RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über nile Algebren mit nilpotenten Kommutatoridealen die keine von null verschiedenen Zentren besitzen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 391-395

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__391_0>

ÜBER NILE ALGEBREN MIT NILPOTENTEN KOMMUTATORIDEALEN DIE KEINE VON NULL VERSCHIEDENEN ZENTREN BESITZEN

WALTER STREB *)

Herrn Professor W. Specht zum 65. Geburtstag gewidmet.

P. M. Cohn [2] hat gezeigt, daß es zu jeder Primzahl p eine Algebra A der Charakteristik p gibt, die $(b \circ a)_{p+1}=0$ und $(a \circ b) \circ (c \circ d)=0$ für alle $a, b, c, d \in A$ erfüllt, jedoch keinen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt. Hierbei sei für $a, b \in A$

$$a \circ b := ab - ba$$

$$(b \circ a)_1 := b \circ a \quad \text{und} \quad (b \circ a)_{n+1} := (b \circ a)_n \circ a.$$

M. P. Drazin hat gezeigt, daß Ringe der Charakteristik 0, die die beschränkte Engelbedingung und die Maximal- oder Minimalbedingung für Rechts- oder Linksideale erfüllen, nilpotente assoziierte Lie-Ringe besitzen [1; Theorem 5.1, p. 907]. In diesem Zusammenhang ist von Interesse, daß auch Algebren der Charakteristik 0, die die Engelbedingung erfüllen, nicht notwendig nilpotente assoziierte Lie-Ringe haben, selbst wenn sie nilpotente Kommutatorideale besitzen. Wir zeigen die Notwendigkeit einer Zusatzbedingung durch folgende Feststellung:

1) Es gibt eine nile Algebra A der Charakteristik 0, die $(a \circ b)c=0$ für alle $a, b, c \in A$ erfüllt, jedoch kein von Null verschiedenes Zentrum besitzt.

Weiterhin kann das Ergebnis von P. M. Cohn [2] wesentlich verschärft werden. Wir zeigen:

---

*) Indirizzo dell'A.: 857 Pegnitz, Leibnizweg 10, Germania Occ.

2) Zu jeder Primzahl p gibt es eine Algebra A der Charakteristik p, die $a^p b=0$ un $(a \circ b)c=0$ für alle $a, b, c \in A$ erfüllt, jedoch kein von Null verschiedenes Zentrum besitzt.

Diese Algebren A erfüllen die von Cohn [2; p. 403] angegebenen Bedingungen $(b \circ a)_{p+1}=0$ und $(a \circ b) \circ (c \circ d)=0$ für alle $a, b, c, d \in A$, die von Cohn angegebenen Algebren erfüllen 2) jedoch nicht, wie man leicht nachprüft.

Aus 1) und 2) folgt, daß Einschränkungen über die Charakteristik alleine nicht ausreichen, um zu erreichen, daß ein niler Ring mit nilpotentem Kummutatorideal schon schwach hyperzentral ist [3; S. 399].

Abschließend zeigen wir, daß endliche Algebren A, die

$$(a \circ b)c=0 \text{ für alle } a,\ b,\ c \in A$$

erfüllen, nicht notwendig von Null verschiedene Zentren besitzen.

Betrachtet wird zunächst die Algebra A der Matrizen $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ über einem beliebigen kommutativen Ring R. Es gilt:

(*a*) $$(a \circ b)c=0 \text{ für alle } a,\ b,\ c \in A.$$

Beweis. Für $r, s, t, u, v, w \in R$ ist

$$\left[\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} v & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ru-st \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen weiter:

(*b*) Ist R nil, so ist auch A nil.

(c) Gilt $r^p=0$ für alle $r \in R$, so ist $a^p b=0$ für alle $a, b \in A$.

Beweis. Seien $r, s, u, v \in R$. Aus $r^n=0$ folgt

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} r^{n+1} & r^n s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt (b). Aus $r^p=0$ folgt

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^p & r^{p-1}s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & r^{p-1}s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt (c).

Es gilt weiterhin:

(d) Gibt es zu jedem von Null verschiedenen Element r von R ein Element t von R, so daß $rt\neq 0$, so besitzt A kein von Null verschiedenes Zentrum.

Beweis. Von den Elementen r und s von R sei wenigstens eines von Null verschieden. Wir nehmen an, daß $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ im Zentrum von A liegt. Nach Voraussetzung läßt sich ein Element t von R so wählen, daß $rt\neq 0$ oder $st\neq 0$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & rt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -st \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

im Widerspruch zur Annahme.

Unmittelbar sieht man ein:

(e) Besitzt R die Charakteristik 0, so hat auch A die Charakteristik 0.

(f) Gilt $pr=0$ für alle $r\in R$, so ist auch $pa=0$ für alle $a\in A$.

Zu 1) ist wegen (a), (b), (d) und (e) ein niler kummutativer Ring R der Charakteristik 0 anzugeben, der die unter (d) genannte Bedingung erfüllt. Zu 2) ist wegen (a), (c), (d) und (f) ein kommutativer Ring R der Primzahlcharakteristik p anzugeben, der die unter (c) und (d) genannten Bedingungen erfüllt.

Mit den abzählbar vielen Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \ldots$, deren Menge mit U bezeichnet sei, bildet man formale Potenzprodukte $\prod_{j=1}^{n} x_{i_j}$ mit $x_{i_j} \in U$ für $1 \leq j \leq n$, deren Menge wir mit Q bezeichnen, und über einem kommutativen Körper K die Algebra S der formalen endlichen Summen $\sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ mit $k_i \in K$ und $q_i \in Q$ für $1 \leq i \leq m$. Die Multiplikationsregeln $x_i x_j = x_j x_i$ und $x_i^2 = 0$ für $x_i, x_j \in U$ führen zu einer Klasseneinteilung der Elemente von S, die mit der Struktur verträglich ist und deshalb zu einer Algebra R. Diese Algebra R ist kommutativ und weiterhin nil, da sie ein aus nilen Elementen bestehendes Erzeugendensystem besitzt.

Ist K ein Körper der Charakteristik 0, so ist R eine nile Algebra der Charakteristik 0. Wählt man für K einen Körper von Primzahlcharakteristik p, so gilt $r^p = 0$ und $pr = 0$ für alle $r \in R$.

Wir zeigen abschließend, daß R über einem beliebigen Körper K die unter (d) genannte Bedingung erfüllt:

Die geforderten Multiplikationsregeln bedingen folgende Kongruenz: $q \equiv 0$ für $q \in Q$ genau dann, wenn mindestens eine Unbestimmte wenigstens zweimal als aufbauender Faktor von q auftritt. Sei nun $s = \sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ mit $k_i \in K$ und $q_i \in Q$ für $1 \leq i \leq m$. Wir wählen eine ganze Zahl j so, daß x_j kein aufbauender Faktor irgendeines Potenzproduktes q_i für $1 \leq i \leq m$ ist. Dann folgt aus $s \not\equiv 0$ stets $s x_j \not\equiv 0$.

Hiermit ist bezüglich 1) und 2) alles bewiesen.

Abschließend sei bemerkt, daß die Algebra A über einem beliebigen endlichen Ring R mit Einselement endlich ist und nach (a) die Bedingung

$$(a \circ b)c = 0 \text{ für alle } a, b, c \in A$$

erfüllt, jedoch nach (d) kein von Null verschiedenes Zentrum besitzt, da $r1 = r \neq 0$ für alle von Null verschiedenen Elemente r von R gilt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Drazin, M. P.: *Engelrings and a result of Herstein and Kaplansky*, Amer. J. Math., Vol. 77, S. 895-913.

[2] Cohn, M.: *A non-nilpotent Lie-Ring satisfying the Engelcondition and a non-nilpotent Engelgroup,* Proceedings of the Cambridge philosophical society, Vol. 51, S. 401-405.

[3] Streb, W.: *Über schwach hyperzentral Ringe,* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLIV, S. 399-409.

Pervenuto in redazione l'1 settembre 1971.