MAURIZIO EMALDI

Sugli *IK*-gruppi risolubili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 9-13
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__9_0>

SUGLI IK-GRUPPI RISOLUBILI

MAURIZIO EMALDI *)

Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di G. Si chiama complemento di H in G ogni sottogruppo K di G, tale che $G=H \cup K$ e $H \cap K=1$, dove 1 denota il gruppo identico. Un gruppo in cui ciascun sottogruppo (sottogruppo normale) ammette un complemento si dice [15] un K-gruppo ([7] un nC-gruppo). Un gruppo in cui ciascun sottogruppo ammette un complemento con cui è permutabile si dice [4] un C-gruppo. Un gruppo infinito in cui ciascun sottogruppo infinito ammette un complemento con cui è permutabile si dice [4] un IC-gruppo. Un gruppo in cui ciascun sottogruppo infinito (sottogruppo normale infinito) ammette un complemento verrà da noi detto un IK-gruppo (un nIC-gruppo). Caratterizzazioni dei K-gruppi risolubili [1]) sono state date, nel caso finito da Zacher [14] e, nel caso generale, da Emaldi [8], [9]. I C-gruppi sono stati caratterizzati, nel caso finito da Hall [10] e, nel caso generale, da Cernikov [3] e dalla Cernikova [5]. Uno studio degli IC-gruppi è stato fatto da Cernikov [4]. Nella presente nota si studiano gli IK-gruppi risolubili per i quali tutte le immagini omomorfe hanno il sottogruppo di Frattini [2]) identico.

1. Dedichiamo questo numero ad alcune proposizioni utili in seguito. Incominciamo con la seguente nota proposizione:

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

1) Per la definizione si veda [11] vol. II, p. 179.

2) Per la definizione si veda [11] vol. II, p. 217.

Prop. 1. *Siano H un sottogruppo del gruppo G e N un sottogruppo normale di G contenuto in H. Allora*:

a) *se C è un complemento di H in G, allora NC/N è un complemento di H/N in G/N;*

b) *se C è un complemento di N in G, allora $H \cap C$ è un complemento di N in H, normale in G se H è abeliano e normale in G.*

Prop. 2. *Se G è un K-gruppo (IK-gruppo) allora il sottogruppo di Frattini $\Phi(G)$ di G è identico (periodico).*

Dim. Siano A un qualunque sottogruppo ciclico di $\Phi(G)$ e B un complemento di A in G. Allora da $G=A \cup B$ segue $G=B$ ([11], vol. II, p. 127). Per conseguenza, $1=A \cap B=A \cap G=A$.

Prop. 3. *Sia $A \neq 1$ un sottogruppo abeliano e normale del gruppo G. Se G è un nIC-gruppo e se $A \cap \Phi(G) \neq A$, allora A contiene sottogruppi normali minimi di G.*

Dim. Nelle ipotesi poste esiste in G un sottogruppo massimo M che non contiene A. Pertanto $A \cap M$ è un sottogruppo normale di $G=AM$ in quanto è normale in A e in M. Se $A \cap M=1$, allora A è normale minimo in G. Se $A \cap M$ è un gruppo finito non identico, allora è chiaro che A contiene sottogruppi normali minimi di G. Se $A \cap M$ è un gruppo infinito, allora per la prop. 1 b) esiste in G un sottogruppo normale N che è complemento di $A \cap M$ in A. E allora N è normale minimo in G.

Prop. 4. *Sia $A \neq 1$ un sottogruppo abeliano e normale del gruppo G. Se G è un nIC-gruppo e se $A \cap \Phi(G)=1$, allora A ammette almeno una decomposizione in prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G e ammette almeno un complemento in G.*

Dim. Per la prop. 3 A contiene sottogruppi normali minimi di G. Indichiamo con T il prodotto di tutti i sottogruppi normali minimi di G contenuti in A. Allora ([6], p. 61) T ammette almeno una decomposizione in prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G. Se i fattori di una tale decomposizione di T sono in numero finito, allora T ha un complemento in G in quanto ciascuno di tali fattori ha un complemento in G ([13]); in caso diverso T è un gruppo infinito e, quindi,

---

[3]) Per la definizione si veda [11] vol. II, p. 153.

ha un complemento in G. Per la prop. 1 b) esiste allora un sottogruppo normale C di G che è complemento di T in A. Per la stessa definizione di T e per la prop. 3 si ha allora $C=1$ e $T=A$ in quanto C non può contenere sottogruppi normali minimi di G.

PROP. 5. [8] *Se il gruppo G possiede un sottogruppo abeliano e normale A, tale che*:

a) *A ammetta almeno una decomposizione in prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G,*

b) *A ammetta almeno un complemento C in G, con C un K-gruppo, allora G è un K-gruppo.*

PROP. 6. *Se G è un nIC-gruppo che possiede un sottogruppo normale non identico A, tale che*:

a) $A \cap \Phi(G)=1$,

b) *A sia uno ZA-gruppo* [4]),

c) *G/A sia risolubile,*

allora G è risolubile.

DIM. Nelle ipotesi poste è sufficiente ([11] vol. II, p. 180) dimostrare che A è, in particolare, abeliano. Indichiamo con C il centro di A. Poichè C è un sottogruppo caratteristico di A e A è normale in G, C è normale in G. Per la prop. 1 b) C ammette allora un complemento D in A. Ora D è ([11] vol. II, p. 219) uno ZA-gruppo e il centro di D è contenuto in C. Pertanto $D=1$ e così $C=A$.

2. Siamo ora in grado di dimostrare i due teoremi che seguono.

TEOREMA 1. *Ogni IK-gruppo risolubile è localmente finito.*

DIM. Sia G un IK-gruppo e sia $G^{(0)}=G$, $G^{(1)}=G'$, ..., $G^{(n-1)}$, $G^{(n)}=1$ la serie derivata di G. Per la prop. 1 a) possiamo procedere nella dimostrazione facendo induzione sulla lunghezza di questa serie. Se $n=1$ il teorema segue dalla prop. 1 b). Sia $n>1$. Allora il gruppo fattoriale $G/G^{(n-1)}$ è localmente finito. Supponiamo ora che G non sia localmente finito. Allora ([11]vol. II, p. 193) $G^{(n-1)}$ non è localmente finito.

---

[4]) Per la definizione si veda [11] vol. II, p. 218.

Non è allora restrittivo supporre che $G^{(n-1)}$ sia un gruppo libero da torsione. Per la prop. 2 si ha $G^{(n-1)} \cap \Phi(G) = 1$. Per la prop. 4 $G^{(n-1)}$ contiene sottogruppi normali minimi di G e questi risultano, di conseguenza, tutti liberi da torsione. Sia allora A un sottogruppo normale minimo di G contenuto in $G^{(n-1)}$. Poichè il centralizzante di A in G contiene $G^{(n-1)}$, A risulta localmente finito ([2]). Questa contraddizione consente di affermare che G è localmente finito.

TEOREMA 2. *Per il gruppo risolubile G le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:*

a) *G è un K-gruppo;*

b) *G è un IK-gruppo ogni cui immagine omomorfa ha il sottogruppo di Frattini identico;*

c) *G è un nIC-gruppo ogni cui immagine omomorfa ha il sottogruppo di Frattini identico.*

DIM. Per la prop. 1 a) e per la prop. 2 da a) segue b). Che da b) segua la c) è evidente. Dimostriamo che da c) segue a). Per la prop. 1 a) possiamo fare la dimostrazione per induzione sulla lunghezza della serie derivata $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$, ..., $G^{(n-1)}$, $G^{(n)} = 1$ di G. Se $n = 1$ allora G è un K-gruppo. Infatti per la prop. 1 b) G è periodico. Sia $n > 1$. Allora il gruppo fattoriale $G/G^{(n-1)}$ è, per l'ipotesi di induzione, un K-gruppo. Ora per la prop. 4 $G^{(n-1)}$ ammette almeno una decomposizione in prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G e ammette almeno un complemento C in G. Poichè C è un gruppo isomorfo al gruppo $G/G^{(n-1)}$, per la prop. 5 G è un K-gruppo.

COROLLARIO. *Per il gruppo supersolubile*[5]) *G le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:*

a) *G è un K-gruppo;*

b) *G è un IK-gruppo ogni cui immagine omomorfa ha il sottogruppo di Frattini identico.*

DIM. Per la prop. 2 e per la prop. 1 a) da a) segue b). Dimostriamo che da b) segue a). Il derivato G' di G è uno ZA-gruppo [1]. Per la prop. 6 G è risolubile. Per il teorema 2 G è un K-gruppo.

---

[5]) Per la definizione si veda [11] vol. II, p. 228.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER, R.: *Supersoluble groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 16-32.

[2] BAER, R.: *Irreducible groups of automorphisms of abelian groups*, Pacific J. Math., 14 (1964), 385-406.

[3] CERNIKOV, S. N.: *Gruppy s sistemamy dopolnyaemyh podgrupp*, Mat. Sb., 35 (77), N° 1 (1954), 93-128.

[4] CERNIKOV, S. N.: *Gruppy s zadannymi svoĭstvami sistem beskonečnyh podgrupp*, Ukr. Mat. J., 19, N. 6 (1967), 111-131.

[5] CERNIKOVA, N. V.: *Gruppy s dopolnyaemymi podgruppami*, Mat. Sb., 39 (81), N. 3 (1956), 273-292.

[6] CHEVALLEY, C.: *Fundamental concepts of algebra*, Academic Press, New York 1956.

[7] CHRISTENSEN, C.: *Complementations in groups*, Math. Z., 84 (1964), 52-69.

[8] EMALDI, M.: *Sui gruppi risolubili complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 42 (1969), 123-128.

[9] EMALDI, M.: *Una nota sui gruppi risolubili complementati*, Boll. U.M.I., 5 (1970), 858-862.

[10] HALL, P.: *Complemented groups*, Journ. London Math. Soc., 12 (1937), 201-204.

[11] KUROSH, A. G.: *The theory of groups*, Chelsea, New York 1960.

[12] NAPOLITANI, F.: *Sui gruppi risolubili complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 38 (1967), 118-120.

[13] ZACHER, G.: *Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 21 (1952), 383-394.

[14] ZACHER, G.: *Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 22 (1953), 113-122.

[15] SUZUKI, M.: *Structure of a group and structure of its lattice of subgroups*, Springer Berlin 1954.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 dicembre 1970.