RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO PARODI

Simmetrizzazioni di una categoria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 273-327

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__273_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SIMMETRIZZAZIONI DI UNA CATEGORIA

FRANCO PARODI *)

PARTE III

ESTENSIONE DI FUNTORI ALLE CATEGORIE SIMMETRIZZATE

Introduzione.

In questa parte III del lavoro [1]) si affronta il problema di estendere un funtore fra due date categorie alle categorie simmetrizzate.

Si perviene ad un teorema (3.1) di unicità del funtore esteso, e ad una condizione necessaria e sufficiente di estendibilità (3.2) da cui si deduce immediatamente una condizione solo sufficiente (3.3) assai più maneggevole.

Questi risultati sono enunciati per comodità nelle varie versioni duali.

Infine si fanno alcune applicazioni ed esempi; si analizza quale delle condizioni di estendibilità verificano i funtori: Map$(K, -)$, Map$(-, K)$, Somma diretta, Prodotto diretto, K_X, K^X, Parti e Partizioni.

Si conclude costruendo dal funtore Parti nella categoria degli insiemi, covariante $\mathfrak{P}_*$, e controvariante $\mathfrak{P}^*$, un funtore Parti dalla categoria

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università di Genova, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei programmi di ricerca matematica del C.N.R. (Contratto di ricerca n. 13).

[1]) La Parte I e la Parte II di questo lavoro sono pubblicate sui Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, volume XLIV, pagg. 185-262.

delle corrispondenze alla categoria degli insiemi si esegue la costruzione duale per il funtore Partizioni $\mathfrak{Q}_*$ e $\mathfrak{Q}^*$ ottenendo un funtore Partizioni dalla categoria dei trasduttori alla categoria degli insiemi.

Queste ultime costruzioni, anche se non si presentano come estensioni di funtori nel senso trattato in precedenza, sono parse tuttavia interessanti poichè completano lo studio dei funtori « Parti » e « Partizioni », rilevandone anche il comportamento non duale per quanto riguarda proprietà di aggiunzione.

Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie soddisfacenti le condizioni 2.i) 2.ii) 2.iii) 2.iv)[2] in modo che sia possibile applicare ad esse i processi di simmetrizzazione descritti nella parte II. Consideriamo le categorie $\breve{\mathfrak{C}}$ e $\breve{\mathfrak{D}}$, siano $\mathfrak{I} : \mathfrak{C} \to \breve{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{J} : \mathfrak{D} \to \breve{\mathfrak{D}}$ le rispettive immersioni e $\sim : \breve{\mathfrak{C}} \to \breve{\mathfrak{C}}$, $- : \breve{\mathfrak{D}} \to \breve{\mathfrak{D}}$ le rispettive antiinvoluzioni.

Teorema 3.1.I. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante e $G, H : \breve{\mathfrak{C}} \to \breve{\mathfrak{D}}$ funtori covarianti tali che: estendono F ovvero: $G\mathfrak{I} = \mathfrak{J}F$, $H\mathfrak{I} = \mathfrak{J}F$; e commutano con le antiinvoluzioni ovvero: $G\sim \, = -G$, $H\sim \, = -H$ allora $G = H$.

Dim. È intanto immediato poichè G ed H estendono F e gli oggetti di $\breve{\mathfrak{C}}$ sono tutti e soli gli oggetti di $\mathfrak{C}$, che per ogni oggetto A di $\mathfrak{C}$ $G(A) = F(A) = H(A)$.

Sia poi $\Gamma : A \to B$ mappa di $\breve{\mathfrak{C}}$ allora per il Teore 2.2 esistono φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma = (\widetilde{\mathfrak{I}\psi})\,(\mathfrak{I}\varphi)$, dalle ipotesi fatte su G ed H si ha:

$$G(\Gamma) = G((\widetilde{\mathfrak{I}\psi})(\mathfrak{I}\varphi)) = (G\widetilde{\mathfrak{I}\psi})(G\mathfrak{I}\varphi) = (\overline{G\mathfrak{I}\psi})(G\mathfrak{I}\varphi) = (\overline{\mathfrak{J}F\psi})(\mathfrak{J}F\varphi)$$

$$H(\Gamma) = H((\widetilde{\mathfrak{I}\psi})(\mathfrak{I}\varphi)) = (H\widetilde{\mathfrak{I}\psi})(H\mathfrak{I}\varphi) = (\overline{H\mathfrak{I}\psi})(H\mathfrak{I}\varphi) = (\overline{\mathfrak{J}F\psi})(\mathfrak{J}F\varphi)$$

pertanto $G(\Gamma) = H(\Gamma)$.

Oss. Poichè dunque è unico se esiste, il funtore covariante di $\breve{\mathfrak{C}}$ in $\breve{\mathfrak{D}}$ che estende $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ covariante, e commutata con le antiinvoluzioni lo indicheremo $\breve{F}$ quando esiste.

---

2) Vedi Parte II di questo lavoro.

TEOREMA 3.2.I. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un funtore covariante [3] $\breve{F} : \breve{\mathfrak{C}} \to \breve{\mathfrak{D}}$ tale che: estende F, ovvero $\breve{F}\mathfrak{I} = \mathfrak{J}F$; e commutata con le antiinvoluzioni, ovvero $\breve{F}\sim\, = -\breve{F}$, è che:

3.i.I) F conservi i monomorfismi.

3.ii.I) F conservi i quadrati $\vee$-esatti [4].

DIM. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante ed esista un funtore covariante $\breve{F} : \breve{\mathfrak{C}} \to \breve{\mathfrak{D}}$ tale che $\breve{F}\mathfrak{I} = \mathfrak{J}F$ e $\breve{F}\sim\, = -\breve{F}$, allora se $\mu : A' \to A$ è un monomorfismo di $\mathfrak{C}$, si ha $\widetilde{\mathfrak{I}\mu}\mathfrak{I}\mu = 1$ (Teor. 2.5) pertanto

$$1 = \breve{F}(\widetilde{\mathfrak{I}\mu}\mathfrak{I}\mu) = (\breve{F}\widetilde{\mathfrak{I}\mu})(\breve{F}\mathfrak{I}\mu) = (\overline{\breve{F}\mathfrak{I}\mu})(\breve{F}\mathfrak{I}\mu) = (\overline{\mathfrak{J}F\mu})(\mathfrak{J}F\mu)$$

da cui $\mathfrak{J}F\mu$ è coretrazione di $\breve{\mathfrak{D}}$ quindi monomorfismo, ma allora per il Teorema 2.7 $F\mu$ è monomorfismo di $\mathfrak{D}$.

Se poi $(\varphi, \psi; \rho, \sigma)$ è un quadrato $\vee$-esatto di $\mathfrak{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

allora per il teorema 2.9 si ha

$$\mathfrak{I}\psi\widetilde{\mathfrak{I}\varphi} = \widetilde{\mathfrak{I}\sigma}\mathfrak{I}\rho$$

ed essendo dalle nostre ipotesi:

$$\breve{F}(\mathfrak{I}\psi\widetilde{\mathfrak{I}\varphi}) = (\breve{F}\mathfrak{I}\psi)(\breve{F}\widetilde{\mathfrak{I}\varphi}) = (\breve{F}\mathfrak{I}\psi)(\overline{\breve{F}\mathfrak{I}\varphi}) = (\mathfrak{J}F\psi)(\overline{\mathfrak{J}F\varphi})$$

$$\breve{F}(\widetilde{\mathfrak{I}\sigma}\mathfrak{I}\rho) = (\breve{F}\widetilde{\mathfrak{I}\sigma})(\breve{F}\mathfrak{I}\rho) = (\overline{\breve{F}\mathfrak{I}\sigma})(\breve{F}\mathfrak{I}\rho) = (\overline{\mathfrak{J}F\sigma})(\mathfrak{J}F\rho)$$

---

[3]) Necessariamente unico come visto nel teorema precedente.

[4]) Si vedrà negli esempi che le due condizioni sono indipendenti.

risulta:

$$(\mathfrak{J}F\psi)(\overline{\mathfrak{J}F\varphi})=(\overline{\mathfrak{J}F\sigma})(\mathfrak{J}F\rho)$$

ma allora per il Teorema 2.9 si ha che il seguente quadrato di $\mathfrak{D}$ è V-esatto

$$\begin{tikzcd}
 & FD & \\
FA \arrow[ur, "F\rho"] & & FB \arrow[ul, "F\sigma"'] \\
 & FC \arrow[ul, "F\varphi"] \arrow[ur, "F\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

La necessità delle condizioni 3.i.I) 3.ii.I) è così provata; proviamo ora la sufficienza.

Sia $\breve{F}$ così definito: per ogni oggetto A di $\breve{\mathfrak{C}}$ $\breve{F}(A)=F(A)$, per ogni mappa $\Gamma: A \rightarrow B$ di $\breve{\mathfrak{C}}$, $\breve{F}(\Gamma)=(\overline{\mathfrak{J}F\psi})(\mathfrak{J}F\varphi)$ essendo φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma=(\widetilde{\mathfrak{I}\psi})(\mathfrak{I}\varphi)$.

Proviamo che questa è una buona definizione, infatti sia φ', ψ' una coppia di mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $(\widetilde{\mathfrak{I}\psi'})(\mathfrak{I}\varphi')=\Gamma=(\widetilde{\mathfrak{I}\psi})(\mathfrak{I}\varphi)$ allora per il Teorema 2.9 esistono μ, ν monomorfismi di $\mathfrak{C}$ tali che sia commutativo il seguente diagramma di $\mathfrak{D}$

$$\begin{tikzcd}
 & & M & & \\
 & X \arrow[ur, "\mu"] & & X \arrow[ul, "\mu"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[urrr, "\varphi"'] & & & & B \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[ulll, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

ma essendo F funtore è commutativo il seguente diagramma di $\mathfrak{D}$

$$\begin{tikzcd}
 & & FM & & \\
 & FX \arrow[ur, "FH"] & & FX \arrow[ul, "FH'"'] & \\
FA \arrow[ur, "F\varphi"] \arrow[urrr, "F\varphi'"'] & & & & FB \arrow[ul, "F\psi"'] \arrow[ulll, "F\psi'"]
\end{tikzcd}$$

e grazie a 3.i.I) $F\mu$, $F\mu'$ sono monomorfismi di $\mathfrak{D}$ ma allora per il Teorema 2.9

$$(\overline{\mathfrak{J}F\psi})(\mathfrak{J}F\varphi)=(\overline{\mathfrak{J}F\psi'})(\mathfrak{J}F\varphi')$$

Proviamo ora che F così definito e un funtore di $\breve{\mathfrak{C}}$ in $\breve{\mathfrak{D}}$; siano

$$\Gamma : A \to B \qquad \Delta : B \to C$$

mappe di $\mathfrak{C}$ e siano φ, ψ, $\varkappa$, λ mappe di $\breve{\mathfrak{C}}$ tali che $\Gamma=\widetilde{\mathfrak{J}\mu}\mathfrak{J}\varphi$, $\Delta=\widetilde{\mathfrak{J}\lambda}\mathfrak{J}\varkappa$; consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & P & & \\
 & X \arrow[ur, "\varrho"'] & & Y \arrow[ul, "\sigma"] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"'] & & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varkappa"'] & & C \arrow[ul, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

in cui $(\psi, \varkappa; \rho, \sigma)$ è un quadrato $\vee$-esatto, si ha

$$\Delta\Gamma=\widetilde{\mathfrak{J}(\sigma\lambda)}\mathfrak{J}(\rho\varphi)$$

inoltre nel diagramma trasformato mediante il funtore F che conserva i quadrati $\vee$-esatti (3.ii.I)

$$\begin{tikzcd}
 & & FP & & \\
 & FX \arrow[ur, "F\rho"] & & FY \arrow[ul, "F\sigma"'] & \\
FA \arrow[ur, "F\varphi"] & & FB \arrow[ul, "F\psi"'] \arrow[ur, "F\chi"] & & FC \arrow[ul, "F\lambda"']
\end{tikzcd}$$

il quadrato ($F\psi$, $F\varkappa$; $F\rho$, $F\sigma$) è $\vee$-esatto, quindi

$$(\mathfrak{J}F\varkappa)(\overline{\mathfrak{J}F\psi}) = (\overline{\mathfrak{J}F\sigma})(\mathfrak{J}F\rho)$$

pertanto:

$$\check{F}(\Delta\Gamma) = \check{F}(\widetilde{\mathfrak{I}(\sigma\lambda)}\mathfrak{I}(\rho\varphi)) = \overline{\mathfrak{J}F(\sigma\lambda)}\mathfrak{J}F(\rho\varphi) =$$
$$= \overline{\mathfrak{J}F(\lambda)}\,\overline{\mathfrak{J}F(\sigma)}\mathfrak{J}F(\rho)\mathfrak{J}F(\varphi) = \overline{\mathfrak{J}F(\lambda)}\mathfrak{J}F(\varkappa)\overline{\mathfrak{J}F(\psi)}\mathfrak{J}F(\varphi) = \check{F}(\Delta)\check{F}(\Gamma)$$

ovviamente poi $\check{F}(1_A) = 1_{\check{F}(A)}$.

Che $\check{F}$ estenda F è ovvio; verifichiamo qui che commuta con le anti-involuzioni; infatti sia $\Gamma : A \to B$ una mappa di $\check{\mathfrak{C}}$ e φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma = \widetilde{\mathfrak{I}\psi}\mathfrak{I}\varphi$ allora:

$$\check{F}(\tilde{\Gamma}) = \check{F}(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{I}\psi}\mathfrak{I}\varphi}) = \check{F}(\widetilde{\mathfrak{I}\varphi}\mathfrak{I}\psi) = \overline{\mathfrak{J}F(\varphi)}\mathfrak{J}F(\psi) =$$
$$= \overline{\overline{\mathfrak{J}F(\psi)}\mathfrak{J}F(\varphi)} = \overline{\check{F}(\Gamma)}.$$

Il seguente Teorema esprime una condizione sufficiente di estendibilità di un funtore, in generale non necessaria come si rileverà negli esempi [5]).

TEOREMA 3.3.I. Dato $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante tale che:
conversa i monomorfismi;
conserva i Push-Out;

---

[5]) Per esempi significativi di ciò rimandiamo ai funtori « Parti » e « Partizioni », ed alle loro proprietà studiate in dettaglio nel seguito.

allora esiste $\check{F} : \check{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{D}}$ funtore covariante che estende F e commuta con le antiinvoluzioni.

DIM. È immediato dalla definizione di quadrato $\vee$-esatto che un funtore che conservi monomorfismi e Push-Out conserva i quadrati $\vee$-esatti, pertanto verifica la condizione necessaria e sufficiente di estendibilità espressa nel Teorema 2.2.I.

OSS. Siano $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, categorie soddisfacenti le condizioni 2, i) 2, ii) 2, iii) 2, iv) per cui sia possibile costruire $\check{\mathfrak{C}}$, $\check{\mathfrak{D}}$, $\check{\mathfrak{E}}$ e $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ funtori covarianti soddisfacenti le condizioni 3.i.I) 3.ii.I) necessarie e sufficienti di estendibilità alle categorie simmetrizzate; è ovvio che il funtore $G \cdot F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ soddisfa pure esso tali condizioni.

OSS. Si notino le seguenti proprietà:
Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtore covariante.
Se F è dotato di aggiunto a sinistra, F conserva i monomorfismi [6]).
Se F è dotato di aggiunto a destra, F conserva i Push-Out.

Enunciamo i seguenti Teoremi ottenuti per dualità dai Teoremi sopra esposti.

Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie soddisfacenti le condizioni 2.i*) 2.ii*) 2.iii*) 2.iv*). Consideriamo le categorie $\widehat{\mathfrak{C}}$ e $\widehat{\mathfrak{D}}$, siano $\mathfrak{I} : \mathfrak{C} \to \widehat{\mathfrak{C}}$ $\mathfrak{J} : \mathfrak{D} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ le rispettive immersioni e $\sim : \widehat{\mathfrak{C}} \to \widehat{\mathfrak{C}}$, $- : \widehat{\mathfrak{D}} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ le rispettive antiinvoluzioni.

TEOREMA 3.1.II. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante e $G, H : \widehat{\mathfrak{C}} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ funtori covarianti che estendono $F : G\mathfrak{I} = \mathfrak{J}F$, e commutano con le antiinvoluzioni: $G\sim = -G$ e $H\sim = -H$, allora $G = H$.

OSS. Poichè dunque è unico, se esiste, il funtore di $\widehat{\mathfrak{C}}$ in $\widehat{\mathfrak{D}}$ che estende $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ covariante e commuta con le antiinvoluzioni, lo indicheremo $\widehat{F}$ quando esiste.

TEOREMA 3.2.II. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un funtore covariante $\widehat{F} : \widehat{\mathfrak{C}} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ che

---

[6]) Confronta [1].

estende $F : \widehat{F}\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}F$, e commuta con le antiinvoluzioni: $\widehat{F}\sim\, = -\widehat{F}$, è che:

3.i.II) F conservi gli epimorfismi

3.ii.II) F conservi i quadrati $\wedge$-esatti.

TEOREMA 3.3.II. Sia $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ funtore covariante tale che:
conserva i monomorfismi;
conserva i Pull-Back;
allora esiste $\widehat{F} : \widehat{\mathfrak{C}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}$ funtore covariante che estende F e commuta con le antiinvoluzioni.

Oss. Siano $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{E}$ funtori covarianti soddisfacenti le condizioni 3.i.II) 3.ii.II) è ovvio che il funtore $G \cdot F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{E}$ soddisfa pure tali condizioni.

Oss. Si notino le seguenti proprietà.
Sia $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ funtore covariante.
Se F è dotato di aggiunto a destra conserva gli epimorfismi.
Se F è dotato di aggiunto a sinistra conserva i Pull-Back.

Sia $\mathfrak{C}$ categoria soddisfacente le condizioni 2.i) 2.ii) 2.iii) 2.iv) e $\mathfrak{D}$ categoria soddisfacente le condizioni 2.i*) 2.ii*) 2.iii*) 2.iv*). Consideriamo le categorie $\check{\mathfrak{C}}$ e $\widehat{\mathfrak{D}}$, siano $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \rightarrow \check{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{Z} : \mathfrak{D} \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}$ le rispettive immersioni, e $\sim\, : \check{\mathfrak{C}} \rightarrow \check{\mathfrak{C}}$, $- : \widehat{\mathfrak{D}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}$ le rispettive antiinvoluzioni.

TEOREMA 3.1.III. Sia $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ funtore controvariante e $G, H : \check{\mathfrak{C}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}$ funtori controvarianti che estendono $F : G\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}F$ e $H\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}F$, e commutano con le antiinvoluzioni: $G\sim\, = -G$ e $H\sim\, = -H$, allora $G = H$.

Oss. Poichè dunque se esiste è unico il funtore controvariante di $\check{\mathfrak{C}}$ in $\widehat{\mathfrak{D}}$ che estende F e commuta con le antiinvoluzioni, le indicheremo F quando esiste.

TEOREMA 3.2.III. Sia $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ funtore controvariante, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un funtore controvariante $\tilde{F} : \check{\mathfrak{C}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{D}}$ tale che estende $F : \tilde{F}\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}F$, e commuta con le antiinvoluzioni: $\tilde{F}\sim\, = -\tilde{F}$, è che:

3.i.III) F trasformi monomorfismi in epimorfismi

3.ii.III) F trasformi quadrati $\vee$-esatti in quadrati $\wedge$-esatti.

TEOREMA 3.3.III. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore controvariante, tale che:
trasforma monomorfismi in epimorfismi;
trasforma Push-Out in Pull-Bak;
allora esiste $\tilde{F} : \check{\mathfrak{C}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ funtore controvariante che estende F e commuta con le antiinvoluzioni.

OSS. Siano $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ funtori controvarianti soddisfacenti le condizioni 3.i.III) 3.ii.III) è ovvio che il funtore $GF : \mathfrak{C} \to \mathfrak{E}$ soddisfa pure tali condizioni.

OSS. Si notino le seguenti proprietà:
Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore controvariante se F è dotato di aggiunto a sinistra [7]) muta monomorfismi in epimorfismi;
se F è dotato di aggiunto a destra [7]) muta i Push-Out in Pull-Back.

Sia $\mathfrak{C}$ categoria soddisfacente le condizioni 2.i*) 2.ii*) 2.iii*) 2.iv*) e $\mathfrak{D}$ categoria soddisfacente le condizioni 2.i) 2.ii) 2.iii) 2.iv).

Consideriamo le categorie $\hat{\mathfrak{C}}$ e $\check{\mathfrak{D}}$, siano $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \to \hat{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{J} : \mathfrak{D} \to \check{\mathfrak{D}}$ le rispettive immersioni, $\sim : \hat{\mathfrak{C}} \to \hat{\mathfrak{C}}$, $- : \check{\mathfrak{D}} \to \check{\mathfrak{D}}$ le rispettive antiinvoluzioni.

TEOREMA 3.1.IV. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *funtore controvariante e* G, $H : \hat{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{D}}$ funtori controvarianti che estendono $F : G\mathfrak{J} = \mathfrak{J}F$, $H\mathfrak{J} = \mathfrak{J}F$ e commutano con le antiinvoluzioni, $G\sim = -G$, $H\sim = -H$ allora $H = G$.

---

7) Ricordiamo che $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ controvariante è dotato di aggiunto a sinistra se esiste un funtore $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ controvariante ed un isomorfismo naturale

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(G(Y), X).$$

$F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ controvariante è dotato di aggiunto a destra se esiste un funtore $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ controvariante ed un isomorfismo naturale

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, F(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, G(X)).$$

Oss. Poichè dunque se esiste è unico il funtore controvariante di $\mathfrak{C}$ in $\check{\mathfrak{D}}$ che estende F e commuta con le antiinvoluzioni, lo indicheremo $\tilde{F}$ quando esiste

Teorema 3.2.IV. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore controvariante, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un funtore controvariante $\tilde{F} : \widehat{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{D}}$ tale che: estende $F : \tilde{F}\mathfrak{I} = \mathfrak{J}F$; e commuta con le antiinvoluzioni: $F = \sim -F$, è che:

2.i.IV) F trasformi epimorfismi in monomorfismi

2.ii.IV) F trasformi quadrati $\wedge$-esatti in quadrati $\vee$-esatti.

Teorema 3.3.IV. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore controvariante tale che:

trasforma epimorfismi in monomorfismi;

trasforma i Pull-Back in Push-Out;

allora esiste $\tilde{F} : \widehat{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{D}}$ funtore controvariante che estende F e commuta con le antiinvoluzioni.

Oss. Siano $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$ funtori controvarianti soddisfacenti le condizioni 3.i.IV 3.ii.IV) è ovvio che il funtore $GF : \mathfrak{C} \to \mathfrak{E}$ verifica le stesse condizioni.

Oss. Si notino le seguenti proprietà.

Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore controvariante.

Se F è dotato di aggiunto a destra muta epimorfismi in monomorfismi.

Se F è dotato di aggiunto a sinistra muta i Pull-Back in Push-Out.

Sia $\mathfrak{C}$ una categoria soddisfacente le condizioni 2.i) 2.ii) 2.iii) 2.iv) e $\widehat{\mathfrak{D}}$ una categoria soddisfacente le condizioni 2.i*) 2.ii*) 2.iii*) 2.iv*).

Consideriamo le categorie $\check{\mathfrak{C}}$ e $\widehat{\mathfrak{D}}$, siano $\mathfrak{I} : \mathfrak{C} \to \check{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{J} : \mathfrak{D} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ le rispettive immersioni, e $\sim : \check{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{C}}$, $- : \widehat{\mathfrak{D}} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ le rispettive antiinvoluzioni.

Teorema 3.4. Sia $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ funtore covariante e $G, H : \check{\mathfrak{C}} \to \widehat{\mathfrak{D}}$ funtori covarianti che estendono F

ovvero:

$$G\mathfrak{I}=\mathfrak{J}F,\ H\mathfrak{I}=\mathfrak{J}F$$

e commutano con le antiinvoluzioni ovvero:

$$G\sim\,=-G,\ H\sim\,=-H;\ \text{allora}\ G=H.$$

DIM. Stessa dimostrazione del Teorema 2.1.I.

OSS. Poichè dunque se esiste è unico il funtore covariante di $\breve{\mathfrak{C}}$ in $\widehat{\mathfrak{D}}$ che estende $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ covariante, e commuta con le antiinvoluzioni, lo indicheremo $\tilde{F}$, quando esiste.

TEOREMA 3.5. Sia $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ funtore covariante, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un funtore covariante $\tilde{F}:\breve{\mathfrak{C}}\to\widehat{\mathfrak{D}}$ tale che estende F ovvero $F\mathfrak{I}=\mathfrak{I}F$ e commuta con le antiinvoluzioni ovvero $\tilde{F}\sim\,=-\tilde{F}$ è che:

2.iii) F trasformi monomorfismi in monic,

2.iv) F trasformi i quadrati $\vee$-esatti in quadrati $\wedge$-esatti.

DIM. Questo teorema non si ottiene per dualità dal Teorema 3.2.I; ma viene dimostrato direttamente.

Esista il funtore $\tilde{F}:\breve{\mathfrak{C}}\to\widehat{\mathfrak{D}}$ che estende F e commuta con le antiinvoluzioni; sia $\mu:A'\to A$ monomorfismo di $\mathfrak{C}$ allora $\widetilde{\mathfrak{I}\mu}\mathfrak{I}\mu=1$ (Teor. 2.5) da cui $1=\tilde{F}(\widetilde{\mathfrak{I}\mu}\mathfrak{I}\mu)=\overline{\tilde{F}(\mathfrak{I}\mu)}(\tilde{F}\mathfrak{I}\mu)=(\overline{\mathfrak{J}F\mu})(\mathfrak{J}F\mu)$ ma allora $F\mu$ è monic in $\mathfrak{D}$ (Teor. 2.6).

Se poi $(\varphi,\psi;\rho,\sigma)$ è un quadrato $\vee$-esatto in $\mathfrak{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

allora (Teor. 2.9) $\mathfrak{I}\psi\widetilde{\mathfrak{I}\varphi}=\widetilde{\mathfrak{I}\sigma}\mathfrak{I}\rho$, vale allora l'eguaglianza

$$(\mathcal{J}F\psi)(\overline{\mathcal{J}F\varphi})=\tilde{F}(\mathfrak{I}\psi\widetilde{\mathfrak{I}\varphi})=\tilde{F}(\widetilde{\mathfrak{I}\sigma}\mathfrak{I}\rho)=(\overline{\mathcal{J}F\sigma})(\mathcal{J}F\rho)$$

da cui si deduce (Teorema 2.8) che è $\wedge$-esatto il quadrato:

$$\begin{tikzcd}
 & FD & \\
FA \arrow[ur] & & FB \arrow[ul] \\
 & FC \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrata la necessità della condizione troviamo ora la sufficienza.

Sia $\tilde{F}$ così definito: per ogni oggetto A di $\breve{\mathfrak{C}}$

$$\tilde{F}(A)=F(A)$$

per ogni mappa

$$\Gamma : A \to B,\ \tilde{F}(\Gamma)=(\overline{\mathcal{J}F\psi})(\mathcal{J}F\varphi)$$

essendo φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma=\widetilde{\mathfrak{I}\psi}\mathfrak{I}\varphi$.

Proviamo che questa è una buona definizione, se infatti φ', ψ' è una coppia di mappe di $\mathfrak{C}$ tali che esiste μ monomorfismo per cui è commutativo il diagramma

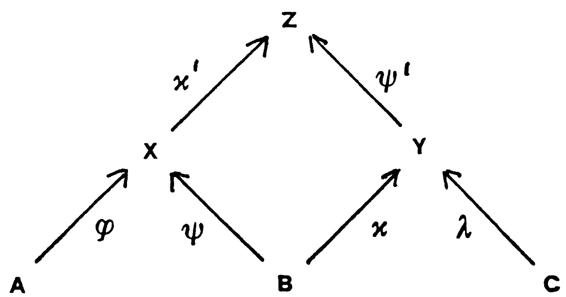
$$\begin{tikzcd}
 & X' & \\
 & X \arrow[u, "\mu"] & \\
A \arrow[uur, "\varphi'"] \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[uul, "\psi'"'] \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

allora

$$\tilde{F}(\widetilde{\mathfrak{I}\psi'\mathfrak{I}\varphi'})=\overline{(\mathfrak{J}F\psi')}(\mathfrak{J}F\varphi')=\overline{\mathfrak{J}F\psi}\,\overline{\mathfrak{J}F\mu}\,\mathfrak{J}F\mu\,\mathfrak{J}F\varphi=\overline{\mathfrak{J}F\psi}\,\mathfrak{J}F\varphi$$

essendo nelle nostre ipotesi (3.iii) $F\mu$ monic ed allora $\overline{F\mu}F\mu=1$ per il Teorema 2.6*, questo basta a provare l'indipendenza di $\tilde{F}(\Gamma)$ dal modo particolare di rappresentarla.

Proviamo ora che $\tilde{F}$ così definito è un funtore di $\breve{\mathfrak{C}}$ in $\hat{\mathfrak{D}}$; siano $\Gamma : A \to B$, $\Delta : B \to C$ mappe di $\breve{\mathfrak{C}}$ e siano φ, ψ, $\varkappa$, λ, mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma=\widetilde{\mathfrak{I}\psi}\mathfrak{I}\varphi$, $\Delta=\widetilde{\mathfrak{I}\lambda}\mathfrak{I}\varkappa$; consideriamo il diagramma

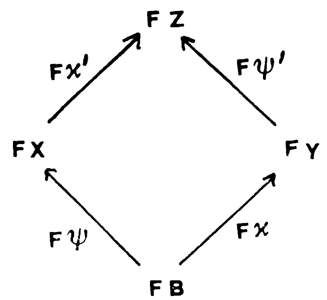


dove (ψ, k; k', ψ') è un quadrato $\vee$-esatto: $\Delta\Gamma=\widetilde{\mathfrak{I}(\psi'\lambda)}\mathfrak{I}(\varkappa'\varphi)$.

$$\tilde{F}(\Delta\Gamma)=\overline{\mathfrak{J}F(\psi'\lambda)}\mathfrak{J}F(\varkappa'\varphi)=\overline{(\mathfrak{J}F\psi'\mathfrak{J}F\lambda)}(\mathfrak{J}F\varkappa'\mathfrak{J}F\varphi)=$$
$$=\overline{\mathfrak{J}F\lambda}\,\overline{\mathfrak{J}F\psi'}\,\mathfrak{J}F\varkappa'\mathfrak{J}F\varphi$$

$$\tilde{F}(\Delta)\tilde{F}(\Gamma)=\overline{\mathfrak{J}F\lambda}\,\mathfrak{J}F\varkappa\,\overline{\mathfrak{J}F\psi}\,\mathfrak{J}F\varphi=\overline{\mathfrak{J}F\lambda}\,\overline{\mathfrak{J}F\psi'}\,\mathfrak{J}F\varkappa'\mathfrak{J}F\varphi$$

se si tiene conto che F trasforma quadrati $\vee$-esatti di $\mathfrak{C}$ in quadrati $\wedge$-esatti di $\mathfrak{D}$ e quindi $\mathfrak{J}F\varkappa\overline{\mathfrak{J}F\psi}=\overline{\mathfrak{J}F\psi'}\mathfrak{J}F\varkappa'$ per il Teorema 2.8 essendo il quadrato



$\wedge$-esatto.

Resta allora provato che $\tilde{F}(\Delta\Gamma)=\tilde{F}(\Delta)\tilde{F}(\Gamma)$ ovviamente poi $\tilde{F}(1_A)=1_{\tilde{F}(A)}$ per ogni A oggetto di $\tilde{\mathfrak{C}}$.

È poi ovvio per come è definito che $\tilde{F}$ estende F e commuta con le antiinvoluzioni.

TEOREMA 3.6. Dato $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ covariante tale che

trasforma monomorfismi in monic

trasforma Push-Out in Pull-Bak

allora esiste $\tilde{F} : \check{\mathfrak{C}} \to \hat{\mathfrak{D}}$ funtore covariante che estende F e commuta con le antiinvoluzioni.

Per brevità omettiamo la esplicita enunciazione delle altre tre versioni duali di questi Teoremi 3.4 3.5 3.6 in ipotesi duali sulle categorie $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ e sul funtore F.

OSS. Nonostante la loro validità nel contesto di questa teoria, questi teoremi 3.5, 3.6 e così le loro formulazioni duali sono di modesto interesse dal punto di vista delle applicazioni; infatti, mentre si hanno molti significativi esempi di funtori che verificano le condizioni 3.i) 3.ii) nelle loro varie formulazioni duali, in categorie interessanti (Abeliane, insiemi, spazi topologici) non conosco esempi di funtodi non costanti che verifichino le condizioni 3.iii) 3.iv) anzi la condizione che $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ trasformi Push Out in Pull Back (Teorema 3.6) impone ad F di mutare gli epic in isomorfismi, pertanto almeno se $\mathfrak{C}$ è categoria con oggetto finale un tale funtore è necessariamente costante.

Esempi.

Funtori esatti in categorie Abeliane.

Ricordiamo che in Categorie Abeliane la nozione di quadrato $\vee$-esatto e la nozione di quadrato $\wedge$-esatto coincidono con la nozione di quadrato esatto [8]) e sono esatti tutti e solo i quadrati

[8]) Vedi [4].

$$
\begin{tikzcd}
& D & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

tali che sia esatta la sequenza

$$C \xrightarrow{\{\varphi,\,\psi\}} A \oplus B \xrightarrow{\langle \rho,\,-\sigma \rangle} D$$

Date $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie Abeliane, i funtori F: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ additivi covarianti (controvarianti) che conservano i quadrati esatti soon tutti e soli i funtori esatti.

È ovvio, dalla caratterizzazione sopra ricordata, che i funtori esatti conservano i quadrati esatti.

Viceversa se un funtore $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ covariante conserva i quadrati esatti sia

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

una sequenza esatta, consideriamo il quadrato

$$
\begin{tikzcd}
& C & \\
B \arrow[ur, "\psi"] & & 0 \arrow[ul] \\
& A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

è ovvviamente esatto, allora il quadrato trasformato

$$
\begin{tikzcd}
 & FC & \\
FB \arrow[ur, "F\psi"] & & O \arrow[ul] \\
 & FA \arrow[ul, "F\varphi"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

è esatto, ma allora la sequenza

$$FA \xrightarrow{F\varphi} FB \xrightarrow{F\psi} FC$$

è esatta.

Si ha allora che se $\mathcal{C}$ e $\mathfrak{D}$ sono categorie abeliane i funtori additivi covarianti (controvarianti) $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ che possono essere estesi alle categorie simmetrizzate sono tutti e soli i funtori esatti.

I funtori Map $(K, -)\cdot$Map $(-, K)$.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, K un oggetto fissato di $\mathcal{C}$, il funtore covariante Map $(K, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ conserva i Pull Back, infatti: sia Pull Back il quadrato

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & P \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

allora il quadrato trasformato

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Map}(K, C) & \\
\mathrm{Map}(K, A) \arrow[ur, "\rho_*"] & & \mathrm{Map}(K, B) \arrow[ul, "\sigma_*"'] \\
 & \mathrm{Map}(K, P) \arrow[ul, "\varphi_*"] \arrow[ur, "\psi_*"'] &
\end{tikzcd}$$

è Pull Back, poichè se $\alpha \in \mathrm{Map}(K, A)$, $\beta \in \mathrm{Map}(K, B)$ e $\rho_*(\alpha) = \sigma_*(\beta)$, sono $\alpha : K \to A$, $\beta : K \to B$ tali che è commutattivo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & P \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \\
 & K \arrow[uul, "\alpha"] \arrow[uur, "\beta"'] \arrow[u, dashed, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

esiste allora una ed una sola mappa $\pi : K \to P$ tale che il diagramma stesso commuti, come dire: $\pi \in \mathrm{Map}(K, P)$ tale che

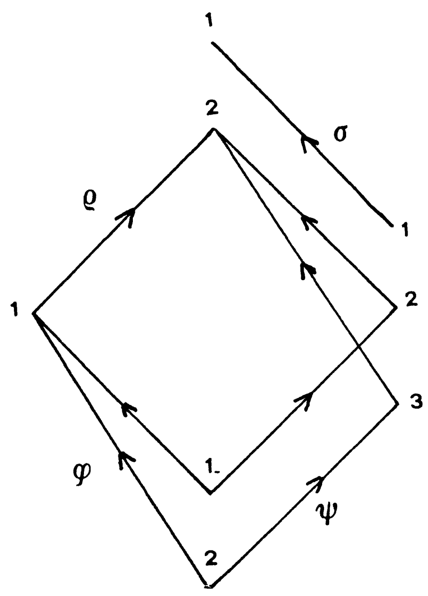
$$\varphi_*(\pi) = \alpha, \quad \psi_*(\pi) = \beta.$$

Il funtore Map $(K, -)$ muta ovviamente i monic di $\mathcal{C}$ in applicazioni iniettive, quindi conserva i monomorfismi.

Il funtore Map $(K, -)$ muta gli epimorfismi di $\mathcal{C}$ in applicazioni suriettive se e solo se K è oggetto proiettivo di $\mathcal{C}$ [9]).

Allora se $\mathcal{C}$ è una categoria verificante le condizioni 2.i*) 2.ii*) 2.iii*) 2.iv*) il funtore $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}$ $(K, -)$ si estende ad un funtore da $\widehat{\mathcal{C}}$ alla categoria delle corrispondenze purchè sia K oggetto proiettivo di $\mathcal{C}$.

Si fanno facilmente esempi di categorie nelle quali il funtore Map $(K, -)$ non conserva i Push Out, ad esempio nella categoria degli insiemi, qualunque sia K insieme tale che card $K \geqslant 2$ il funtore non conserva i Push Out e neppure i quadrati $\vee$-esatti, infatti il quadrato:



è un Push Out, mentre il quadrato trasformato mediante Map $(K, -)$, se card $K \geqslant 2$, non è neppure $\vee$-esatto, infatti se così fosse, date $\alpha, \beta : K \to \{1, 2, 3\}$, $\sigma_*(\alpha) = \sigma_*(\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta$ oppure $\mathrm{Im}\,\alpha \subset \{2, 3\}$ e $\mathrm{Im}\,\beta \subset \{2, 3\}$; invece se k ha almeno 2 elementi k_1, k_2 le due seguenti applicazioni:

---

9) Per la definizione di oggetto proiettivo cfr. [1].

$\alpha : K \to \{1, 2, 3\}$ definita $\alpha(k_1)=1$, $\alpha(k_2)=2$, $\alpha(k)=3$
per ogni $k \in K-\{k_1, k_2\}$

$\beta : K \to \{1, 2, 3\}$ definita $\beta(k_1)=1$, $\beta(k_2)=3$, $\beta(k)=2$
per ogni $k \in K-\{k_1, k_2\}$

sono diverse, non verificano la condizione sopraddetta e tuttavia $\sigma_*(\alpha)=\sigma_*(\beta)$.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, K un oggetto fissato di $\mathcal{C}$ il funtore controvariante $\mathrm{Map}\,(-, K) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ muta Push Out in Pull Back, infatti:

sia Push Out il quadrato

$$\begin{tikzcd}
& P & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

allora il quadrato trasformato

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Map}(P,K) \arrow[dl, "\varrho^*"'] \arrow[dr, "\sigma^*"] & \\
\mathrm{Map}(A,K) \arrow[dr, "\varphi^*"'] & & \mathrm{Map}(B,K) \arrow[dl, "\psi^*"] \\
& \mathrm{Map}(C,K) &
\end{tikzcd}$$

è un Pull Back, poichè se $\alpha \in \mathrm{Map}\,(A,\ K), \beta \in \mathrm{Map}\,(B,\ K)$ e $\varphi^*(\alpha)=\psi^*(\beta)$, sono $\alpha : A \to K$, $\beta : B \to k$ tali che è commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
& K & \\
& P \arrow[u, dashed, "\pi"] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\varrho"'] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\sigma"] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

esiste allora una ed una sola mappa $\pi : P \to K$ tale che il diagramma stesso commuti, come dire $\pi \in \mathrm{Map}\,(P,\ K)$ tale che $\rho^*(\pi)=\alpha$, $\sigma^*(\pi)=\beta$.

Il funtore $\mathrm{Map}\,(-,\ K)$ muta ovviamente, qualunque sia K, gli epic di $\mathcal{C}$ in applicazioni iniettive, quindi muta gli epimorfismi di $\mathcal{C}$ in monomorfismi.

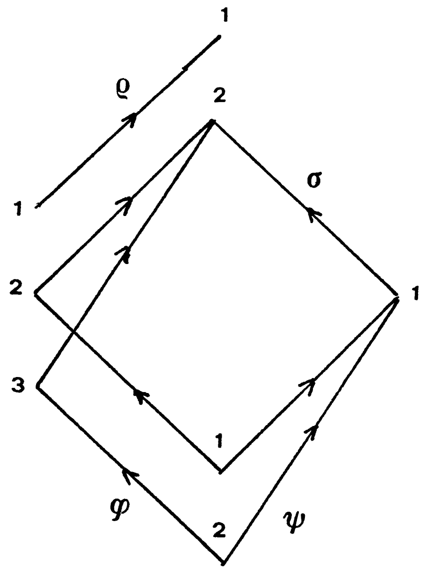
Il funtore $\mathrm{Map}\,(-,\ K)$ muta i monomorfismi di $\mathcal{C}$ in applicazioni suriettive se e solo se K è oggetto iniettivo di $\mathcal{C}$ [10]).

Allora se $\mathcal{C}$ verifica le condizioni 2.i) 2.ii) 2.iii) 2.iv) il funtore $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}\,(-,\ K)$ si estende ad un funtore dalla categoria $\breve{\mathcal{C}}$ alla categoria dei trasduttori, purchè sia K oggetto iniettivo di $\mathcal{C}$.

Si fanno facilmente esempi di categorie nelle quali il funtore $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}\,(-,\ K)$ non muta i Pull Back in Push Out, ad esempio nella categoria degli insiemi, qualunque sia K insieme tale che card $k \geqslant 2$, il funtore non muta Pull Back in Push Out, e neppure i quadrati $\wedge$-esatti in quadrati $\vee$-esatti, infatti il quadrato:

---

[10]) Per la definizione di oggetto iniettivo cfr. [1].



è un Pull Back, mentre il quadrato trasformato mediante Map$(-, K)$ se card $K \geqslant 2$ non è neppure $\vee$-esatto, infatti, se così fosse, date

$$\alpha, \beta : \{1, 2, 3\} \rightarrow K$$

$$\sigma^*(\alpha) = \sigma^*(\beta) \text{ se e solo se } \alpha = \beta$$

oppure

$$\alpha(2) = \alpha(3) = \beta(2) = \beta(3)$$

invece se K ha almeno 2 elementi k_1, $k_2 \in K$, le due seguenti applicazioni

$$\alpha : \{1, 2, 3\} \rightarrow K \text{ definita } \alpha(1) = k_1, \ \alpha(2) = k_1, \ \alpha(3) = k_2$$

$$\beta : \{1, 2, 3\} \rightarrow K \text{ definita } \beta(1) = k_2, \ \beta(2) = k_1, \ \beta(3) = k_2$$

sono diverse, non verificano la condizione sopra detta e tuttavia

$$\varphi^*(\alpha) = \psi^*(\beta).$$

Funtori Somma e Prodotto.

Siano dati in una categoria $\mathcal{C}$, con somme dirette i quadrati

$$\begin{tikzcd} & P_\iota & \\ A_\iota \arrow[ur, "\varrho_\iota"] & & B_\iota \arrow[ul, "\sigma_\iota"'] \\ & C_\iota \arrow[ul, "\varphi_\iota"] \arrow[ur, "\psi_\iota"'] & \end{tikzcd} \qquad \iota\in I.$$

Push Out per ogni $i\in I$, è noto che il quadrato

$$\begin{tikzcd} & \Sigma P_\iota & \\ \Sigma A_\iota \arrow[ur, "\Sigma\varrho_\iota"] & & \Sigma B_\iota \arrow[ul, "\Sigma\sigma_\iota"'] \\ & \Sigma C_\iota \arrow[ul, "\Sigma\varphi_\iota"] \arrow[ur, "\Sigma\psi_\iota"'] & \end{tikzcd}$$

è Push Out.

Si dirà brevemente che somma di Push Out è Push Out [11]).

È ben noto che in generale somma di Pull Back non è detto che

---

[11]) Si noti che il funtore $\sum_{\iota\in I} : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ covariante ha come aggiunto a destra il funtore tacito $\varepsilon : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$, $\varepsilon(X) = \{X\}_{\iota\in I}$.

sia Pull Back, tuttavia la cosa è vera nella categoria degli insiemi ed in categorie Abeliane.

Dimostriamolo nella categoria degli insiemi:

Siano dati nella categoria degli insiemi i quadrati

$$\begin{tikzcd} & C_\iota & \\ A_\iota \arrow[ur, "\varrho_\iota"] & & B_\iota \arrow[ul, "\sigma_\iota"'] \\ & P_\iota \arrow[ul, "\varphi_\iota"] \arrow[ur, "\psi_\iota"'] & \end{tikzcd} \qquad \iota \in I$$

Pull Back per ogni $i \in I$, consideriamo il quadrato

$$\begin{tikzcd} & \Sigma C_\iota & \\ \Sigma A_\iota \arrow[ur, "\Sigma \varrho_\iota"] & & \Sigma B_\iota \arrow[ul, "\Sigma \sigma_\iota"'] \\ & \Sigma P_\iota \arrow[ul, "\Sigma \varphi_\iota"] \arrow[ur, "\Sigma \psi_\iota"'] & \end{tikzcd} \qquad \iota \in I$$

esso è ovviamente commutativo. Siano date α, β applicazioni tali che sia commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma C_\iota & \\
\Sigma A_\iota \arrow[ur, "\Sigma \varrho_\iota"] & & \Sigma B_\iota \arrow[ul, "\Sigma \sigma_\iota"'] \\
 & \Sigma P_\iota \arrow[ul, "\Sigma \varphi_\iota"'] \arrow[ur, "\Sigma \psi_\iota"] & \\
 & Q \arrow[uul, "\alpha"] \arrow[uur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

per la commutatività risulta per ogni $\iota \in I$

$$\alpha^{-1}(A_\iota)=\alpha^{-1}(\sum_{x\in I} \rho_x)^{-1}(C_\iota)=\beta^{-1}(\sum_{x\in I} \sigma_x)^{-1}(C_\iota)=\beta^{-1}(B_\iota)$$

posto allora $Q_\iota=\alpha^{-1}(A_\iota)=\beta^{-1}(C_\iota)$ si ha $Q=\sum_{\iota\in I} Q_\iota$;

siano $\alpha_\iota : Q_\iota \to A_\iota$, $\beta_\iota : Q_\iota \to B_\iota$ per ogni $\iota \in I$ le ovvie restrizioni di α e di β, allora per ogni $i \in I$ è commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
 & C_\iota & \\
A_\iota \arrow[ur, "\varrho_\iota"] & & B_\iota \arrow[ul, "\sigma_\iota"'] \\
 & P_\iota \arrow[ul, "\varphi_\iota"'] \arrow[ur, "\psi_\iota"] & \\
 & Q_\iota \arrow[uul, "\alpha_\iota"] \arrow[uur, "\beta_\iota"'] \arrow[u, dashed, "\pi_\iota"] &
\end{tikzcd}$$

esiste allora per ogni $\iota \in I$ $\pi_\iota : Q_\iota \to P_\iota$ tale che il diagramma commuti e posto $\pi = \sum_{\iota \in I} \pi_\iota$ risulta ovviamente π l'unica mappa che rende commutativo il diagramma sopra riportato.

La proprietà ora dimostrata nella categoria degli insiemi si prova in modo analogo nella categoria degli spazi topologici, si dimostra pure agevolmente in una categoria di moduli, quindi [12]) in ogni categoria Abeliana.

Siano dati in una categoria $\mathcal{C}$ con somme dirette $\varepsilon_i : A_i \to A_i''$, $i \in I$, epimorfismi è immediato provare che $\sum_{\iota \in I} \varepsilon_\iota : \sum_{\iota \in I} A_\iota \to \sum_{\iota \in I} A_i''$ è epimorfismo; ma questa proprietà non è in generale più vera per i monomorfismi anche se risulta ovviamente vera nelle categorie degli Insiemi, degli spazi topologici ed in categorie Abeliane; le verifiche seguono immediatamente dalle caratterizzazioni dei monomorfismi nelle categorie sopra dette.

È noto dualmente che se in una categoria con Prodotti diretti, i quadrati seguenti

$$\begin{tikzcd}
& C_\iota & \\
A_\iota \arrow[ur, "\varrho_\iota"] & & B_\iota \arrow[ul, "\sigma_\iota"'] \\
& P_\iota \arrow[ul, "\varphi_\iota"] \arrow[ur, "\psi_\iota"'] &
\end{tikzcd} \qquad \iota \in I$$

sono Pull Back per ogni $i \in I$, allora il quadrato

---

[12]) Grazie al Teorema di immersione cfr. [5].

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi C_\iota & \\
\Pi A_\iota \arrow[ur, "\Pi \varrho_\iota"] & & \Pi B_\iota \arrow[ul, "\Pi \sigma_\iota"'] \\
 & \Pi P_\iota \arrow[ul, "\Pi \varphi_\iota"] \arrow[ur, "\Pi \psi_\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

è Pull Back, diremo brevemente che prodotto di Pull Back è Pull Back [13]). Non è vero neppure nella categoria degli insiemi che Prodotto di Push Out è Push Out [14]), mentre ciò è vero in categorie Abeliane, lo si prova

---

[13]) Si noti che il funtore $\prod_{\iota\in I} : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ covariante ha come aggiunto a sinistra il funtore tacito $\varepsilon : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$, $\varepsilon(X) = \{X\}_{\iota\in I}$.

[14]) Esempio. Il seguente esempio mostra come nella categoria degli insiemi non sempre il Prodotto di Push Out è Push Out

$$\begin{tikzcd}
 & A+B & \\
A \arrow[ur] & & B \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & (A+B)^2 & \\
A^2 \arrow[ur] & & B^2 \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

è Push Out non è Push Out

basta che sia A oppure B non vuoto, A e B finiti, ovviamente $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2$.

agevolmente nella categoria dei Moduli, quindi [15]) in ogni categoria Abeliana.

Se in una categoria $\mathcal{C}$ con prodotti diretti,

$$\mu_\iota : A'_\iota \to A_\iota , \qquad \iota \in I$$

sono monomorfismi allora

$$\prod_{\iota \in I} \mu_\iota : \prod_{\iota \in I} A'_\iota \to \prod_{\iota \in I} A_\iota$$

è monomorfismo, questa proprietà non è in generale più vera per epimorfismi anche se risulta vera nelle categorie degli insiemi, degli spazi topologici, ed in categorie Abeliane.

Dalle considerazioni precedenti si hanno i seguenti fatti.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria con somme dirette, X un oggetto di $\mathcal{C}$, I un insieme fissato, il funtore covariante

$$X \times I = \sum_{\iota \in I} X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

definito nel modo ovvio, conserva i Push Out, conserva gli epimorfismi, non conserva in generale i monomorfismi ma li conserva se $\mathcal{C}$ è la categoria degli insiemi, o degli spazi topologici o una categoria Abeliana; se poi $\mathcal{C}$ è la categoria degli insiemi, oppure una categoria Abeliana, questo funtore conserva anche i Pull Back.

Pertanto il funtore $X \times I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ è una categoria Abeliana, oppure la categoria degli insiemi o degli spazi topologici può essere esteso sia dalla categoria $\breve{\mathcal{C}}$ alla categoria $\breve{\mathcal{C}}$, sia dalla categoria $\widehat{\mathcal{C}}$ alla categoria $\widehat{\mathcal{C}}$.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria con prodotti diretti, X un oggetto di $\mathcal{C}$, I un insieme fissato, il funtore covariante

$$X^I = \prod_{\iota \in I} X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

15) Grazie al Teorema di immersione cfr. [5].

definito nel modo ovvio, conserva i Pull Back [16]), conserva i monomorfismi, non conserva in generale gli epimorfismi, ma li conserva se $\mathcal{C}$ è la categoria degli insiemi, o degli spazi topologici, o una categoria Abeliana. Questo funtore non conserva in generale i Push Out come visto in un esempio nella categoria degli insiemi, tuttavia li conserva se è una categoria Abeliana.

Pertanto il funtore $X^I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ è una categoria Abeliana, oppure la categoria degli insiemi o degli spazi topologici può essere esteso dalla categoria $\widehat{\mathcal{C}}$ alla categoria $\widehat{\mathcal{C}}$.

I funtori K_X , K^X.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria con somme dirette, K un oggetto fisso di $\mathcal{C}$, X un insieme, si può considerare $\sum_{x \in X} \mathrm{K}$ come funtore covariante da $\mathcal{S}$ categoria degli insiemi in $\mathcal{C}$, definito nel modo seguente sulle mappe: sia $\varphi : X \to Y$ una applicazione fra insiemi, consideriamo per ogni $x \in X$ il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & \sum\limits_{y \in Y} K \\
K \arrow[ur, "\iota_{\varphi(x)}"] \arrow[r, "\iota_x"'] & \sum\limits_{x \in X} K \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

esiste una ed una sola mappa $\sum_{x \in X} K \to \sum_{y \in Y} K$ che rende commutativo il

---

[16]) Si noti che se $\mathcal{C}$ è una categoria con somme diritte e prodotti diretti $X \times I$ è aggiunto a sinistra di X^I.

diagramma per ogni $x \in X$ diciamo φ_x tale mappa; è ovvio che si tratta di un funtore covariante, lo noteremo:

$$K_X : \mathcal{S} \to \mathcal{C}.$$

Si verifica immediatamente che il funtore $K_- : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ ha come aggiunto a destra il funtore $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(K, -)$ e pertanto conserva i Push Out, ed ovviamente poi, essendo definito nella categoria degli insiemi, covariante, conserva monomorfismi ed epimorfismi.

Allora il funtore K_- può essere esteso se $\mathcal{C}$ è una categoria che verifica le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) ottenendo un funtore

$$\breve{K}_- : \breve{\mathcal{S}} \to \breve{\mathcal{C}}.$$

Dualmente sia $\mathcal{C}$ una categoria con prodotti diretti, K un oggetto di $\mathcal{C}$, X un insieme, si può considerare $\prod\limits_{x \in X} K$ come funtore controvariante da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{C}$, definito nel modo seguente sulle mappe:

sia $\varphi : X \to Y$ una applicazione fra insiemi, consideriamo per ogni $x \in X$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}
K & \prod\limits_{x \in X} K \arrow[l, "\pi_x"'] \\
 & \prod\limits_{y \in Y} K \arrow[ul, "\pi_{\varphi(x)}"] \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

esiste una ed una sola mappa $\prod\limits_{y \in Y} K \to \prod\limits_{x \in X} K$ che rende commutativo il diagramma per ogni $x \in X$, diciamo φ^* tale mappa; è ovvio che si tratta di un funtore controvariante, lo noteremo

$$K^X : \mathcal{S} \to \mathcal{C}.$$

Si verifica facilmente che il funtore $K^- : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ controvariante ha come aggiunto a destra il funtore Map $(-, K)$, pertanto muta Push Out in Pull Back, ed ovviamente poi essendo definito nella categoria degli insiemi, controvariante, muta epimorfismi in monomorfismi e monomorfismi in epimorfismi.

Allora se $\mathcal{C}$ è una categoria soddisfacente le condizioni 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*) il funtore K^- può essere esteso ottenendo un funtore

$$\tilde{K}^- : \breve{\mathcal{S}} \to \dot{\widehat{\mathcal{C}}}.$$

Oss. Si noti che nella categoria degli insiemi valgono le seguenti caratterizzazioni:

I funtori covarianti $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ che conservano i Push Out sono tutti e soli del tipo

$$F(X) = K_0 + K_X$$

con K_0, K insiemi fissati [17]).

I funtori controvarianti $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ che mutano Push Out in Pull Back sono tutti e soli del tipo

$$F(X) = \sum_{\iota \in I} K_\iota^X$$

con I, K_ι $(\iota \in I)$ insiemi fissati [17]).

Il Funtore « Parti » e il funtore « Partizioni ».

Concludiamo questi esempi studiando le proprietà di due particolari funtori definiti nella categoria degli insiemi a valori nella categoria degli insiemi che forniscono tra l'altro un esempio di funtore covariante che conserva quadrati $\wedge$-esatti e non i Pull Back, e un esempio di fun-

[17]) Si dimostra facilmente per induzione.

tore controvariante che muta quadrati $\vee$-esatti in quadrati $\wedge$-esatti e non Push Out in Pull Back.

Sia X un insieme, denotiamo con $\mathbb{P}(X)$ l'insieme delle parti di X

Parti covariante $\mathbb{P}_*$:

definiamo per ogni insieme X $\quad \mathbb{P}_*(X)=\mathbb{P}(X)$

e per ogni applicazione $\varphi : X \to Y$ $\quad \mathbb{P}\varphi_* : {}_*(X) \to \mathbb{P}_*(Y)$

l'applicazione definita: $\varphi_*(A)=\varphi(A)$ per ogni A parte di X;

abbiamo così un funtore covariante.

Parti controvariante $\mathbb{P}^*$:

definiamo per ogni insieme X $\quad \mathbb{P}^*(X)=\mathbb{P}(X)$

e per ogni applicazione $\varphi : X \to Y$ $\quad \varphi^* : \mathbb{P}^*(Y) \to \mathbb{P}^*(Y)$

l'applicazione definita: $\varphi^*(B)=\varphi^{-1}(B)$ per ogni B parte di Y;

abbiamo ovviamente un funtore controvariante.

Sia X un insieme, denotiamo con $\mathbb{Q}(X)$ l'insieme delle partizioni di X

Partizioni controvariante $\mathbb{Q}^*$:

definiamo per ogni insieme X $\mathbb{Q}^*(X)=\mathbb{Q}(X)$

e per ogni applicazione $\varphi : X \to Y$ $\varphi^* : \mathbb{Q}^*(Y) \to \mathbb{Q}^*(X)$

l'applicazione che fa corrispondere ad ogni partizione di Y la partizione di X ottenuta per controimmagine.

Osserviamo che data β partizione di Y resta individuato un epimorfismo $\beta : Y \to Y/\beta$ (con ovvio abuso di notazione); consideriamo la fattorizzazione canonica di $\beta\varphi$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta"] & Y/\beta \\
X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & X'' \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

ε epimorfismo μ monomorfismo, ε individua una partizione di X che indicheremo con ε per abuso di notazione, si ha $\varphi^*(\beta)=\varepsilon$. È facile verificare che è un funtore controvariante.

Partizioni covariante $\mathfrak{Q}_*$:

definiamo per ogni insieme X $\mathfrak{Q}_*(X)=\mathfrak{Q}(X)$

e per ogni applicazione $\varphi : X \to Y$ $\varphi_* : \mathfrak{Q}_*(X) \to \mathfrak{Q}_*(Y)$

l'applicazione che fa corrispondere ad ogni α partizione di X la più fine delle partizioni di Y la cui controimmagine è meno fine di α [18]).

Data α partizione di X possiamo caratterizzare così $\varphi_*(\alpha)$: consideriamo in X la partizione α' dei sottoinsiemi saturi rispetto ad α e a φ; sia β la partizione di Y delle immagini mediante φ delle classi della partizione α', e discreta fuori dell'immagine di φ, si ha $\varphi_*(\alpha)=\beta$.

E ancora

sia Push Out il quadrato

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' & \\
X/\alpha \arrow[ur, "\varphi'"] & & Y \arrow[ul, "\beta"'] \\
 & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

β è un epimorfismo, individua allora una partizione di Y che indicheremo ancora β per abuso di notazione, si ha $\varphi_*(\alpha)=\beta$.

---

[18]) Questa definizione è quella buona, si presta ad estensioni a categorie più generali ed è duale di quella data per il funtore Parti controvariante.

Nella seguente tabella sono esposte alcune proprietà di questi due (quattro) funtori che motiveremo nel seguito:

	Trasforma		Parti $\mathfrak{P}$	Partizioni $\mathfrak{Q}$
			Covariante	
1	Pull Back	in Pull Back	NO	NO
2	$\wedge$-esatti	in $\wedge$-esatti	SI	NO
3	Push Out	in Push Out	NO	NO
4	$\vee$-esatti	in $\vee$-esatti	NO	NO
			Controvariante	
5	Pull Back	in Push Out	NO	NO
6	$\wedge$-esatti	in $\vee$-esatti	NO	NO
7	Push Out	in Pull Back	SI	NO
8	$\vee$-esatti	in $\wedge$-esatti	SI	SI

Da cui si deduce che: (ricordiamo $\hat{\mathfrak{S}}$ cat. corrispondenze, $\check{\mathfrak{S}}$ cat. trasduttori)

$\mathfrak{P}_*$ è estendibile a $\hat{\mathfrak{P}}_* : \hat{\mathfrak{S}} \to \hat{\mathfrak{S}}$

$\mathfrak{P}^*$ è estendibile a $\tilde{\mathfrak{P}}^* : \check{\mathfrak{S}} \to \hat{\mathfrak{S}}$

$\mathfrak{Q}_*$ non ammette estensioni del tipo considerato

$\mathfrak{Q}^*$ è estendibile a $\tilde{\mathfrak{Q}}^* : \check{\mathfrak{S}} \to \hat{\mathfrak{S}}$.

Motiviamo ora tutte le affermazioni riportate nella tabella:

1. $\mathfrak{P}$ - 2. $\mathfrak{P}$ [19]).

Mostriamo che $\mathfrak{P}_* : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ conserva i quadrati $\wedge$-esatti; basta mostrare che esso muta Pull Back in quadrati $\wedge$-esatti poichè certamente conserva gli epimorfismi.

---

[19]) Qui e nel seguito il numero si riferisce alla riga, la lettera $\mathfrak{P}$ o $\mathfrak{Q}$ alla colonna della casella in cui nella tabella precedente è contenuto in forma sintetica l'enunciato. Per comodità di lettura l'enunciato è comunque ripetuto nel testo.

Sia

$$
\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
& P \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Pull Back, consideriamo il quadrato ovviamente commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{P}(C) & \\
\mathbb{P}(A) \arrow[ur, "\varrho_*"] & & \mathbb{P}(B) \arrow[ul, "\sigma_*"'] \\
& \mathbb{P}(P) \arrow[ul, "\varphi_*"] \arrow[ur, "\psi_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Siano $A'\in\mathbb{P}(A)$, $B'\in\mathbb{P}(B)$ tali che $\rho_*(A')=\sigma_*(B')$ ovvero $A'\subset A$, $B'\subset B$ tali che $\rho(A')=\sigma(B')$ posto

$$P'=\varphi^{-1}(A')\cap\psi^{-1}(B')\subset P$$

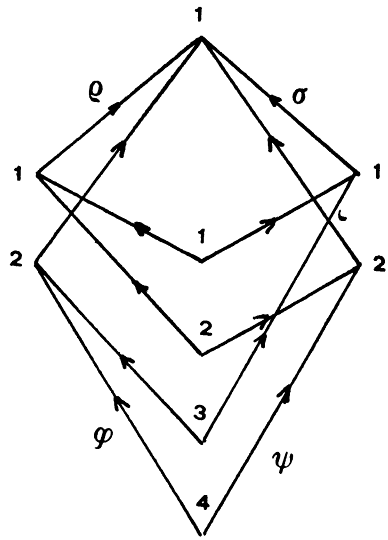
risulta in modo ovvio dalla caratterizzazione di Pull Back nella categoria degli insiemi: $\varphi(P')=A'$, $\psi(P')=B'$.

Esiste quindi almeno una parte di P, P' tale che

$$\varphi_*(P')=A', \quad \psi_*(P')=B'$$

essa però non è individuata univocamente dalla coppia (A', B') come si vede nell'esempio seguente.

Il quadrato:



è Pull Back.

Si noti però che:

$$\varphi(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2\} \qquad \psi(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2\}$$

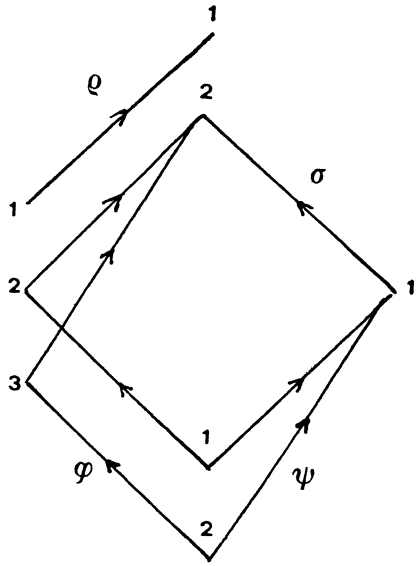
$$\varphi(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2\} \qquad \psi(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2\}.$$

Ciò prova che $\mathfrak{P}_*$ muta Pull Back in quadrati $\vee$-esatti e quindi conserva i quadrati $\vee$-esatti anche se non conserva i Pull Back.

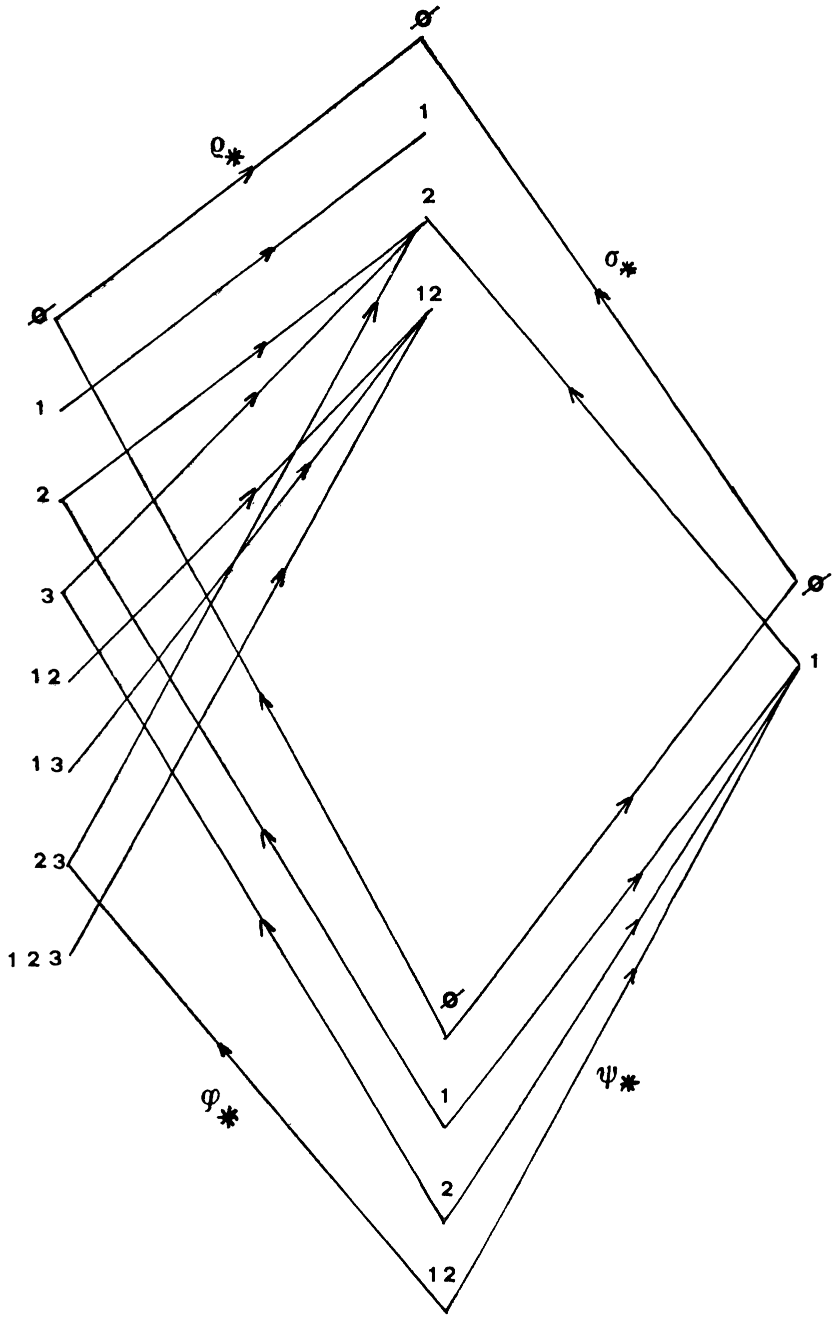
3. $\mathfrak{P}$ - 4. $\mathfrak{P}$.

Il seguente esempio di Push Out che non viene conservato dal funtore $\mathfrak{P}_*$ mostra anche che tale funtore non conserva i quadrati $\vee$-esatti.

Il quadrato



è Push Out, il quadrato trasformato


∅
1
2
12
ϱ_*
σ_*
∅
1
2
3
12
13
23
123
∅
1
∅
1
2
12
φ_*
ψ_*

non è Push Out infatti si vede facilmente che se fosse un Push Out al vertice superiore del quadrato dovrebbe esserci un insieme di 6 elementi e non uno di 4, ma allora il quadrato non è neppure $\vee$-esatto poichè non ci sono monomorfismi da un insieme di 6 elementi ad un insieme di 4.

5. $\mathbb{P}$ - 6. $\mathbb{P}$.

Che il funtore $\mathbb{P}^* : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ non muti Pull Back in Push Out e nemmeno i quadrati $\wedge$-esatti in quadrati $\vee$-esatti segue immediatamente dagli isomorfismi naturali $\mathbb{P}^*(X) = 2^X = \mathrm{Map}\,(X, \{1, 2\})$ e da proprietà già studiate del funtore $\mathrm{Map}_{\mathbb{S}}\,(-, K)$.

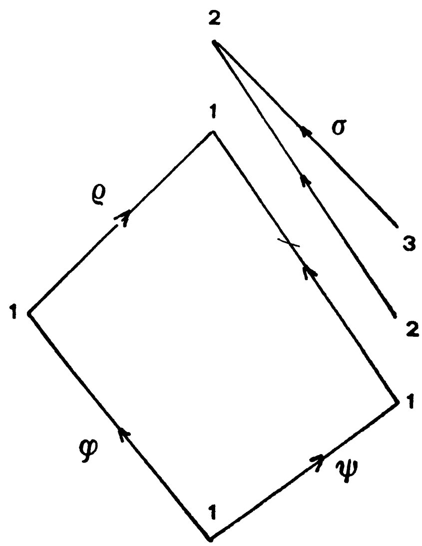
7. $\mathbb{P}$ - 8. $\mathbb{P}$.

Per mostrare che il funtore $\mathbb{P}^* : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ muta Push Out in Pull Back, e quindi quadrati $\vee$-esatti in quadrati $\wedge$-esatti basta ricordare ancora l'isomorfismo naturale $\mathbb{P}^*(X) = 2^X$ per cui si presenta come un caso particolare di una situazione più generale già discussa. (K^X).

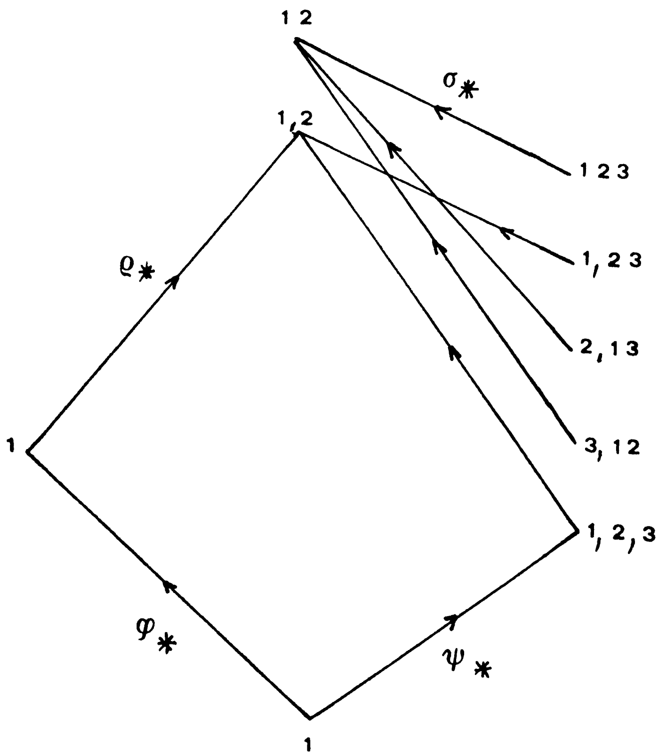
1. $\mathbb{Q}$ - 2. $\mathbb{Q}$.

Il seguente esempio mostra che il funtore $\mathbb{Q}_* : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ non conserva Pull Back nè quadrati $\vee$-esatti.

Il quadrato



è Pull Back, il quadrato trasformato

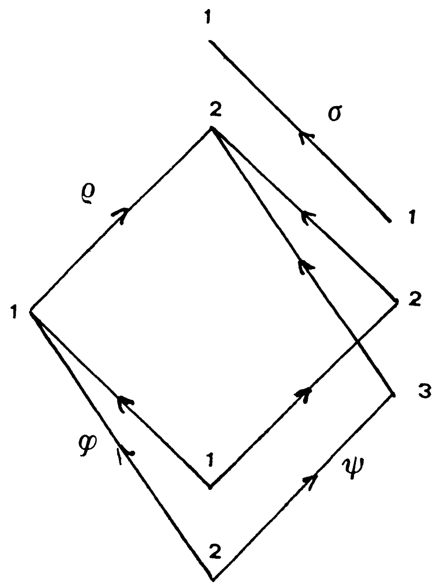


non è Pull Back, se fosse Pull Back nel vertice inferiore dovrebbe trovarsi un insieme di 2 elementi e non di 1, allora ovviamente non è neppure $\wedge$-esatto poichè non ci sono epimorfismi da un insieme puntiforme ad un insieme di 2 elementi.

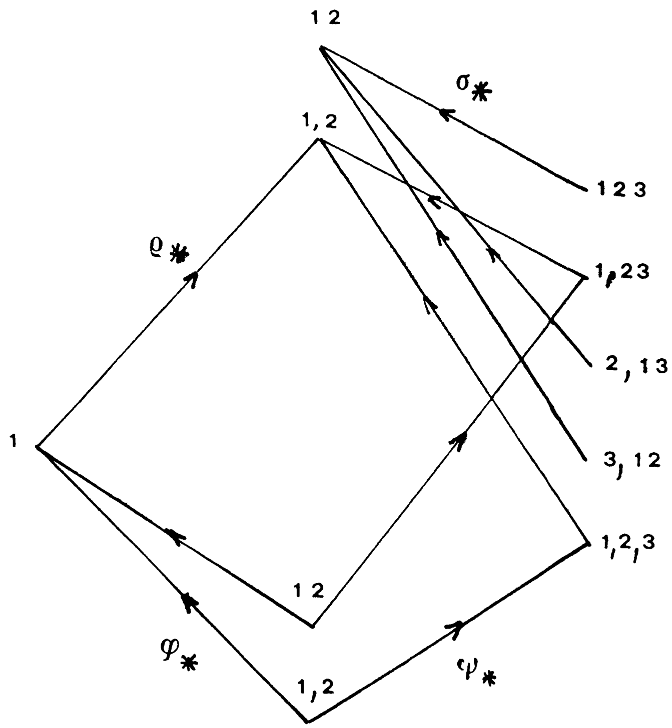
3. $\mathfrak{Q}$ - 4. $\mathfrak{Q}$.

Il seguente esempio mostra che il funtore $\mathfrak{Q}_* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ non conserva i Push Out nè i quadrati $\vee$-esatti.

Il quadrato



è Push Out, il quadrato trasformato

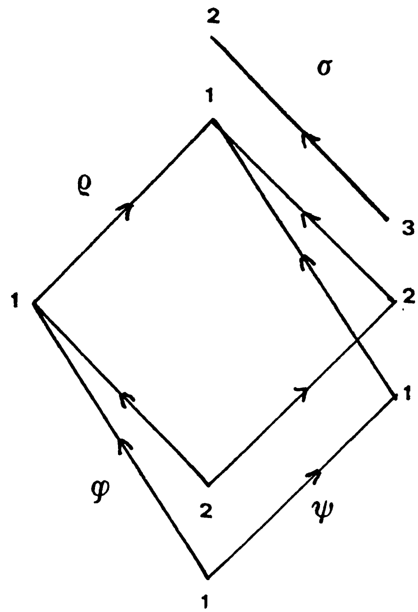


non è Push Out, se fosse Push Out al vertice superiore del quadrato dovrebbe essere un insieme di 4 elementi anzichè di 2, pertanto non è neppure $\vee$-esatto poichè non ci sono monomorfismi da un insieme di 4 elementi ad uno di 2.

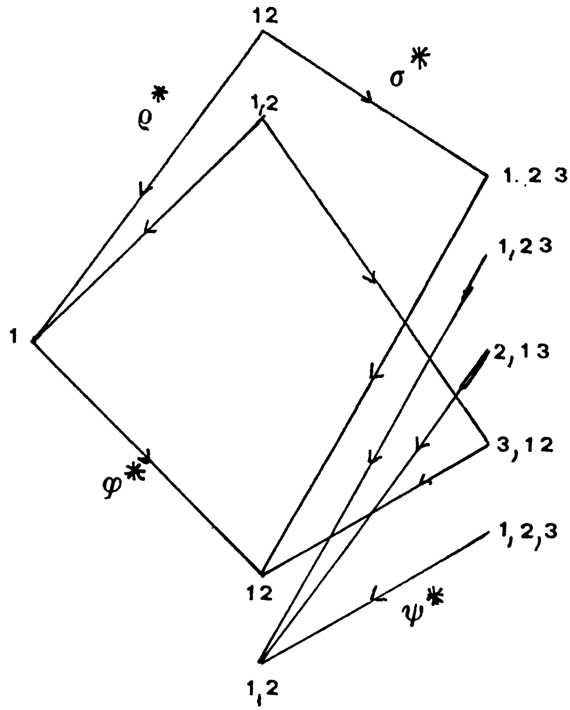
5. $\mathbb{Q}$ - 6. $\mathbb{Q}$

Il seguente esempio mostra che il funtore $\mathbb{Q}^* : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ controvariante non muta Pull Back in Push Out e neppure muta quadrati $\wedge$-esatti in quadrati $\vee$-esatti.

Il quadrato



è Pull Back, il quadrato trasformato



non è Push Out, se fosse Push Out nel vertice inferiore dovrebbe essere un insieme di 4 punti e non di 2 pertanto non è neppure un quadrato $\vee$-esatto poichè non ci sono monomorfismi da un insieme di 4 punti in un insieme di 2.

7. $\mathfrak{Q}$ - 8. $\mathfrak{Q}$.

Proviamo che il funtore $\mathfrak{Q}^* : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ muta Push Out in quadrati $\wedge$-esatti, non necessariamente in Pull Back, quindi, poichè ovviamente muta monomorfismi in epimorfismi, muta quadrati $\vee$-esatti in $\wedge$-esatti.

Sia il quadrato

$$\begin{tikzcd}
& P & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
& C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

un Push Out, consideriamo il quadrato trasformato

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(P) & \\
\mathbb{Q}(A) \arrow[ur, "\varrho^*"] & & \mathbb{Q}(B) \arrow[ul, "\sigma^*"'] \\
& \mathbb{Q}(C) \arrow[ul, "\varphi^*"] \arrow[ur, "\psi^*"'] &
\end{tikzcd}$$

è ovviamente commutativo, proviamo che è $\wedge$-esatto.

Siano $\alpha \in \mathbb{Q}(A)$, $\beta \in \mathbb{Q}(B)$ tali che $\varphi^*(\alpha) = \psi^*(\beta)$, consideriamo il diagramma seguente

$$
\begin{tikzcd}
 & & P'' & & \\
 & Q \arrow[ur, "\beta''"] & & R \arrow[ul, "\alpha''"'] & \\
A/\alpha \arrow[ur, "\varrho'"] & & P \arrow[ul, "\alpha'"'] \arrow[ur, "\beta'"] & & B/\beta \arrow[ul, "\sigma'"'] \\
 & A \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\varrho"'] & C'' \arrow[ll, "\mu"'] \arrow[rr, "Y"] & B \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[ur, "\beta"'] & \\
 & & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[ur, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

dove $\mu\varepsilon=\alpha\varphi$ e $\nu\varepsilon=\beta\psi$ sono fattorizzazioni canoniche μ, ν monomorfismi ε epimorfismo, e quindi $\varphi^*(\alpha)=\varepsilon=\psi^*(\beta)$;

$$(\alpha,\ \rho;\ \rho',\ \alpha')$$

è Push Out e allora α' è epimorfismo,

$$(\sigma,\ \beta;\ \beta',\ \sigma')$$

è Push Out e allora β' è epimorfismo,

$$(\alpha',\ \beta';\ \beta'',\ \alpha'')$$

è Push Out e allora α'' e β'' sono epimorfismi.

Si ha allora che

$$(\alpha\varphi,\ \beta\psi;\ \beta''\rho',\ \alpha''\sigma')$$

è Push Out ed essendo ε epimorfismo, anche

$$(\mu,\ \nu;\ \beta''\rho',\ \alpha''\sigma')$$

è Push Out, quindi $\beta''\rho'$ e $\alpha''\sigma'$ sono monomorfismi.

Posto $\nu'=\beta''\rho'$, $\mu'=\alpha''\sigma'$ monomorfismi ed $\eta=\beta''\alpha'=\alpha''\beta'$ si ha che il diagramma

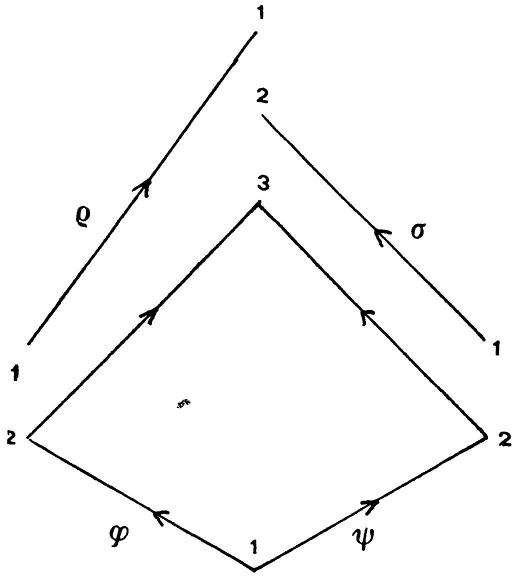
$$\begin{tikzcd}
& & P'' & & \\
A/\alpha \arrow[urr, "\mu'"] & & P \arrow[u, "\eta"] & & B/\beta \arrow[ull, "\nu'"'] \\
& A \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \arrow[ur, "\beta"'] & \\
& & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

è commutativo, esiste allora un epimorfismo $\eta : P \rightarrow P''$ tale che $\mu'\alpha=\eta\rho$ e $\nu'\beta=\eta\sigma$ ed entrambe sono fattorizzazioni canoniche.

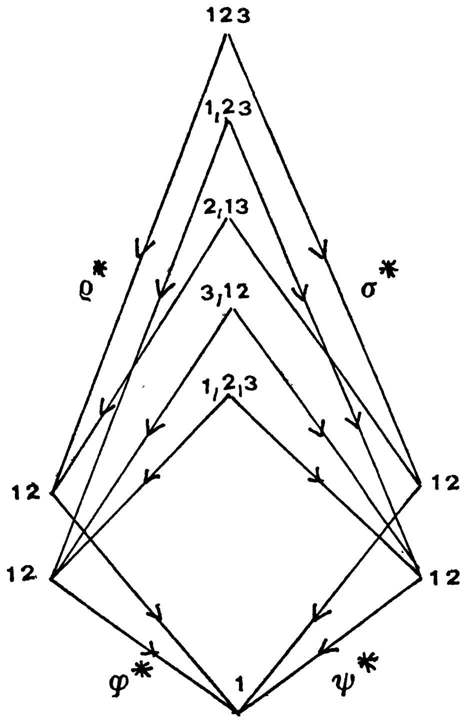
Allora esiste una partizione η di P tale che $\rho^*(\eta)=\alpha$, $\sigma^*(\eta)=\beta$.

Il seguente esempio mostra però che il funtore $\mathfrak{Q}^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ non muta Push Out in Pull Back:

Il quadrato



è Push Out, ma il quadrato trasformato



non è ovviamente Pull Back, se fosse Pull Back nel vertice in alto dovremmo avere un insieme di 4 elementi.

Ancora sui funtori « Parti » e « Partizioni ».

Dal funtore « Parti »

$$\mathbb{P}_* : \mathbb{S} \to \mathbb{S} \text{ covariante, } \mathbb{P}^* : \mathbb{S} \to \mathbb{S} \text{ controvariante.}$$

è possibile costruire un interessante funtore covariante dalla categoria delle corrispondenze alla categoria degli insiemi che noteremo $\mathbb{P}: \widehat{\mathbb{S}} \to \mathbb{S}$, definito nel modo seguente sugli oggetti: per ogni insieme X $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}_*(X)=\mathbb{P}^*(X)$

sulle mappe: per ogni corrispondenza $\Gamma : X \to Y$, $\Gamma=\psi\tilde{\varphi}$,

$$\mathbb{P}(\Gamma) : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(Y)$$

è l'applicazione così definita

$$\mathbb{P}(\Gamma)(A)=\psi_*(\varphi^*(A))$$

per qualunque A parte di X.

Si verifica immediatamente che la definizione non dipende dalla rappresentazione di Γ, infatti se ε è epimorfismo $\varepsilon_*\varepsilon^*=1$, e che si tratta effettivamente di un funtore, infatti basta provare che se un quadrato

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & P \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

è Pull Back, allora il quadrato seguente

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}(C) \arrow[dr, "\sigma^*"] & \\
\mathbb{P}(A) \arrow[ur, "\varrho_*"] \arrow[dr, "\varphi^*"'] & & \mathbb{P}(B) \\
 & \mathbb{P}(P) \arrow[ur, "\psi_*"'] &
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Sia $A' \subset A$, proviamo che $\sigma^{-1}(\rho(A')) = \psi(\varphi^{-1}(A'))$ intanto dall'eguaglianza $\rho\varphi = \sigma\psi$ e da ovvie proprietà di immagini e controimmagini si hanno le relazioni

$$\sigma^{-1}\rho(A') \supset \sigma^{-1}\rho\varphi\varphi^{-1}(A') = \sigma^{-1}\sigma\psi\varphi^{-1}(A') \supset \psi\varphi^{-1}(A')$$

se poi $b \in \sigma^{-1}\rho(A')$ allora $\sigma(b) \in \rho(A')$ ovvero esiste $a \in A'$ tale che $\sigma(b) = \rho(a)$ ed essendo $(\varphi, \psi : \rho, \sigma)$ Pull Back esiste uno ed uno solo $p \in P$ tale che $\varphi(p) = a$, $\psi(p) = b$ ma allora $p \in \varphi^{-1}(A')$ e $b \in \psi\varphi^{-1}(A')$.

Il funtore $\mathfrak{P} : \widehat{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ gode ovviamente di queste due proprietà, se $\mathfrak{I} : \mathfrak{S} \to \widehat{\mathfrak{S}}$ è il funtore di immersione, e $\sim\, : \widehat{\mathfrak{S}} \to \widehat{\mathfrak{S}}$ l'antiinvoluzione:

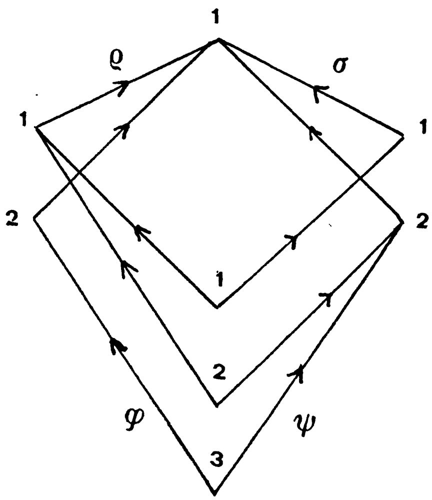
$$\mathfrak{P}_* = \mathfrak{P}\mathfrak{I} \qquad \mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} \sim \mathfrak{I}$$

Si noti inoltre che questo funtore $\mathfrak{P} : \widehat{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ è aggiunto a destra del funtore di inclusione $\mathfrak{I} : \mathfrak{S} \to \widehat{\mathfrak{S}}$; aggiunzione data dall'isomorfismo naturale

$$\mathrm{Map}_{\widehat{\mathfrak{S}}}(X, Y) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{S}}(X, \mathfrak{P}(Y)).$$

Il funtore « parti » non si presta alla costruzione analoga a quella ora descritta, di un funtore dalla categoria dei trasduttori $\breve{\mathfrak{S}}$ alla categoria degli insiemi.

Basta osservare che il quadrato seguente



è Push Out, ma il quadrato

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}(1) \arrow[dr, "\sigma^*"] & \\
\mathbb{P}(1,2) \arrow[ur, "\varrho_*"] \arrow[dr, "\varphi^*"'] & & \mathbb{P}(1,2) \\
 & \mathbb{P}(1,2,3) \arrow[ur, "\psi_*"'] &
\end{tikzcd}$$

non è commutativo, infatti ovviamente

$$\sigma^*\rho_*(\{2\})=\{1,\ 2\} \qquad \psi_*\varphi^*(\{2\})=\{2\}.$$

Dal funtore « partizioni »

$$\mathbb{Q}_* : \mathbb{S} \to \mathbb{S} \text{ covariante, } \mathbb{Q}^* : \mathbb{S} \to \mathbb{S} \text{ controvariante,}$$

si costruisce un funtore covariante dalla categoria dei trasduttori alla categoria degli insiemi, che noteremo $\mathbb{Q} : \breve{\mathbb{S}} \to \mathbb{S}$ definito nel modo seguente:

$$\mathbb{Q}(X) = \mathbb{Q}_*(X) = \mathbb{Q}^*(X) \text{ per ogni insieme } X,$$

per ogni trasduttore $\Gamma : X \to Y$, $\Gamma = \tilde{\psi}\varphi$ con φ, ψ applicazioni,

$$\mathbb{Q}(\Gamma) : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}(Y)$$

è l'applicazione definita

$$\mathbb{Q}(\Gamma)(\alpha) = \psi^*\varphi_*(\alpha)$$

per ogni α partizione di X.

Si verifica immediatamente che la definizione non dipende dalla rappresentazione di Γ, infatti se μ è monomorfismo, $\mu^*\mu_* = 1$ ovviamente, e che si tratta effettivamente di un funtore, infatti basta provare che se un quadrato

$$\begin{tikzcd}
 & P & \\
A \arrow[ur, "\varrho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

è Push Out, allora il quadrato

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}P \arrow[dr, "\sigma^{*}"] & \\
\mathbb{Q}A \arrow[ur, "\varrho_{*}"] \arrow[dr, "\varphi^{*}"'] & & \mathbb{Q}B \\
 & \mathbb{Q}C \arrow[ur, "\psi_{*}"'] &
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Sia α una partizione di A, dimostriamo che $\sigma^{*}\rho_{*}(\alpha)=\psi_{*}\varphi^{*}(\alpha)$;

consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & P'' & & \\
A/\alpha \arrow[urr, "\varrho'"] & & P \arrow[u, "\alpha'"] & & B'' \arrow[ull, "\gamma"'] \\
A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[urr, "\varrho"'] & & C'' \arrow[ull, "\mu"] \arrow[urr] & & B \arrow[u, "\varepsilon'"'] \arrow[ull, "\sigma"] \\
 & & C \arrow[ull, "\varphi"] \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

in cui $(\alpha, \rho; \rho', \alpha')$ è Push Out e allora $\alpha'=\rho_*(\alpha)$, $\mu\varepsilon=\alpha\varphi$ è la fattorizzazione canonica e allora $\varepsilon=\varphi^*(\alpha)$, $(\varepsilon, \psi; \psi', \varepsilon')$ è Push Out e allora $\varepsilon'=\psi_*(\varepsilon)=\psi_*\varphi^*(\alpha)$ ed infine ν è la applicazione che rende commutativo il diagramma, in queste ipotesi risulta

$$(\mu, \psi'; \rho', \nu) \text{ Push Out (verifica ovvia!)}$$

pertanto ν è monomorfismo, allora $\nu\varepsilon'=\sigma\alpha'$ è una fattorizzazione canonica per cui si ha

$$\varepsilon'=\sigma^*(\alpha')=\sigma^*\rho_*(\alpha)$$

e quindi come si voleva

$$\psi_*\varphi^*(\alpha)=\sigma^*\rho_*(\alpha).$$

Il funtore $\mathfrak{Q} : \check{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ gode ovviamente di queste due proprietà: se

$\mathfrak{J}:\mathfrak{S}\rightarrow\check{\mathfrak{S}}$ è il funtore di immersione e $\sim:\check{\mathfrak{S}}\rightarrow\check{\mathfrak{S}}$ l'antiinvoluzione:

$$\mathfrak{Q}_* = \mathfrak{Q}\mathfrak{J} \qquad \mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}\sim\mathfrak{J}.$$

Il funtore $\mathfrak{Q}:\check{\mathfrak{S}}\rightarrow\mathfrak{S}$ non è aggiunto nè a destra nè a sinistra del funtore $\mathfrak{J}:\mathfrak{S}\rightarrow\check{\mathfrak{S}}$ [20]) infatti ad esempio

$$\mathrm{Map}_{\check{\mathfrak{S}}}(\emptyset, \{1, 2\}) \neq \mathrm{Map}_{\mathfrak{S}}(\emptyset, \mathfrak{Q}\{1, 2\})$$

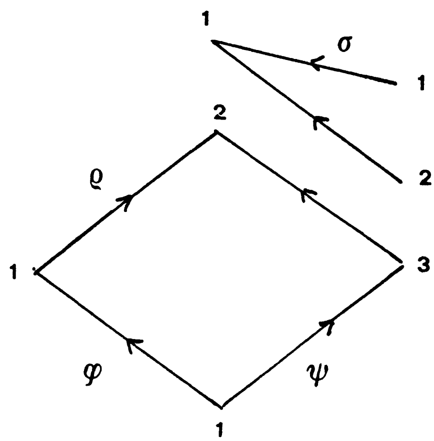
avendo il primo due elementi, il secondo uno solo.

$$\mathrm{Map}_{\check{\mathfrak{S}}}(\emptyset, \{1, 2, 3\}) \neq \mathrm{Map}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{Q}(\emptyset), \{1, 2, 3\})$$

avendo il primo cinque elementi, il secondo tre soli.

Il funtore « partizioni » non si presta alla costruzione analoga a quella ora descritta, di un funtore dalla categoria delle corrispondenze $\hat{\mathfrak{S}}$ alla categoria degli insiemi.

Basta osservare che il quadrato:



[20]) Si noti che la dualità fra $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ cade in difetto per quanto riguarda il carattere di aggiunzione.

è Pull Back, ma il quadrato

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{Q}(1,2) & \\
\mathfrak{Q}(1) \arrow[ur, "\rho_*"] & & \mathfrak{Q}(1,2,3) \arrow[ul, "\sigma^*"'] \\
 & \mathfrak{Q}(1) \arrow[ul, "\varphi^*"] \arrow[ur, "\psi_*"'] &
\end{tikzcd}$$

non è commutativo poichè $\psi_*\varphi^*(\{1\})$ è la partizione discreta, mentre $\sigma^*\rho_*(\{1\})=\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ non discreta.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arduini, P.: *Monomorfism and epimorfism in abstract catetgories,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1969), volume XLII.

[2] Bourbaki, N.: *Thèorie des ensembes,* Chap. III, ed. Hermann, Paris.

[3] Cartan, H., Eilemberg, S.: *Homological Algebra,* Princenton University Press (1956).

[4] Hilton, P.: *Correspondences end exact squares Proc. of the Conf. on Categ. Alg.,* La Jolla (1965).

[5] Mitchell, B.: *Theory of categorie,* Academic Press, New York and London (1965).

[6] Parodi, F.: *Simmetrizzazioni di una Categoria,* Parte I, *Premesse generali,* Parte II, *Processi di simmetrizzazione,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova, volume XLIV (1971).

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 luglio 1971.