

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA TERESA MOLFINO

Su alcuni invarianti numerici associati a sistemi di equazioni lineari in un modulo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 46 (1971), p. 215-222

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__215_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

dove i coefficienti λ_{ij} appartengono a Λ e le incognite x_j ad X , indicata con $L = \{\lambda_{ij}\}$ la matrice dei coefficienti, l'insieme delle soluzioni del sistema si può esprimere come nucleo del morfismo di Λ -moduli:

$$\Phi : X^p \rightarrow X^q \text{ dove } \Phi = L \otimes X.$$

Infatti seguendo [1] la matrice dei coefficienti L può essere interpretata come morfismo tra Λ -moduli liberi di rango p e q .

$$L : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^q$$

ed una risoluzione libera di $\text{Coker } L$ è:

$$0 \rightarrow \text{Ker } L \rightarrow \Lambda^p \xrightarrow{L} \Lambda^q \rightarrow \text{Coker } L \rightarrow 0.$$

Tensorializzando con X si ottiene il complesso

$$0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow X^p \xrightarrow{\Phi} X^q \rightarrow (\text{Coker } L) \otimes X \rightarrow 0$$

a cui è associata la sequenza esatta di Λ -moduli:

$$(2) \quad 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Tor}(\text{Coker } L, X) \rightarrow 0$$

che, essendo $(\text{Ker } L) \otimes X$ divisibile, risulta essere spezzante.

Essendo Λ principale $\text{Ker } L$ è isomorfo a Λ^k dove $k = p - \text{rang } L$ ($\text{rang } L$ è la caratteristica della matrice L); il numero k si dice rango del sistema $\Phi x = 0$, $x \in X^p$.

2. Se Λ è un dominio d'integrità per ogni Λ -modulo X indichiamo con μX il massimo sottomodulo divisibile di X . Questo si identifica con l'unione di tutti i sottomoduli divisibili. Poichè un morfismo di Λ -moduli $f : X \rightarrow Y$ subordina un morfismo $\mu f : \mu X \rightarrow \mu Y$, ne risulta il carattere functoriale di μ . Anzi il funtore μ è un funtore additivo della categoria dei Λ -moduli in sè.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 1. *Se Λ è un anello principale ed X un Λ -modulo divisibile il morfismo $j : (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \text{Ker } \Phi$, nella sequenza spezzante (2), ha come immagine $\mu \text{Ker } \Phi$.*

DIM. Essendo $(\text{Ker } L) \otimes X$ un modulo divisibile, la sua immagine mediante j è ovviamente divisibile pertanto contenuta in $\mu \text{Ker } \Phi$.

Esiste quindi il monomorfismo $\iota : (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \mu \text{Ker } \Phi$ che rende commutativo il primo quadrato del diagramma a righe esatte:

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X & \xrightarrow{j} & \text{Ker } \Phi & \rightarrow & \text{Tor}(\text{Coker } L, X) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \epsilon \\ 0 \rightarrow \mu \text{Ker } \Phi & \xrightarrow{\iota} & \text{Ker } \Phi & \rightarrow & \text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Per provare che ι è isomorfismo basta verificare che $\mu \text{Tor}(\text{Coker } L, X) = 0$. Infatti poichè Λ è un anello principale e $\text{Coker } L$ è un modulo finitamente generato, la sua torsione $t(\text{Coker } L)$ si spezza nella somma diretta di un numero finito di moduli ciclici: $t(\text{Coker } L) = \bigoplus_{i \in I} M_i$ dove gli M_i ammettono una risoluzione del tipo:

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{\lambda_i} \Lambda \rightarrow M_i \rightarrow 0 \quad \lambda_i \neq 0 \quad \lambda_i \in \Lambda.$$

Tensorializzando con X si ha la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \text{Tor}(M_i, X) \rightarrow X \xrightarrow{\lambda_i \otimes X} X \rightarrow M_i \otimes X \rightarrow 0$$

da cui:

$$\text{Tor}(M_i, X) = \text{Ker}(X \xrightarrow{\lambda_i \otimes X} X) \text{ per ogni } i \in I$$

è quindi ovvio che per ogni $i \in I$ si ha $\mu \text{Tor}(M_i, X) = 0$.

Per la distributività dei funtori μ e $\text{Tor}(-, X)$ rispetto alla somma diretta, si ha $\mu \text{Tor}(\text{Coker } L, X) = \mu \text{Tor}(t \text{Coker } L, X) = 0$.

Resta quindi definito l'isomorfismo ϵ dalla commutatività del diagramma (3).

Noto $\text{Ker } \Phi$ possiamo considerare la sequenza esatta:

$$(2') \quad 0 \rightarrow \mu \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Ker } \Phi \xrightarrow{\tau} \text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi \rightarrow 0$$

che, essendo $\mu \text{Ker } \Phi$ divisibile, è spezzante; possiamo quindi scegliere un morfismo ν inverso a destra di τ :

$$\nu : \text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Ker } \Phi.$$

Lo spazio delle soluzioni $\text{Ker } \Phi$ è allora somma diretta dei suoi sotto-moduli $\mu \text{Ker } \Phi$ e $\text{Im } \nu$.

La sequenza spezzante (2') coincide a meno di isomorfismi con la (2), però non dipende più dalla matrice L che caratterizza il sistema, ma solo dallo spazio delle soluzioni $\text{Ker } \Phi$.

Nella nota citata al n. 1 s'introduce la nozione di ordine globale di un sistema del tipo (1), nell'ipotesi che Λ sia una K -algebra (principale), come $\dim_K \text{Tor}(\text{Coker } L, X)$.

Possiamo quindi enunciare il seguente:

TEOREMA 2. *L'ordine globale è invariante per sistemi equivalenti in quanto dipende unicamente dallo spazio delle soluzioni.*

3. Osserviamo che $\text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi$ è un modulo di torsione; infatti tale è $\text{Tor}(\text{Coker } L, X)$ (Cfr. [1], p. 310). Esso è perciò decomponibile nella somma diretta delle sue componenti \mathfrak{p} -primarie: $X = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}} X_{\mathfrak{p}}$, \mathfrak{B} è l'insieme degli ideali primi di Λ .

Converrà introdurre la seguente:

DEFINIZIONE 1. *Diciamo ordine ridotto del sistema (1) il numero (eventualmente infinito) delle componenti primarie non nulle di $\text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi$.*

Vale in proposito il:

TEOREMA 3. *Per ogni sistema (1) l'ordine globale è maggiore od uguale dell'ordine ridotto; ed è uguale se e solo se*

$$\dim_K (\text{Ker } \Phi / \mu \text{Ker } \Phi)_{\mathfrak{p}} \leq 1$$

per ogni $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$.

Ma se $\lambda = \lambda_0 \prod \pi_j^{n_j}$ con π_j elementi primi e λ_0 divisore dell'unità in Λ

$$\text{Ker}(X \xrightarrow{\lambda} X) = \bigoplus_j \text{Ker}(X \xrightarrow{\pi_j^{n_j}} X)$$

(cfr. [2] § 2, prop. 1) e quindi la tesi.

4. In questo numero dimostriamo che il rango (cfr. n. 1) è invariante per sistemi equivalenti. Al fine di provare ciò premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. Sia $X \neq 0$ e $\sigma: \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'}$ un morfismo di Λ -moduli. Se $\sigma \otimes X: X^k \rightarrow X^{k'}$ è un isomorfismo di Λ -moduli allora $\text{Coker } \sigma$ è un modulo di torsione.

DIM. Tensorializzando con X la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \text{Ker } \sigma \rightarrow \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'} \rightarrow \text{Coker } \sigma \rightarrow 0$$

si ha la sequenza pure esatta:

$$0 \rightarrow \text{Tor}(\text{Coker } \sigma, X) \rightarrow \text{Ker } \sigma \otimes X \rightarrow X^k \rightarrow X^{k'} \rightarrow \text{Coker } \sigma \otimes X \rightarrow 0$$

in cui $\text{Coker } \sigma \otimes X = 0$.

Posto $\text{Coker } \sigma = \bigoplus_i M_i$ (somma diretta finita), gli M_i essendo dei moduli ciclici, risulta $\text{Coker } \sigma \otimes X = \bigoplus_i M_i \otimes X = 0$ da cui segue che gli M_i devono essere moduli di torsione e tale dovrà essere anche $\text{Coker } \sigma$.

LEMMA 2. Sia T un Λ -modulo di torsione e

$$(4) \quad \Lambda^k \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{k'} \rightarrow \Lambda^n \oplus T \rightarrow 0$$

una sequenza esatta di Λ -moduli.

Se $k < k'$ allora $n > 0$.

DIM. Sia K il corpo delle frazioni su Λ . Tensorializzando con K la sequenza (4) si ha la sequenza esatta di spazi vettoriali:

$$0 \rightarrow (\text{Ker } \sigma) \otimes K \rightarrow K^k \rightarrow K^{k'} \rightarrow K^n \rightarrow 0$$

da cui:

$$\dim_K(\text{Ker } \sigma) \otimes K + k' = k + n$$

essendo $k' \leq k + n$ segue la tesi.

LEMMA 3. Sia $X \neq 0$ e $\sigma : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'}$ un morfismo di Λ -moduli, se $\sigma \otimes X : X^k \rightarrow X^{k'}$ è un isomorfismo di Λ -moduli allora $k = k'$.

DIM. Ovviamente si ha $(\text{Ker } \sigma) \otimes X = 0$; essendo $\text{Ker } \sigma$ isomorfo a Λ^n si ha, tensorializzando con X , $(\text{Ker } \sigma) \otimes X = X^n = 0$ da cui $n = 0$. L'asserto è allora immediata conseguenza dei lemmi precedenti.

TEOREMA 5. *Il rango è invariante per sistemi equivalenti.*

DIM. Siano L ed L' due matrici a termini in Λ del tipo (p, q) e (p, q') rispettivamente e siano $\Phi = L \otimes X : X^p \rightarrow X^q$ e $\Phi' = L' \otimes X : X^p \rightarrow X^{q'}$ i morfismi associati.

Poichè $\text{Ker } L$ è sottomodulo di Λ^p esiste un monomorfismo $\vartheta : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^p$ che fornisce una rappresentazione di $\text{Ker } L$. Poichè $\text{Ker } L$ è componente diretta in Λ^p esisterà un morfismo $\eta : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^k$ inverso a destra di ϑ ; analogamente sia $\vartheta' : \Lambda^{k'} \rightarrow \Lambda^p$ una rappresentazione di $\text{Ker } L'$ ed η' un inverso a destra di ϑ' .

Posto $\sigma = \eta' \circ \vartheta : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k'}$ si ha che $\sigma \otimes X : X^k \rightarrow X^{k'}$ è isomorfismo; infatti nel diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X^k & \xrightarrow{\vartheta \otimes X} & X^p & \xrightarrow{\eta' \otimes X} & X^{k'} \\
 \searrow \vartheta & & \uparrow & & \nearrow \eta \\
 & & \mu \text{ Ker } \Phi & &
 \end{array}$$

in cui la freccia verticale è l'inclusione, i morfismi $\overline{\vartheta}$ ed $\overline{\eta}$ sono isomorfismi.

Allora, atteso che k e k' sono il rango dei sistemi di equazioni aventi rispettivamente L ed L' come matrici associate, per il lemma 3 si ha $k=k'$ da cui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DARBO, G.: *Sulla rappresentazione parametrica della soluzione generale di un sistema di equazioni lineare in un modulo sopra un anello principale*, Rend. Sem. Mat. Un. Padova, 1967, pp. 307-311.
- [2] BOURBAKI, N.: *Algebra Cap. VII (Moduli su anelli principali)*.
- [3] BOERO, P.: *Metodi omologici elementari ...*, Rend. del Sem. Mat. Un. Padova, 1967, pp. 289-306.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 maggio 1971.