RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Distributività rispetto all'unione e residuazione nei gruppoidi con ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 339-370

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__339_0>

DISTRIBUTIVITÀ RISPETTO ALL'UNIONE E RESIDUAZIONE NEI GRUPPOIDI CON ORDINE

DOMENICO BOCCIONI *)

In questo lavoro si considerano otto ben note condizioni, (C) e (C') (di completa distributività [della moltiplicazione rispetto all'unione]), (D) e (D') (di distributività), (I) e (I') (di isotonia [della moltiplicazione rispetto all'ordine]), (R) e (R') (v. nn. 1 e 7), relative ad un « gruppoide con ordine » G, cioè (n. 1) ad un insieme G munito di una moltiplicazione e di un ordine (parziale); ((C) e (C') si considerano in un G che sia un semireticolo completo, (D) e (D') in un G che sia un semireticolo).

Accanto a queste otto condizioni, se ne considerano altre dieci, (C_1), (C_2), (D_1), (D_2), (C_1'), (C_2'), (D_1'), (D_2'), (S), (S'), (v. nn. 1 e 7), le prime otto delle quali si potrebbero chiamare « condizioni di (completa) distributività debole » (della moltiplicazione rispetto all'unione). Le ultime due, (S) e (S') (che generalizzano le (R) e (R')), si possono pensare come condizioni imposte alle due operazioni parziali di residuazione (a destra e a sinistra) di G (v. nn. 6 e 7).

I risultati del presente lavoro sono, per la maggior parte (si vedano i nn. 3, 5, 8, 10), dei due tipi seguenti (le condizioni di cui si parla sono sempre alcune fra le diciotto sopra nominate): 1°) Se in G valgono queste condizioni, allora in G valgono queste altre; 2°) Esistono gruppoidi con ordine G in cui queste condizioni valgono e queste altre invece non valgono.

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Alcuni fra i risultati del 1° tipo generalizzano risultati analoghi già noti. Fra questi, il Teorema 1 (n. 8) è stato molto utile, nel corso di un'altra ricerca (v. [5]**)), per provare indirettamente la validità delle due condizioni (C) e (C') (n. 1) in un particolare G, in cui tale validità era rimasta dubbia.

Fra i risultati del 2° tipo, il Teorema 3 (n. 10) dimostra l'esistenza (e l'ampiezza) di alcune interessanti classi di gruppoidi con ordine, contenenti propriamente altre classi già studiate da vari Autori. In particolare, esistono molti gruppoidi con ordine « semiresiduati » (cioè soddisfacenti (S) e (S'): v. n. 7) che non sono residuati (cioè che non soddisfano (R) e (R'): n. 7); esistono molti gruppoidi con ordine « semiresiduati a destra » ma non a sinistra (cioè soddisfacenti la (S) ma non la (S')); tali gruppoidi con ordine possono inoltre indifferentemente soddisfare entrambe, soltanto una, o nessuna delle due condizioni (I) e (I') (i gruppoidi con ordine che soddisfano entrambe le (I) e (I') diconsi notoriamente gruppoidi ordinati [11]), quelli che soddisfano la (I) sono qui chiamati « gruppoidi ordinati a destra » [12])).

Sui gruppoidi con ordine semiresiduati (a destra) si spera di poter tornare presto in un successivo lavoro.

Fra i rimanenti risultati, il Teorema 2 (n. 9) dimostra che il prodotto (cartesiano) di due gruppoidi con ordine è semiresiduato (a destra) se, e soltanto se, sono semiresiduati (a destra) entrambi i fattori.

1. Chiameremo *gruppoide* (cfr. [13], p. 127, nota ([1])) ogni insieme non vuoto M il quale sia munito di una operazione [binaria] (= legge di composizione interna ovunque definita su M: [7], p. 1), che qui chiameremo *moltiplicazione* ([7], p. 2).

Chiameremo *insieme ordinato* ogni insieme non vuoto H il quale sia munito di un *ordine* (= relazione d'ordine [parziale] in H: [6], pp. 32-33; cfr. [14], p. 1) che denoteremo con $\leqslant$ ([6], p. 34).

Chiameremo *gruppoide con ordine* [1]) ogni insieme non vuoto G che

---

**) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine del lavoro.

[1]) Da non confondere con « gruppoide ordinato » (v. più avanti).

sia (contemporaneamente) munito di una moltiplicazione e di un ordine [2]); (dunque un tale G è un gruppoide ed è anche un insieme ordinato).

Se H è un insieme ordinato, diremo che H è un *semireticolo completo* (cfr. [13], pp. 33, 20) se in H esiste $\sup(x_i)$ ([8], p. 10) $\forall$ [3]) famiglia non vuota $(x_i)(i \in I)$ [4]) di elementi x_i di H. L'elemento $\sup(x_i)$ di H dicesi l'*unione* [5]) (dell'insieme) degli elementi x_i (della famiglia (x_i)).

Se un gruppoide con ordine G è [in quanto insieme ordinato] un semireticolo completo, dicendo che in G *la moltiplicazione è completamente distributiva a destra* (risp. *a sinistra*) *rispetto all'unione*, intenderemo dire che vale la seguente (C):

$$(C) \qquad (\sup(x_i))y = \sup(x_i y) \quad ^{6})$$

(risp. che vale la seguente (C'):

$$(C') \qquad y(\sup(x_i)) = \sup(y x_i) \quad ^{6}));$$

dicendo invece che in G *la moltiplicazione è completamente distributiva rispetto all'unione*, oppure dicendo che G è un *gruppoide semireticolato completo* (cfr. [13], p. 130), intenderemo dire che valgono entrambe le (C) e (C').

Se un gruppoide con ordine G è [in quanto insieme ordinato] un semireticolo [7]), dicendo che in G *la moltiplicazione è distributiva a destra* (risp. *a sinistra*) *rispetto all'unione*, intenderemo dire che vale la seguente (D):

$$(D) \qquad (\sup(x_1, x_2))y = \sup(x_1 y, x_2 y) \quad ^{8})$$

---

2) Si noti che nessuna condizione è imposta alla moltiplicazione o all'ordine di un tale G.

3) $\forall$ significa: per ogni.

4) L'insieme non vuoto I (degli indici i di (x_i)) è qualsiasi (finito o infinito).

5) Oppure il *supremum* (cfr. [2], p. 16).

6) $\forall$ famiglia non vuota (x_i) $(i \in I)$ di $x_i \in G$ e $\forall y \in G$.

7) *Semireticolo* $=$ insieme ordinato H in cui esiste $\sup(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in H$, (cfr. [13], p. 20).

8) $\forall x_1, x_2, y \in G$.

(risp. che vale la seguente (D'):

$$(D') \qquad y(\sup(x_1, x_2)) = \sup(yx_1, yx_2) \quad ^{8})) ;$$

dicendo invece che in G *la moltiplicazione è distributiva rispetto alla unione,* oppure dicendo che G è un *gruppoide semireticolato* (cfr. [13], p. 128, 1° capov.), intenderemo dire che valgono entrambe le (D) e (D').

Se G è un gruppoide con ordine, dicendo che in G *la moltiplicazione è isotona* [9]) *a destra* (risp. *a sinistra*) *rispetto all'ordine,* intenderemo dire che vale la seguente (I):

$$(I) \qquad a \leqslant b \text{ implica } ac \leqslant bc \quad ^{10})$$

(risp. che vale la seguente (I'):

$$(I') \qquad a \leqslant b \text{ implica } ca \leqslant cb \quad ^{10})) ;$$

dicendo invece che in G *la moltiplicazione è isotona rispetto all'ordine,* oppure dicendo che G è un *gruppoide ordinato* [11]) (cfr. [13], p. 128, 2° capov.), intenderemo dire che valgono entrambe le (I) e (I').

Se G è un gruppoide con ordine, per esprimere che vale la (I), diremo anche [12]) che G è un *gruppoide ordinato a destra* (oppure un *gruppoide d-ordinato*); per esprimere che vale la (I'), diremo anche che G è un *gruppoide ordinato a sinistra* (oppure un *gruppoide s-ordinato*).

Nel seguito considereremo anche le seguenti due « regole di completa distributività debole a destra » (C_1) e (C_2) (in un gruppoide con ordine G che sia un semireticolo completo):

$$(C_1) \qquad (\sup(x_i))y \geqslant \sup(x_i y) \quad ^{6}),$$

$$(C_2) \qquad (\sup(x_i))y \leqslant \sup(x_i y) \quad ^{6}),$$

---

9) Cfr. [13], p. 129 e [3], pp. 319, 2.

10) $\forall a, b, c \in G$.

11) Gruppoide ordinato = *p.o. grouppoid* secondo [14], p. 153 = *po-grouppoid* secondo [3], p. 319.

12) Cfr. [14], p. 10 (3° capov.), [10], [18] e [11].

e le seguenti due « regole di distributività debole a destra » (D_1) e (D_2) (in un gruppoide con ordine G che sia un semireticolo):

(D_1) $$(\sup (x_1, x_2))y \geqslant \sup (x_1y, x_2y)$$ [8]),

(D_2) $$(\sup (x_1, x_2))y \leqslant \sup (x_1y, x_2y)$$ [8]).

Invertendo l'ordine dei (due) fattori di ciascuno dei prodotti che figurano in queste quattro regole (C_1), (C_2), (D_1), (D_2), si ottengono poi le seguenti quattro analoghe regole « a sinistra »:

(C_1') $$y(\sup (x_i)) \geqslant \sup (yx_i)$$ [6]),

(C_2') $$y(\sup (x_i)) \leqslant \sup (yx_i)$$ [6]);

(D_1') $$y(\sup (x_1, x_2)) \geqslant \sup (yx_1, yx_2)$$ [8]),

(D_2') $$y(\sup (x_1, x_2)) \leqslant \sup (yx_1, yx_2)$$ [8]).

2. Se G è un gruppoide con ordine, chiameremo *opposto* (*moltiplicativo*) di G, e lo denoteremo con

$$G^0,$$

il gruppoide con ordine che ha gli stessi elementi e lo stesso ordine di G, e che ha invece come moltiplicazione la legge di composizione opposta alla moltiplicazione di G ([7], p. 3), cosicchè

(1) $$xy = yx \qquad \forall x, y \in G,$$

dove xy è il prodotto di x e di y in G ed yx è il prodotto di y e di x in G^0. È chiaro che

(2) $$(G^0)^0 = G.$$

Dalla (1) risulta evidentemente che (v. n. 1):

I. *Se in un gruppoide con ordine G vale la* (X) (*risp. la* (X')), *allora in G^0 vale la* (X') (risp. la (X), ($X = C, D, I, C_1, C_2, D_1, D_2$

[se $X=C$, C_1, C_2, si suppone che G sia un semireticolo completo; se $X=D$, D_1, D_2, si suppone che G sia un semireticolo]). // [13])

Se π è una proposizione sui gruppoidi con ordine, chiameremo *simmetrica* di π, e la denoteremo con π', la proposizione che si ottiene dalla π invertendo l'ordine dei due fattori di ciascuno dei prodotti (di due elementi di un gruppoide con ordine) che figurano nella π. È chiaro che $(\pi')'=\pi$. Ad esempio, le due condizioni (X) ed (X'), considerate nella I, sono simmetriche (l'una dell'altra), ($X=C$, D, ..., D_2).

La I è un caso particolare della seguente II (la quale è pure una evidente conseguenza della (1)):

II. *Se un gruppoide con ordine G soddisfa una condizione ω, allora il suo opposto G^0 soddisfa la condizione simmetrica ω'.* //

III. *Se un teorema τ sui gruppoidi con ordine è vero, allora è vero anche il teorema simmetrico τ'.*

Prova della III: Se vale l'ipotesi di τ', il quale considererà certi gruppoidi con ordine G_1, G_2, ..., allora (v. II) vale l'ipotesi di τ per gli opposti G_1^0, G_2^0, ..., per i quali (poichè τ è vero) vale quindi anche la tesi di τ; ma allora (v. II e (2)) vale appunto la tesi di τ' per G_1, G_2, ... //

3. Ci proponiamo adesso di mettere in luce alcune mutue relazioni esistenti fra le condizioni (C), (C'), ..., (D_2') (n. 1), e di illustrare ulteriormente la situazione con osservazioni ed esempi.

IV. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo. Allora valgono le seguenti* (3), (3') *e* (4) [14]):

(3) $\qquad (I)$ *equivale* (D_1),

(3') $\qquad (I')$ *equivale* (D_1'),

(4) $\qquad$ « (I) *e* (I') » *equivale* « (D_1) *e* (D_1') »,

---

[13]) Il segno // indica la fine (oppure la mancanza) di una dimostrazione.

[14]) Se A e B sono due asserzioni, A *equivale* B ($=A$ è equivalente a B) significa: A implica B e B implica A.

cioè [15]): G è un gruppoide d-ordinato (risp. s-ordinato, risp. ordinato) se, e solo se, G soddisfa la regola di distributività debole a destra (D_1) (risp. la regola di distributività debole a sinistra (D_1'), risp. le due regole di distributività debole (D_1) e (D_1')).

Prova della IV: Se vale la (I) e se $x_1, x_2, y \in G$, allora, poichè $\sup(x_1, x_2) \geqslant x_i$ $(i=1, 2)$, ne segue $(\sup(x_1, x_2))y \geqslant x_i y$ $(i=1, 2)$, donde appunto la (D_1). Viceversa, valga la (D_1) e sia $a \leqslant b$ $(a, b \in G)$, cioè sia $\sup(a, b)=b$; allora $(\forall c \in G): \sup(ac, bc) \leqslant (\sup(a, b))c = bc$, donde (poichè $ac \leqslant \sup(ac, bc)$) risulta appunto $ac \leqslant bc$. Dunque vale la (3), e perciò (v. III) vale pure la (3′); da queste segue evidentemente la (4). //

È ben noto che, se un gruppoide con ordine G è un semireticolo, allora le due regole di distributività (D) e (D') implicano (I) e (I') ([13], p. 129, Prop. 1; cfr. [3], p. 323 e [14], p. 191), mentre l'implicazione inversa non è vera in generale (ciò è provato dall'esempio a p. 129 di [13]). La precedente (4) generalizza dunque il primo di questi due noti risultati e migliora il secondo.

Analoga alla IV è la seguente V; (in [19] si osserva che, se un gruppoide ordinato G è un reticolo completo, allora G soddisfa le due regole (C_1) e (C_1')).

V. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo completo. Allora valgono le seguenti* (5), (5′) *e* (6):

(5) $\qquad$ (I) *equivale* (C_1),

(5′) $\qquad$ (I') *equivale* (C_1'),

(6) $\qquad$ « (I) *e* (I') » *equivale* « (C_1) *e* (C_1') ».

Prova della V: È sufficiente (v. III) provare la (5). Poichè (C_1) implica (D_1), allora appunto (C_1) implica (I) in virtù della IV. Viceversa, se vale la (I) e se $x_i, y \in G$ $(\forall i \in I$ non vuoto), allora, poichè $\sup(x_i) \geqslant x_i$ $\forall i \in I$, ne segue $(\sup(x_i))y \geqslant x_i y$ $\forall i \in I$, donde appunto la (C_1). //

---

15) Commenti analoghi a questo (relativi ad altre formule del tipo delle (3), (3′) e (4)) verranno nel seguito sottintesi (salvo eccezioni).

Evidenti (ed immediate) conseguenze delle IV e V sono risp. le due seguenti VI e VII.

VI. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo. Allora valgono le seguenti* (7), (7′) *e* (8):

(7) (D) *equivale* « (I) *e* (D_2) »,

(7′) (D') *equivale* « (I') *e* (D_2') »,

(8) « (D) *e* (D') » *equivale* « (I) *e* (I') *e* (D_2) *e* (D_2') ». //

VII. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo completo. Allora valgono le seguenti* (9), (9′) *e* (10):

(9) (C) *equivale* « (I) *e* (C_2') »,

(9′) (C') *equivale* « (I') *e* (C_2') »,

(10) « (C) *e* (C') » *equivale* « (I) *e* (I') *e* (C_2) *e* (C_2') ». //

È pure evidente che le VI e VII implicano risp. le seguenti VIII e IX.

VIII. *Un gruppoide d-ordinato* (*risp. s-ordinato, risp. ordinato*) *G sia un semireticolo. Allora*

(11) (D) *equivale* (D_2)

(*risp.*

(11′) (D') *equivale* (D_2'),

risp.

(12) « (D) *e* (D') » *equivale* « (D_2) *e* (D_2') »). //

IX. *Un gruppoide d-ordinato* (*risp. s-ordinato, risp. ordinato*) *G sia un semireticolo completo. Allora*

(13) (C) *equivale* (C_2)

(*risp.*

(13′) (C') *equivale* (C_2'),

risp.

(14) « (C) *e* (C') » *equivale* « (C_2) *e* (C_2') »). //

X. *Se un gruppoide con ordine G è* [in quanto insieme ordinato] *una catena* [16]) (e quindi è un semireticolo [17])), *allora in G valgono le due regole di distributività debole* (D_2) e (D_2').

Prova della X: È sufficiente (v. III) provare che in G vale la (D_2). Infatti ([8])) : $(\sup(x_1, x_2))y = (\max(x_1, x_2))y = x_1y$ oppure $= x_2y$, $\max(x_1y, x_2y) = \sup(x_1y, x_2y)$, donde appunto la (D_2). //

XI. *Un gruppoide con ordine G sia una catena* [17]). *Allora valgono le seguenti* (15), (15′) *e* (16):

(15) (D) *equivale* (I),

(15′) (D') *equivale* (I'),

(16) « (D) *e* (D') » *equivale* « (I) *e* (I') ».

Prova della XI: È un'immediata conseguenza delle VI e X. //

Osserveremo pure esplicitamente che la seguente XII è una evidente conseguenza della XI (oppure anche delle VIII e X).

XII. *Un gruppoide d-ordinato* (*risp. s-ordinato, risp. ordinato*) *G sia una catena* [17]). *Allora in G vale la regola* (D) (*risp. vale la regola* (D'), *risp. valgono le due regole* (D) *e* (D')). //

---

[16]) *Catena* = insieme totalmente ordinato ([6], p. 34), (cfr. [3], p. 2, e [13], p. 3).

[17]) Si ricordi che ogni catena H è un reticolo (= *lattice* secondo [3], p. 6 = *treillis* secondo [13], p. 24), con $\sup(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ ed $\inf(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in H$ ([6], p. 35 , 2° capov. e [3], p. 7, 1° capov.).

XIII. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo completo. Allora valgono le seguenti* (17) *e* (17′):

(17) (D_1) *equivale* (C_1),

(17′) (D_1') *equivale* (C_1').

Prova della XIII: Segue immediatamente dalle IV e V. //

4. Se H è un semireticolo [7]), è ben noto (v. ad es. [13], p. 21) che in H esiste $\sup(x_1, ..., x_n)$ ([8], p. 10) $\forall$ famiglia finita (e non vuota) $(x_1, ..., x_n)$ di elementi $x_1, ..., x_n \in H$ $(n \geqslant 1)$.

In un gruppoide con ordine G che sia un semireticolo, si possono perciò considerare le seguenti due « regole di distributività (a destra e a sinistra risp.) della moltiplicazione rispetto alle unioni finite »:

(F) $(\sup(x_1, ..., x_n))y = \sup(x_1 y, ..., x_n y)$ [18]),

(F′) $y(\sup(x_1, ..., x_n)) = \sup(y x_1, ..., y x_n)$ [18]),

ed è noto ([13], p. 130, Rem. 2) che valgono le due seguenti (18) e (18′) (v. n. 1):

(18) (D) *equivale* (F),

(18′) (D') *equivale* (F').

Qui consideriamo anche (cfr. n. 1) le seguenti quattro corrispondenti « regole di distributività debole » (in un gruppoide con ordine G che sia un semireticolo):

(F_1) $(\sup(x_1, ..., x_n))y \geqslant \sup(x_1 y, ..., x_n y)$ [18]),

(F_2) $(\sup(x_1, ..., x_n))y \leqslant \sup(x_1 y, ..., x_n y)$ [18]);

(F_1') $y(\sup(x_1, ..., x_n)) \geqslant \sup(y x_1, ..., y x_n)$ [18]),

(F_2') $y(\sup(x_1, ..., x_n)) \leqslant \sup(y x_1, ..., y x_n)$ [18]),

---

[18]) $\forall n$ intero ≥ 1 e $\forall x_1, ..., x_n, y \in G$

ed osserviamo anzitutto che le due regole (X) ed (X') $(X=F,\ F_1,\ F_2)$ sono simmetriche (l'una dell'altra, v. n. 2).

XIV. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo. Allora valgono le seguenti* (19) *e* (19′) (v. n. 1):

$$(19) \qquad (D_i) \text{ equivale } (F_i) \qquad (i=1,\ 2),$$

$$(19') \qquad (D_i') \text{ equivale } (F_i') \qquad (i=1,\ 2).$$

Prova della XIV: È sufficiente (v. III) provare le (19), e perciò basta evidentemente provare che (D_i) implica (F_i) $(i=1,\ 2)$. Infatti, se vale la (D_1), allora (v. (3)) vale la (I), dalla quale segue appunto (con lo stesso ragionamento fatto nella seconda parte della prova della V) la (F_1). Se invece vale la (D_2) (cioè se vale la (F_2) per $n=2$), la validità della (F_2) si dimostra facilmente per induzione su n. //

XV. *Un gruppoide con ordine G sia finito* [in quanto insieme] *e sia inoltre un semireticolo* (quindi G è un semireticolo completo). *Allora valgono le seguenti* (20), (20′), (21) *e* (21′) (v. n. 1):

$$(20) \qquad (D_2) \text{ equivale } (C_2),$$

$$(20') \qquad (D_2') \text{ equivale } (C_2'),$$

$$(21) \qquad (D) \text{ equivale } (C),$$

$$(21') \qquad (D') \text{ equivale } (C').$$

Prova della XV: Poichè la (21) è (in virtù della (17)) una evidente conseguenza della (20), è sufficiente (v. III) provare la (20), la quale segue infatti facilmente dalla 2ª delle (19) $(i=2)$. //

5. Esempio 1. G sia l'insieme dei numeri interi $\geqslant 0$ con la moltiplicazione e con l'ordine usuali. G è un gruppoide ordinato commutativo [cioè con la moltiplicazione commutativa] ed è una catena, ma non è un semireticolo completo.

Esempio 2. G sia il gruppoide ordinato che si ottiene da quello dell'Esempio 1 aggiungendovi un ulteriore elemento ∞ tale che risulti

$x \leqslant \infty \ \forall x \in G$ ed $x\infty = \infty x = \infty \ \forall x \in G$ (fermi restando la moltiplicazione e l'ordine preesistenti; cfr. [13], p. 133, 3° e 4° capov.). G è commutativo, è una catena ed è un semireticolo completo. Se (x_i) $(i \in I)$ è una famiglia (non vuota) di $x_i \in G$ con $x_i \neq \infty \ \forall i \in I$ e con $\sup(x_i) = \infty$, e se $y=0$, in G si ha

$$\infty = (\sup(x_i))y > \sup(x_i y) = 0; \tag{22}$$

quindi in G non vale la (C) e non vale la (C_2) (cfr. IX). Invece (poichè in G vale la (I)), in G vale la (C_1) (per la V) e vale la (D) (per la XI).

Il precedente Esempio 2 prova che la X non si estende alle unioni infinite (non vale la (C_2)); esso è interessante anche a proposito della XIII.

ESEMPIO 3. Il gruppoide con ordine G sia l'insieme (di quattro elementi) $\{a, b, c, d\}$ con l'ordine e con la moltiplicazione risp. così definiti [19]):

(23)

	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	d	d	d
c	c	d	d	d
d	b	d	d	d .

G è commutativo, è una catena ed è un semireticolo completo, ma non è un gruppoide ordinato (cioè non vale la (I)). Ne segue (v. IV e V) che in G non vale nè la (D_1) nè la (C_1) (e quindi nè la (D) nè la (C)). Invece in G vale la (D_2) (per la X) e vale la (C_2) (per la XV).

Si è visto (v. (9)) che le due condizioni (I) e (C_2) sono necessarie e sufficienti per la validità della (C) (in un gruppoide con ordine G che

[19]) Le interpretazioni del « diagramma » $(23)_1$ e della « tabella » $(23)_2$ sono quelle usuali (v. ad es. [3], p. 4 e [16], p. 17).

sia un semireticolo completo). I precedenti Esempi 2 e 3 provano che queste due condizioni (I) e (C_2) sono indipendenti, e provano pure (cfr. (5)) che (C_1) e (C_2) sono indipendenti.

Analogamente (v. (7)), le due condizioni (I) e (D_2) sono indipendenti (per un gruppoide con ordine G che sia un semireticolo): ciò è provato dall'Esempio 3 e dall'Exemple a p. 129 di [13] (in cui vale la (I) ma non vale la (D_2)); quindi (v. (3)) anche (D_1) e (D_2) sono indipendenti.

Esistono anche gruppoidi con ordine G che sono semireticoli completi (risp. semireticoli) ed in cui non vale nè la (C_1) nè la (C_2) (risp. nè la (D_1) nè la (D_2)): uno di questi è il G del successivo Esempio 4 (n. 8).

6. Le due importanti operazioni parziali [20]) di residuazione (a destra e a sinistra) tra elementi di un gruppoide ordinato, e diverse questioni con esse collegate, sono state oggetto di numerosi studi (anche molto recenti) da parte di vari Autori (v. ad es. [3], Chap. XIV; [13], Chap. II; [12]; [14], Chap. XII; [15], Kap. XII; e i lavori ivi citati).

Anche qui ci occuperemo adesso di queste due operazioni parziali, e precisamente in relazione alle regole (C), (C'), ..., (D_2') considerate nel n. 1. Cercheremo, ogni volta, di porre le questioni trattate nel loro ambiente naturale di massima possibile generalità; così considereremo (poichè ciò è evidentemente lecito) le due suddette operazioni parziali di residuazione tra elementi di un gruppoide con ordine (invece che tra elementi di un gruppoide ordinato, come è fatto in tutte le opere sopra citate).

Premettiamo la seguente definizione (24) (cfr. [14], p. 2). Se c è un elemento di un insieme ordinato G, denoteremo con $L(c)$ il sottoinsieme di G così definito [21]):

$$L(c)=\{x\in G;\ x\leqslant c\}. \tag{24}$$

---

[20]) Operazione parziale [binaria] = legge di composizione interna (v. [7], p. 1).

[21]) In generale, se $c(x)$ denota una condizione relativa all'elemento x di un insieme E, col simbolo $\{x\in E;\ c(x)\}$ denotiamo l'insieme di tutti gli elementi x di E soddisfacenti la condizione $c(x)$.

$L(c)$ è dunque l'insieme dei minoranti (= *lower bounds*) di c in G, (cfr. [6], p. 36 e [14], p. 2).

Siano a, b due elementi di un gruppoide con ordine G. La coppia [ordinata] (a, b) $(\in G \times G)$ determina due sottoinsiemi di G, che denoteremo con $[a : b]$ e con $[a :: b]$ (cfr. [15], p. 253 e [1]), risp. così definiti:

$$[a : b] = \{x \in G;\ xb \leqslant a\}, \tag{25}$$

$$[a :: b] = \{x \in G;\ bx \leqslant a\}. \tag{25'}$$

Se valgono le due seguenti (26) [22]):

$$[a : b] \neq \emptyset, \qquad \exists \max\, [a : b] \tag{26}$$

(risp. le due seguenti (26′):

$$[a :: b] \neq \emptyset, \qquad \exists \max\, [a :: b] \ ), \tag{26'}$$

allora chiameremo $\max\, [a : b]$ (risp. $\max\, [a :: b]$) il *residuale destro* [23]) (risp. *sinistro*) di a per b, e lo denoteremo con $a : b$ (risp. $a :: b$), cioè porremo [24])

$$a : b = \max\, [a : b] \tag{27}$$

(risp.

$$a :: b = \max\, [a :: b] \ ). \tag{27'}$$

Se G è commutativo [in quanto gruppoide], allora $[a : b] = [a :: b]$ $\forall a, b \in G$; quindi, se $a : b$ esiste [25]), si ha $a : b = a :: b$; questo elemento

---

22) $\emptyset$ denota l'insieme vuoto. $\exists$ significa: esiste. In generale, se A è un sottoinsieme non vuoto di un insieme ordinato G, col simbolo $\max A$ denotiamo il più grande elemento (= il massimo) di A [se questo massimo esiste] ([6], p. 35, 1° capov.).

23) Alcuni Autori preferiscono dire « sinistro » (v. ad es. [13], p. 152).

24) A parte le diverse ipotesi qui fatte su G, le due definizioni (27) e (27′) coincidono con quelle date in [2], p. 201.

25) Se a, b sono elementi di un gruppoide con ordine G, dicendo che $a : b$ (risp. $a :: b$) *esiste*, intendiamo naturalmente dire che valgono le due (26) (risp. le due (26′)).

(di G) verrà chiamato semplicemente il *residuale* di a per b (cfr. [13], p. 152).

È chiaro che, per ottenere la simmetrica π' (n. 2) di una proposizione π sui gruppoidi con ordine nella quale si parli degli insiemi (25), (25') o degli elementi (27), (27'), si dovranno sostituire

$$[a : b],\ [a :: b],\ a : b,\ a :: b$$

risp. con

$$[a :: b],\ [a : b],\ a :: b,\ a : b.$$

È pure chiaro che, se G è un gruppoide con ordine, si ha $[a : b] = [a :: b]$ $\forall a, b \in G$, dove uno (qualsiasi) dei due membri di questa eguaglianza si intende costruito in G e l'altro invece in G^0 (n. 2). Perciò $a : b$ (risp. $a :: b$) in G, se esiste, coincide con $a :: b$ (risp. $a : b$) in G^0.

La seguente XVI è una evidente conseguenza delle precedenti definizioni.

XVI. *Siano a, b due elementi di un gruppoide con ordine G. Allora valgono le seguenti* (28) *e* (28') ($c \in G$):

(28) $$c = a : b \text{ equivale } c \in [a : b] \subseteq L(c),$$

(28') $$c = a :: b \text{ equivale } c \in [a :: b] \subseteq L(c). \ //$$

XVII. *Siano a, b due elementi di un gruppoide d-ordinato* (*risp. s-ordinato*) *G. Allora* ($c \in G$):

(29) $$c = a : b \text{ equivale } [a : b] = L(c)$$

(*risp.*

(29') $$c = a :: b \text{ equivale } [a :: b] = L(c) \ ).$$

Quindi $a : b$ (*risp. $a :: b$*), *se esiste, è l'unico elemento di G soddisfacente la seguente* (30):

(30) $$xb \leqslant a \text{ equivale } x \leqslant a : b$$ [26])

---

[26]) $\forall x \in G$.

(*risp. la seguente* (30′):

(30′) $$bx \leqslant a \text{ equivale } x \leqslant a :: b$$ [26])).

Prova della XVII: Basta evidentemente provare le (29) e (29′), e a tal fine è sufficiente (v. III) provare la sola (29). Infatti, che $[a : b] = L(c)$ implichi $c = a : b$, risulta dalla (28). Viceversa, se $c = a : b$, si ha intanto $[a : b] \subseteq L(c)$ e $cb \leqslant a$ (per la (28)); inoltre ($x \in G$), da $x \leqslant c$ segue (per l'ipotesi (I)) : $xb \leqslant cb$, da cui (poichè $cb \leqslant a$) : $xb \leqslant a$, quindi $L(c) \subseteq [a : b]$. //

Si osservi che, nella (28), il segno $\subseteq$ non può essere sostituito dal segno $=$ (cfr. (29)). Ossia può accadere che $a : b$ esista in un gruppoide con ordine G non soddisfacente la (I) (per certi a, $b \in G$) e che si abbia ([16], p. 2):

$$[a : b] \subset L(a : b).$$

Ciò infatti accade nel G dell'Esempio 3, in cui si ha $[a : a] = \{a, c\}$, quindi $a : a = a$, $L(a : a) = \{a, c, d\}$. Nei riguardi della (28′), vale l'osservazione simmetrica (n. 2).

In virtù della XVII, la definizione di $a : b$ (risp. $a :: b$) qui accettata è equivalente a quella data a p. 189 di [14] in un gruppoide d-ordinato (risp. s-ordinato); non lo è invece necessariamente (in virtù della precedente osservazione) in un gruppoide con ordine.

7. Poichè le tre classi di gruppoidi con ordine (soddisfacenti la (S), oppure la (S'), oppure le (S) e (S')) che ora prendiamo in considerazione ricorreranno continuamente nel seguito, introduciamo (per comodità espositiva) le seguenti tre corrispondenti definizioni (v. n. 6).

Se G è un gruppoide con ordine, dicendo che G è *semiresiduato* [27])

---

[27]) Da non confondere con « quasiresiduato ». Notoriamente (v. ad es. [15], p. 253, e [1]), un gruppoide ordinato G dicesi *quasiresiduato a destra* (risp. *a sinistra*) *se* $[a : b]$ (risp. $[a :: b]$) $\neq \emptyset$ $\forall a, b \in G$; G dicesi invece *quasiresiduato* se è quasiresiduato a destra e a sinistra. Intenderemo valide queste tre definizioni anche se G è un gruppoide con ordine.

a destra (risp. *a sinistra*), intenderemo dire che vale la seguente (S):

$$(S) \qquad [a : b] \neq \emptyset \text{ implica } \exists a : b \quad {}^{28})$$

(risp. la seguente (S'):

$$(S') \qquad [a :: b] \neq \emptyset \text{ implica } \exists a :: b \quad {}^{28}));$$

dicendo invece che G è *semiresiduato*, intenderemo dire che valgono entrambe le (S) e (S').

Estendiamo inoltre dai gruppoidi ordinati ai gruppoidi con ordine le tre seguenti, ben note, definizioni (cfr. [2], p. 201; [13], p. 152; [4]).

Se G è un gruppoide con ordine, dicendo che G è *residuato a destra*[23]) (risp. *a sinistra*), intenderemo dire che vale la seguente (R)[25]):

$$(R) \qquad \exists a : b \qquad \forall a, b \in G$$

(risp. la seguente (R'):

$$(R') \qquad \exists a :: b \qquad \forall a, b \in G);$$

dicendo invece che G è *residuato*, intenderemo dire che valgono entrambe le (R) e (R')[29]).

È chiaro (v. n. 6)) che, se un gruppoide con ordine G è commutativo, allora la condizione (S) coincide con la (S'), e la (R) coincide con la (R').

Si osservi che le due condizioni (X) ed (X') $(X=S, R)$ sono simmetriche (l'una dell'altra, v. n. 2). Ne segue (per la II):

XVIII. *Se in un gruppoide con ordine G vale la (X) (risp. la (X')), allora nel suo opposto G^0 vale la (X') (risp. la (X)), $(X=S, R)$.* //

---

[28]) $\forall a, b \in G$.

[29]) È chiaro che: *Un gruppoide con ordine G è residuato a destra* (risp. a sinistra) *se, e solo se, G è contemporaneamente quasiresiduato a destra* (risp. a sinistra).

XIX. *Se un gruppoide con ordine G è semiresiduato a destra (risp. a sinistra), allora*

(31) $xb \leqslant a$ *implica* « $\exists a : b$ *e* $x \leqslant a : b$ » [30])

(*risp.*

(31′) $bx \leqslant a$ *implica* « $\exists a :: b$ *e* $x \leqslant a :: b$ » [30])).

Quindi

(32) $\exists (xb) : b \qquad \forall b,\ x \in G$

(*risp.*

(32′) $\exists (bx) :: b \qquad \forall b,\ x \in G$).

Prova della XIX: È sufficiente (v. III) provare le (31) e (32). Se a, b, $x (\in G)$ son tali che $xb \leqslant a$, allora $x \in [a : b]$, quindi $[a : b] \neq \emptyset$, donde appunto (per l'ipotesi (S)) l'esistenza di $a : b (= \max [a : b])$ e perciò appunto $x \leqslant a : b$. Dalla (31) segue poi subito (assumendovi $a = xb$) la (32). //

XX. *Se un gruppoide d-ordinato (risp. s-ordinato) G è semiresiduato a destra (risp. a sinistra), allora*

(33) $xb \leqslant a$ *equivale* « $\exists a : b$ *e* $x \leqslant a : b$ » [30])

(*risp.*

(33′) $bx \leqslant a$ *equivale* « $\exists a :: b$ *e* $x \leqslant a :: b$ » [30])).

Prova della XX: Segue immediatamente dalla XIX e dalla XVII (v. (30) e (30′)). //

XXI. *Un gruppoide con ordine G sia finito e sia una catena. Allora G è semiresiduato.*

---

[30]) $\forall a,\ b,\ x \in G$.

Prova della XXI: Basta ricordare che ogni sottinsieme finito e non vuoto di una catena possiede un massimo. //

Se G è un gruppoide con ordine, valgono[29]) le seguenti (34) e (34′):

(34) (R) implica (S),

(34′) (R') implica (S'),

mentre non valgono (in generale) le due implicazioni inverse.

Esistono infatti (come vedremo nel n. 10) molti gruppoidi con ordine G soddisfacenti la (S) (risp. (S')) ma non la (R) (risp. (R')). Uno di questi è il G (commutativo) dell'Esempio 3, che è appunto semiresiduato (per la XXI) ma non residuato (poichè $[d : a] = \emptyset$).

Perciò la condizione (S) (risp. (S')) è una naturale generalizzazione della (R) (risp. (R')).

Il gruppoide con ordine G (commutativo) dell'Esempio 2 non è semiresiduato (poichè $[1 : 0]$, che coincide con $G - \{\infty\}$ e quindi non è vuoto, non possiede massimo).

8. Fra le condizioni (S), (S') (n. 7) e le condizioni considerate nel n. 1 esistono, come ora vedremo, alcune interessanti relazioni.

XXII. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo completo. Allora valgono le seguenti* (35) *e* (35′):

(35) (C_2) *implica* (S),

(35′) (C_2') *implica* (S').

Prova della XXII: È sufficiente (v. III) provare la (35). Infatti, se vale la (C_2) e se a, b sono due elementi di G tali che $[a : b] \neq \emptyset$, allora, posto $I = [a : b]$ ed $x_i = i$ $\forall i \in I$ (cosicchè (x_i) $(i \in I)$ è una famiglia non

---

31) [3], p. 6.

vuota di elementi x_i di G tale che $\sup(x_i) = \sup[a:b]$ [31])), si ha

$$\sup(x_i) \in [a:b], \tag{36}$$

e quindi appunto esiste $a:b$ $(= \max[a:b])$. Invero $(\sup(x_i))b \leqslant \leqslant \sup(x_i b)$ (per la (C_2)), $\sup(x_i b) \leqslant a$ (poichè $x_i \in [a:b]$ $\forall i \in I$), donde appunto la (36). //

Poiché esistono gruppoidi con ordine G che sono semireticoli completi e che soddisfano « (C_2) e (C_2') » ma non (C) nè (C') (uno di questi è il G dell'Esempio 3), la XXII è una generalizzazione del Théorème 4 a p. 158 di [13] [32]), il quale a sua volta generalizza (dai reticoli completi ai semireticoli completi) il Theorem 5 a p. 327 di [3] [33]).

Non valgono, in generale, le implicazioni inverse della (35) e della (35'): Se un gruppoide con ordine G è un semireticolo completo, allora (in generale):

$$(S) \text{ non implica } (C_2), \tag{37}$$

$$(S') \text{ non implica } (C_2'), \tag{37'}$$

anzi:

$$(R) \text{ non implica } (D_2), \tag{38}$$

$$(R') \text{ non implica } (D_2'). \tag{38'}$$

La validità delle (38), (38') (e quindi delle (37), (37'), che ne sono una evidente conseguenza) è provata infatti risp. dall'esistenza del G del seguente Esempio 4 e del suo opposto G^0 (v.(2), I, XVIII).

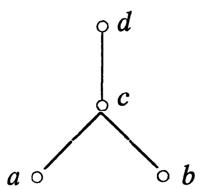
ESEMPIO 4. Il gruppoide con ordine G sia l'insieme (di quattro elementi) $\{a, b, c, d\}$ con l'ordine e con la moltiplicazione risp. così

---

[32]) Questo Théorème 4 (che è una evidente conseguenza della XXII: cfr. (10)) afferma che: Se un gruppoide con ordine G è un semireticolo completo e soddisfa « (C) e (C') », allora G soddisfa « (S) e (S') ».

[33]) La 2ª parte di questo Theorem 5 coincide (v (10) e l'ult. capov. del n. 6) col risultato (e) a p. 192 di [14].

definiti:



	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	a	b
c	c	c	b	c
d	d	d	a	d .

G è un semireticolo completo ed è residuato a destra (cioè vale la (R), come facilmente si verifica). Poichè [34]):

$$(\sup (a,\ b))c \parallel \sup (ac,\ bc) \tag{39}$$

(invero, i due membri della (39) sono risp. b ed a), in G non vale la (D_2) nè la (D_1), e quindi non vale la (C_2) nè la (C_1). Ne segue (v. (3) oppure (5)) che in G non vale la (I).

XXIII. *Se un gruppoide ordinato a destra (risp. a sinistra) G è semiresiduato a destra (risp. a sinistra) e se in G esiste* $\sup (x_i)$ *per una certa famiglia non vuota $(x_i)(i \in I)$ di $x_i \in G$, allora in G esiste pure* $\sup (x_i y)$ (*risp.* $\sup (y x_i)$) $\forall y \in G$ *e si ha*

$$(\sup (x_i))y = \sup (x_i y) \tag{40}$$

(*risp.*

$$y(\sup (x_i)) = \sup (y x_i) \tag{40'}$$).

Prova della XXIII: È sufficiente (v. III) provare la 1ª parte (« a destra »). Infatti $(\forall y \in G)$, $x_i \leqslant \sup (x_i)$ $\forall i \in I$ implica intanto (per l'ipotesi (I)): $x_i y \leqslant (\sup (x_i))y$ $\forall i \in I$. Inoltre, se un $a \in G$ è tale che $x_i y \leqslant a$

[34]) Se x, y sono due elementi di un insieme ordinato, $x \parallel y$ significa che x ed y sono inconfrontabili ($=$ *incomparable* secondo [3], p. 2), cioè che non è $x \leq y$ nè $x \geq y$, (cfr. [14], p. 1).

$\forall i \in I$, ne segue (per la (33), poichè $I \neq \emptyset$) che esiste $a : y$ e che $x_i \leqslant a : y$ $\forall i \in I$, donde $\sup(x_i) \leqslant a : y$, da cui (per la (33)): $(\sup(x_i))y \leqslant a$. Quindi appunto $\sup(x_i y)$ esiste e vale la (40). //

Poichè (come vedremo nel n. 10) esistono gruppoidi con ordine G che soddisfano « (I) e (S) » ma non (I') nè (R), la 1ª parte della XXIII è una generalizzazione (dai gruppoidi ordinati residuati a destra ai gruppoidi d-ordinati semiresiduati a destra) del Lemma A a p. 190 di [14] (o a p. 252 di [15]), (si ricordi l'ult. capov. del n. 6).

TEOREMA 1. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo completo. Allora valgono le seguenti* (41), (41′) *e* (42):

(41) (C) *equivale* « (I) *e* (S) »,

(41′) (C') *equivale* « (I') *e* (S') »,

(42) « (C) *e* (C') » *equivale* « (I) *e* (I') *e* (S) *e* (S') »;

dunque, in particolare (v. (42)): Affinchè in G la moltiplicazione sia completamente distributiva rispetto all'unione, è necessario e sufficiente che G sia un gruppoide ordinato semiresiduato.

Prova del Teorema 1: È un'immediata conseguenza delle VII, XXII e XXIII. //

Qualche osservazione sulla (42): La necessità delle quattro condizioni (I), (I'), (S), (S') per la validità di « (C) e (C') » (cioè la 1ª parte della (42)) è già nota (v. il 4° capov. del n. 3 e la [32])). La sufficienza di tali condizioni (cioè la 2ª parte della (42)) è invece un risultato nuovo. Questo risultato è stato molto utile, nel corso di un'altra ricerca (v. [5]), per provare indirettamente la validità di « (C) *e* (C') » in un particolare G (semiresiduato ma non residuato) in cui la verifica diretta di « (C) e (C') » presentava forti difficoltà. La 2ª parte della (42) generalizza (dai gruppoidi ordinati residuati a quelli semiresiduati) la 2ª parte della (d) a p. 191 di [14] (=(e) a p. 256 di [15]; cfr. pure [19]), (si ricordi l'ult. capov. del n. 6).

Un'evidente conseguenza del Teorema 1 è il seguente Corollario 1.

COROLLARIO 1. *Un gruppoide d-ordinato (risp. s-ordinato, risp. ordinato) G sia un semireticolo completo. Allora*

(43) (C) *equivale* (S)

(risp.

(43′) (C') *equivale* (S'),

risp.

(44) « (C) *e* (C') » *equivale* « (S) *e* (S') »);

dunque, in particolare (v. (44)): In un gruppoide ordinato G che sia un semireticolato completo, la moltiplicazione è completamente distributiva rispetto all'unione se, e soltanto se, G è semiresiduato. //

XXIV. *Un gruppoide con ordine G sia un semireticolo. Allora valgono le seguenti* (45), (45′) *e* (46):

(45) « (I) *e* (S) » *implica* (D),

(45′) « (I') *e* (S') » *implica* (D'),

(46) « (I) *e* (I') *e* (S) *e* (S') » *implica* « (D) *e* (D') ».

Prova della XXIV: È un'immediata conseguenza della XXIII. //

A differenza del Teorema 1, nessuna delle tre implicazioni (45), (45′) (46) è (in generale) invertibile: ciò è provato dall'Esempio 2, nel cui G (commutativo) vale appunto la (D) ma non la (S) (v. n. 7, penult. capov.). La (46) generalizza (dai gruppoidi ordinati residuati a quelli semiresiduati) la 1ª parte della (d) a p. 191 di [14].

9. Chiameremo *prodotto* (*cartesiano*) di due gruppoidi con ordine G_1 e G_2, e lo denoteremo con

$$G_1 \times G_2 ,$$

[35]) Che sia tale, è evidente (cfr. [13], p. 15, 1° capov.).

il gruppoide con ordine così definito: $G_1 \times G_2$ è l'insieme prodotto dei due insiemi G_1 e G_2 ([6], p. 14) munito della moltiplicazione e dell'ordine [35]) risp. così definiti ($\forall a_i$, $b_i \in G_i$; $i=1, 2$) [36]):

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2)=(a_1b_1, a_2b_2), \tag{47}$$

$$(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2) \text{ sse } a_1 \leqslant b_1 \text{ e } a_2 \leqslant b_2, \tag{48}$$

(cfr. [8], p. 8, ult. capov.).

È chiaro che (v. n. 2):

$$(G_1 \times G_2)^0 = G_1^0 \times G_2^0. \tag{49}$$

È pure chiaro che la precedente definizione di $G_1 \times G_2$ coincide con la sua simmetrica (n. 2).

Se, nel 1° capoverso di questo n. 9, si pensano G_1, G_2 e $G_1 \times G_2$ soltanto come insiemi ordinati, allora l'insieme ordinato $G_1 \times G_2$ è (secondo [9], p. 8) il *prodotto* (*cartesiano*) dei due insiemi ordinati G_1 e G_2 [37]).

Ricordiamo che (cfr. [13], p. 53, Prop. 7): Il prodotto $G_1 \times G_2$ di due insiemi ordinati G_1 e G_2 è un semireticolo completo se, e solo se, G_1 e G_2 sono entrambi semireticoli completi.

Ricordiamo pure che (come facilmente si verifica): Se G_1 e G_2 sono due insiemi ordinati contenenti, ciascuno, più di un elemento, allora il loro prodotto $G_1 \times G_2$ non è una catena.

Senza difficoltà si dimostra che valgono le due seguenti proposizioni XXV e XXVI.

XXV. *Il prodotto $G_1 \times G_2$ di due gruppoidi con ordine G_1 e G_2 è un gruppoide d-ordinato (risp. s-ordinato, risp. ordinato) se, e solo se, G_1 e G_2 sono entrambi gruppoidi d-ordinati (risp. s-ordinati, risp. ordinati).* //

---

36) *sse* = se e solo se.

37) L'insieme ordinato $G_1 \times G_2$ dicesi anche il *prodotto cardinale* dei due insiemi ordinati G_1 e G_2 (cfr. [3], p. 8; [13], p. 15).

XXVI. *Siano G_1 e G_2 due gruppoidi con ordine, e siano (a_1, a_2) e (b_1, b_2) due qualsiasi elementi del loro prodotto $G_1 \times G_2$. Allora il residuale destro*

$$(a_1, a_2) : (b_1, b_2)$$

(risp. il residuale sinistro

$$(a_1, a_2) :: (b_1, b_2) \quad)$$

esiste se, e solo se, esistono entrambi i residuali destri

$$a_1 : b_1, \qquad a_2 : b_2$$

(risp. i residuali sinistri

$$a_1 :: b_1, \qquad a_2 :: b_2 \quad)$$

e, nel caso di esistenza, si ha

$$(a_1, a_2) : (b_1, b_2) = (a_1 : b_1, a_2 : b_2) \tag{50}$$

(risp.

$$(a_1, a_2) :: (b_1, b_2) = (a_1 :: b_1, a_2 :: b_2) \quad). \quad // \tag{50'}$$

XXVII. *Il prodotto $G_1 \times G_2$ di due gruppoidi con ordine G_1 e G_2 è residuato a destra (risp. residuato a sinistra, risp. residuato) se, e solo se, G_1 e G_2 sono entrambi residuati a destra (risp. residuati a sinistra, risp. residuati).*

Prova della XXVII: È una evidente conseguenza della XXVI. //

TEOREMA 2. *Il prodotto $G_1 \times G_2$ di due gruppoidi con ordine G_1 e G_2 è semiresiduato a destra (risp. semiresiduato a sinistra, risp. semiresiduato) se, e solo se, G_1 e G_2 sono entrambi semiresiduati a destra (risp. semiresiduati a sinistra, risp. semiresiduati).*

Prova del Teorema 2: È sufficiente (si veda la III ricordando il 2° capov. di questo n. 9) provare la 1ª parte (« a destra »). Supponiamo che $G_1 \times G_2$ sia semiresiduato a destra. Allora (per la (32)) esistono

$(c_1, c_2), (d_1, d_2) \in G_1 \times G_2$ tali che

$$\exists (c_1, c_2) : (d_1, d_2)$$

e perciò (per la XXVI) esistono $c_1, d_1 \in G_1$ e $c_2, d_2 \in G_2$ tali risp. che

$$\exists c_1 : d_1, \qquad \exists c_2 : d_2,$$

quindi [25]) tali risp. che

(51) $$[c_1 : d_1] \neq \emptyset, \qquad [c_2 : d_2] \neq \emptyset.$$

Ebbene, se (per certi $a_1, b_1 \in G_1$):

(52) $$[a_1 : b_1] \neq \emptyset,$$

dalle (52) e $(51)_2$ segue evidentemente (v. (47) e (48)) che

$$[(a_1, c_2) : (b_1, d_2)] \neq \emptyset,$$

quindi (poichè $G_1 \times G_2$ è semiresiduato a destra):

$$\exists (a_1, c_2) : (b_1, d_2)$$

e perciò (per la XXVI):

(53) $$\exists a_1 : b_1,$$

dunque (52) implica (53), ossia G_1 è appunto semiresiduato a destra; se invece (per certi $a_2, b_2 \in G_2$) : $[a_2 : b_2] \neq \emptyset$, ne risulta analogamente (sfruttando adesso la $(51)_1$) che $\exists a_2 : b_2$, dunque G_2 è appunto semiresiduato a destra. Viceversa, supponiamo ora che G_1 e G_2 siano entrambi semiresiduati a destra, e che (per certi $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$) sia

(54) $$[(a_1, a_2) : (b_1, b_2)] \neq \emptyset.$$

Dalla (54) segue allora (v. (47) e (48)):

$$[a_1 : b_1] \neq \emptyset, \qquad [a_2 : b_2] \neq \emptyset$$

e da queste (per l'ipotesi iniziale) segue risp. che

$$\exists a_1 : b_1 , \qquad \exists a_2 : b_2 ,$$

dalle quali (per la XXVI) risulta che

$$\exists (a_1 , a_2) : (b_1 , b_2).$$

Dunque $G_1 \times G_2$ è appunto semiresiduato a destra. //

10. Esempio 5. Sia G un insieme qualsiasi, contenente più di un elemento. Sia $\leqslant$ una relazione d'ordine in G tale che ogni sottinsieme non vuoto di G abbia un massimo [38]). Pensiamo G come gruppoide con ordine rispetto a questa relazione $\leqslant$ (quindi G è una catena) e rispetto alla moltiplicazione (associativa e non commutativa) così definita:

$$(55) \qquad xy=y \qquad \forall x, y \in G.$$

È chiaro che G è un semireticolo completo, e che in G valgono le quattro regole (v. nn. 1 e 7):

$$(56) \qquad (I'), (S'), (S), (I).$$

G non è residuato, poichè in G vale la (R') $(a :: b=a \ \forall a, b \in G)$ ma non la (R) $(\exists a : b$ sse $b \leqslant a)$; (cfr. [13], p. 158, 5° capov.).

Dicendo che un gruppoide con ordine G è di *tipo*

$$(57) \qquad (i', s', s, i),$$

dove ciascuno degli elementi i', s', s, i di questa quaterna [ordinata] è uguale al numero 0 oppure al numero 1, intendiamo dire che: in G

---

38) Una tale relazione $\leq$ esiste certo (in virtù del teorema di Zermelo: [9], p. 44), poichè essa è l'opposta ([9], p. 1, cfr. [3], p. 3) di una relazione di buon ordine ([9], p. 37).

vale la (I') (risp. (S'), risp. (S), risp. (I)) se e solo se $i'=1$ (risp. $s'=1$, risp. $s=1$, risp. $i=1$).

Così il G dell'Esempio 5 è di tipo (1, 1, 1, 1). Invece, come si è già osservato (v. nn. 5 e 7), i due G degli Esempi 2 e 3 sono risp. di tipo (1, 0, 0, 1) e (0, 1, 1, 0).

XXVIII. *Se un gruppoide con ordine G è di tipo (i', s', s, i), allora il suo opposto G^0* (n.2) *è di tipo (i, s, s', i').*

Prova della XXVIII: Segue facilmente dalle I e XVIII (si ricordi la (2)). //

XXIX. *Se due gruppoidi con ordine G_1* e *G_2 sono risp. di tipo (i'_1, s'_1, s_1, i_1) e (i'_2, s'_2, s_2, i_2), allora il loro prodotto $G_1 \times G_2$* è *di tipo*[39])

$$(i'_1 i'_2 , s'_1 s'_2 , s_1 s_2 , i_1 i_2). \tag{58}$$

Prova della XXIX: È una evidente conseguenza della XXV e del Teorema 2. //

Consideriamo adesso un insieme di tre elementi $\{a, b, c\}$, e le dieci moltiplicazioni in esso definite dalle seguenti tabelle 6, 7, ..., 15:

6	a	b	c
a	b	b	a
b	c	c	a
c	c	c	b

7	a	b	c
a	a	a	b
b	a	a	b
c	c	a	b

8	a	b	c
a	b	a	a
b	a	a	a
c	b	b	b

9	a	b	c
a	a	a	b
b	b	c	c
c	c	c	c

10	a	b	c
a	a	a	c
b	c	c	c
c	b	b	c

11	a	b	c
a	a	a	c
b	a	a	c
c	a	c	c

[39]) I quattro elementi della quaterna (58) sono ordinari prodotti di numeri interi.

12	a	b	c
a	a	c	a
b	c	c	c
c	b	c	b

13	a	b	c
a	a	b	a
b	b	c	c
c	c	c	c

14	a	b	c
a	a	a	c
b	b	c	c
c	c	c	c

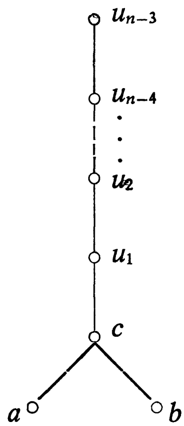
15	a	b	c
a	a	c	c
b	b	c	c
c	c	c	c

ESEMPIO r ($r=6, 7, ..., 15$). Il gruppoide con ordine G sia l'insieme finito

(59) $$\{a, b, c, u_1, u_2, ..., u_{n-3}\}$$

di n elementi (n qualsiasi $\geqslant 3$)[40]) con l'ordine definito dal seguente diagramma:

(60)



e con la moltiplicazione definita congiuntamente dalla precedente ta-

[40]) Se $n = 3$, l'insieme (59) è l'insieme $\{a, b, c\}$.

bella r e (se $n>3$) dalle seguenti (61):

$$u_i x = x u_i = u_{n-3} \quad \forall x \in G \qquad (i=1, 2, \ldots, n-3); \tag{61}$$

($r=6, 7, \ldots, 15$). G, secondo che $r=6, 7, \ldots, 15$, è (come facilmente si verifica) risp. di tipo (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1). Inoltre, qualunque sia r, G non è residuato a destra nè a sinistra, ed è un semireticolo completo.

ESEMPIO s ($s=16, 17, \ldots, 21$). G, secondo che $s=16, 17, \ldots, 21$, sia risp. l'opposto (n. 2) del gruppoide con ordine dell'Esempio 7, 8, 9, 10, 13, 14. G, secondo che $s=16, 17, \ldots, 21$, è quindi (v. XXVIII) risp. di tipo (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1). Inoltre, qualunque sia s, G non è residuato a destra nè a sinistra (v. (2) e XVIII), ed è un semireticolo completo (avente il diagramma (60)).

Gli Esempi r ed s provano che esistono gruppoidi con ordine di ogni tipo.

TEOREMA 3. *Denotiamo con* $\mathfrak{C}$ *l'insieme costituito dalle quattro condizioni* (56):

$$\mathfrak{C} = \{(I'), (S'), (S), (I)\}.$$

Se E è un insieme qualsiasi contenente almeno tre elementi (distinti), *e se* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *sono due sottoinsiemi qualsiasi di* $\mathfrak{C}$ *tali che valgano le due seguenti* (62):

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset, \tag{62}$$

esiste sempre un gruppoide con ordine G avente le seguenti cinque proprietà: 1) *G è equipotente ad E*[41]), 2) *G è un semireticolo completo,* 3) *G soddisfa tutte le condizioni appartenenti ad* $\mathfrak{A}$, 4) *G non soddisfa alcuna delle condizioni appartenenti a* $\mathfrak{B}$, 5) *G non è residuato a destra nè a sinistra.*

---

[41]) Dicendo che un insieme A è *equipotente* ad un insieme B, intendiamo dire che esiste una biiezione di A su B (cfr. [9], p. 54).

Prova del Teorema 3: Se E è finito, il Teor. 3 è provato dai precedenti Esempi r ed s. Supponiamo perciò che E sia infinito. Per un gruppoide con ordine, avere le due proprietà 3) e 4) equivale ad essere di un certo tipo (i', s', s, i), univocamente determinato da $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. Sia G il prodotto (n. 9) del gruppoide con ordine dell'Esempio 5 (di tipo $(1, 1, 1, 1)$), supposto equipotente ad E, e del gruppoide con ordine (finito) dell'Esempio $q(6 \leqslant q \leqslant 21)$, di tipo (i', s', s, i). Poichè il prodotto $A \times B$ di un insieme infinito A per un insieme finito e non vuoto B è equipotente ad A (v. ad es. [17], p. 153, Cor. 1), G ha appunto la proprietà 1). Inoltre G ha appunto la proprietà 2) (per l'osservazione fatta nel 4° capoverso del n. 9), le proprietà 3) e 4) (per la XXIX), e la proprietà 5) (per la XXVII). //

Si è visto (n. 8, Teorema 1) che le quattro condizioni (56) sono necessarie e sufficienti per la completa distributività della moltiplicazione rispetto all'unione (in un gruppoide con ordine G che sia un semireticolo completo). Il Teorema 3 prova, in particolare, che queste quattro condizioni (56) sono del tutto indipendenti fra loro.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIGARD, A.: *Sur quelques équivalences remarquables dans un groupoïde quasi-résidué,* Ann. Mat. pura appl. (4), vol. 68, pp. 1-20 (1965).

[2] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory,* Second Edition, Amer. Math. Soc. (1948).

[3] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory,* Third Edition, Amer. Math. Soc. (1967).

[4] BLYTH, T. S.: *The general form of residuated algebraic structures,* Bull. Soc. Math. France, vol. 93, pp. 109-127 (1965).

[5] BOCCIONI, D.: *Omomorfismi multivalenti di gruppi e di anelli* (di prossima pubblicazione).

[6] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles, Fascicule de résultats,* Hermann (1951).

[7] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap. I,* Hermann (1951).

[8] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap. VI-VII,* Hermann (1952).

[9] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles, Chap. III,* Hermann (1956).

[10] CONRAD, P. F.: *Right-ordered groups,* Michigan Math. J., vol. 6, pp. 267-275 (1959).

[11] Conrad, P. F.: *Introduction à la théorie des groupes réticulés*, Secrétariat math. (1967).

[12] Dubreil, P.: *Introduction à la théorie des demi-groupes ordonnés*, Convegno italo-francese di algebra astratta (Padova, 1956), pp. 1-33, Cremonese (1957).

[13] Dubreil-Jacotin, M. L.; Lesieur, L.; Croisot, R.: *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars (1953).

[14] Fuchs, L.: *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press (1963).

[15] Fuchs, L.: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, Vandenhoeck & Ruprecht (1966).

[16] Jacobson, N.: *Lectures in abstract algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).

[17] Lang, S.: *Algebraic structures*, Addison-Wesley (1967).

[18] Smirnov, D. M.: *Gruppi ordinati a destra* [in russo], Algebra i Logika Sem., vol. 5, pp. 41-59 (1966).

[19] Steinfeld, O.: *Über Gruppoid-Verbände. I*, Acta Scientiarum Math. (Szeged), vol. 31, pp. 204-221 (1970).

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 luglio 1971.