + A)^{-1}x = (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}Ax. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$w \in D(B) \Rightarrow B(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}w = (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}Bw.$$

Supponiamo che $x \in D(A)$, $z \in D(A^*)$ e poniamo $y = \psi(it, i\tau; A, B)x$.

Allora:

$$\begin{aligned} \langle y, A^*z \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle A(\lambda+A)^{-1}(\mu+B)^{-1}x, z \rangle d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle (\mu+B)^{-1}(\lambda+A)^{-1}Ax, z \rangle d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} |\langle y, A^*z \rangle| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| M(\lambda+1)^{-1}N(\mu+1)^{-1} \|Ax\|_X \\ &\quad \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq MN \|Ax\|_X \|z\|_{X'}, \end{aligned}$$

per la (V). Dunque,

$$\|Ay\|_X = \sup_{f \in X'} \frac{|\langle Ay, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \sup_{z \in D(A^*)} \frac{|\langle y, A^*z \rangle|}{\|z\|_{X'}} \leq MN \|Ax\|_X.$$

D'altra parte,

$$\|y\|_X = \left\| \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) (\lambda+A)^{-1}(\mu+B)^{-1}x d\lambda d\mu \right\|_X \leq MN \|x\|_X.$$

Così $y \in D(A)$ e

$$\begin{aligned} \|\psi(it, i\tau; A, B)x\|_{D(A)} &= \|\psi(it, i\tau; A, B)x\|_X + \\ &+ \|A\psi(it, i\tau; A, B)x\|_X \leq MN \|x\|_X + MN \|Ax\|_X = MN \|x\|_{D(A)}. \end{aligned}$$

Pertanto,

PROPOSIZIONE 11. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\psi(it, i\tau, A, B)$ è un operatore lineare e continuo da $D(A)$ in sè e vale

$$\|\psi(it, i\tau; A, B)\|_{D(A) \rightarrow D(A)} \leq MN.$$

Supponiamo $x \in D(B)$, $z \in D(B^*)$ e poniamo $w = \psi(it, i\tau; A, B)x$. Allora,

$$\begin{aligned} \langle w, B^*z \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle B(\mu+B)^{-1}(\lambda+A)^{-1}x, z \rangle d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle (\lambda+A)^{-1}(\mu+B)^{-1}Bx, z \rangle d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

perchè $(\lambda+A)^{-1}$ e $(\mu+B)^{-1}$ sono commutativi. Di qui,

$$\begin{aligned} |\langle w, B^*z \rangle| &\leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| MN(1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} \|Bx\|_X \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq MN \|Bx\|_X \|z\|_{X'}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\|Bw\|_X = \sup_{f \in X'} \frac{|\langle Bw, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \sup_{z \in D(B^*)} \frac{|\langle w, B^*z \rangle|}{\|z\|_{X'}} \leq MN \|Bx\|_X.$$

Poichè, per la (V), $\|w\|_X \leq MN \|x\|_X$, si è provato che

$$\psi(it, i\tau; A, B)x \in D(B) \text{ e } \|\psi(it, i\tau; A, B)x\|_{D(B)} \leq MN \|x\|_{D(B)}.$$

Ne segue la

PROPOSIZIONE 12. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\psi(it, i\tau; A, B)$ è un operatore lineare continuo da $D(B)$ in sè e

$$\|\psi(it, i\tau; A, B)\|_{D(B) \rightarrow D(B)} \leq MN.$$

TEOREMA 17. Se $0 < \theta, \rho, \theta_0, \rho_0 < 1$, $0 < \theta + \rho + \theta_0 + \rho_0 < 1$, allora $\psi(\theta, \rho; A, B)$ è un operatore lineare continuo da $[X, D(A), D(B)]_0$

a $[X, D(A), D(B)]_{\theta+\theta_0, \rho+\rho_0}$ e

$$(i) \quad \|\Psi(\theta, \rho; A, B)\|_{[X, D(A), D(B)]_{\theta_0, \rho_0} \rightarrow [X, D(A), D(B)]_{\theta+\theta_0, \rho+\rho_0}} \leq \\ \leq MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle Proposizioni 8 - 12, in base al Teorema 12. Quanto alla valutazione (i), essa è conseguenza di

$$(MN)^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} (MN)^{\theta_0} (MN)^{\rho_0} (N(2M+1))^{\theta} (M(2N+1))^{\rho} = \\ = MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] CALDERÓN, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation. The complex method*, Studia Math. 24, pp. 113-190, 1964.
- [2] CALDERÓN, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Math., Special Series 1, pp. 31-34, 1963.
- [3] DUNFORD, N. - SCHWARTZ, J. T.: *Linear operators*, Part 1, (Interscience) 1967.
- [4] FAVINI, A.: *Alcuni risultati sulla interpolazione non lineare*, Boll. U.M.I., 1971.
- [5] HILLE, E. - PHILLIPS, R. S.: *Functional analysis and semigroups*, A.M.S. Coll. Pubb. 31, 1957.
- [6] KATO, T.: *Perturbation theory for linear operator*, Springer, 1966.
- [7] KREIN, S. G. - PETUNIN, YU. I.: *Scales of Banach Spaces*, Russian Math. Surveys 21, pp. 85-159, 1966.
- [8] LIONS, J. L.: *Une construction d'espaces d'interpolation*, C.R.A.S., Paris 251, pp. 1853-1855, 1961.
- [9] SCHECHTER, M.: *Complex interpolation*, Compositio Math. 18, pp. 117-147, 1967.
- [10] SCHECHTER, M.: *On L^p -estimates and regularity I*, Ann. of Math. 85, pp. 1-13, 1963.

- [11] STEIN, E. M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, 1970.
- [12] YOSHIKAWA, A.: *Sur la théorie d'espaces d'interpolation - les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach*, Journal Fac. Science, Univ. Tokyo 16, pp. 407-468, 1970.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 gennaio 1972.