RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Sulla interpolazione multilineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 19-47
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__19_0>

SULLA INTERPOLAZIONE MULTILINEARE

ANGELO FAVINI *)

Premessa.

Uno degli scopi della presente ricerca è quello di stabilire risultati di interpolazione per operatori multilineari, definiti sul prodotto di certi spazi vettoriali topologici.

D'altra parte, è noto che, se E, F, G sono spazi di Banach, lo spazio degli operatori bilineari continui da $E \times F$ a G è isometricamente isomorfo allo spazio degli operatori lineari continui da $E \otimes_\pi F$ a G, dove $E \otimes_\pi F$ è il prodotto tensoriale di E e F, munito della topologia π.

Ciò ha motivato lo studio di diverse topologie tensoriali in relazione alla proprietà di interpolazione.

Poichè esse ricorrono spesso nel corso della trattazione, abbiamo creduto opportuno ricordare alcune definizioni.

1) Se $(E_0, \| \ \|_{E_0})$, $(E_1, \| \ \|_{E_1})$ sono due spazi di Banach, E_1 si dice *immerso* (*immerso densamente*) in E_0 se:

$$x \in E_1 \Rightarrow x \in E_0, \qquad \exists C > 0, \qquad \| x \|_{E_0} \leq C \| x \|_{E_1}, \qquad \forall x \in E_1$$

(e E_1 è denso in E_0).

Nel caso che $C \equiv 1$, si parla di immersione *normale* (cfr. [9], pp. 88-89).

2) Siano $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, due famiglie di spazi di Banach, con α, $\beta \in [0, 1]$, $\alpha < \beta \Rightarrow E_\beta$ è immerso densamente in E_α;

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università di Bologna.

$\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha < \beta \Rightarrow F_\beta$ è immerso in F_α.

Si dice che $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, ha la *proprietà di interpolazione* (rispettivamente, di interpolazione *forte*) relativa a $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, se per ogni operatore lineare $T: E_1 \to F_1$, continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1, accade che T è continuo anche da E_α a F_α, $\forall \alpha \in [0, 1]$, cioè:

$$\text{(i)} \qquad T \in L(E_0, F_0) \cap L(E_1, F_1) \Rightarrow T \in L(E_\alpha, F_\alpha);$$

(rispettivamente, se ogni sottofamiglia $\{E_\alpha\}$ $(\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta_0)$, di $\{E_\alpha\}$ ha la proprietà di interpolazione ralativa alla corrispondente sottofamiglia $\{F_\alpha\}$ $(\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta_0)$, di $\{F_\alpha\}$).

Si parla di interpolazione *normale* se vale (i) e, inoltre,

$$\| T \|_{E_\alpha \to F_\alpha} \leq \| T \|_{E_0 \to F_0}^{1-\alpha} \| T \|_{E_1 \to F_1}^{\alpha};$$

infine, la proprietà di interpolazione si dice *stretta*, se è forte e:

$$\| T \|_{E_\beta \to F_\beta} \leq [\| T \|_{E_\alpha \to F_\alpha}]^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} [\| T \|_{E_\gamma \to F_\gamma}]^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1.$$

3) Una famiglia $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, di spazi di Banach forma una *scala normale continua* su $[0, 1]$ se:

1) $\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha < \beta \Rightarrow E_\beta$ è immerso normalmente in E_α;

2) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1], \alpha < \beta < \gamma, x \in E_1 \Rightarrow \| x \|_{E_\beta} \leq \| x \|_{E_\alpha}^{\mu} \| x \|_{E_\gamma}^{\nu}$, $\mu = \dfrac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$, $\nu = \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$;

3) $x \in E_1 \Rightarrow \| x \|_{E_\alpha} \xrightarrow[\alpha \to 1]{} \| x \|_{E_1}$, (cfr. [9], p. 98).

Una tale famiglia si dice *regolare* se per $0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1$ e $f \in E'_\alpha$,

$$\| f \|_{E'_\beta} \leq \| f \|_{E'_\alpha}^{\mu} \| f \|_{E'_\gamma}^{\nu}.$$

(cfr. [9], p. 107).

4) Uno spazio *limite proiettivo stretto* (spazio LPS) E, è uno spazio localmente convesso, separato, esprimibile come $E = \bigcap_I E_i$ (I intervallo

della retta reale), munito della topologia proiettiva determinata dagli spazi di Banach E_i e tale che:

1) E è denso in ogni E_i ;

2) $i<j \Rightarrow E_j$ è immerso normalmente in E_i, (cfr. [6], p. 40).

Uno spazio *limite induttivo stretto* (spazio LIS) F, è uno spazio localmente convesso e separato $F=\bigcup_n F_n$, dove F è munito della topologia induttiva definita dalla successione di spazi di Banach F_n soddisfacenti la condizione che F_i è immerso in F_j, per $i<j$, e la topologia indotta su F_i da quella di F_j è meno fine di quella iniziale su F_i.

1. Operatori multilineari e spazi di interpolazione.

Il punto di partenza della nostra ricerca è costituito dal seguente risultato (cfr. [15], p. 354):

PROPOSIZIONE 1.1. *Siano E, F, G rispettivamente uno spazio di Fréchet, uno spazio vettoriale topologico metrizzabile, uno spazio localmente convesso.*

Se B è un operatore bilineare separatamente continuo da $E \times F$ a G, allora B è continuo da $E \times F$ a G.

Come prima conseguenza della Proposizione 1.1, stabiliamo il seguente

TEOREMA 1.1. *Siano $\{E_\alpha^{(1)}\}$, $\{E_\alpha^{(2)}\}$, ..., $\{E_\alpha^{(n)}\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$, $n\geq 2$, scale normali continue di spazi di Banach, aventi la proprietà di interpolazione (rispettivamente, di interpolazione forte) rispetto alla famiglia di spazi di Banach $\{F_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$.*

Se B è un operatore n-lineare continuo da $E_0^{(1)} \times E_0^{(2)} \times \ldots \times E_0^{(n)}$ a F_0 e da $E_1^{(1)} \times E_1^{(2)} \times \ldots \times E_1^{(n)}$ a F_1, allora B è n-lineare continuo da $E_\alpha^{(1)} \times E_\alpha^{(2)} \times \ldots \times E_\alpha^{(n)}$ a F_α, $\forall\alpha\in[0, 1]$;

(rispettivamente, se B è un operatore n-lineare continuo da $E_\alpha^{(1)} \times E_\alpha^{(2)} \times \ldots \times E_\alpha^{(n)}$ a F_α e da $E_\gamma^{(1)} \times E_\gamma^{(2)} \times \ldots \times E_\gamma^{(n)}$ a F_γ, allora B è n-lineare continuo da $E_\beta^{(1)} \times E_\beta^{(2)} \times \ldots \times E_\beta^{(n)}$ a F_β, $(0\leq\alpha<\beta<\gamma\leq 1)$).

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'affermazione per $n=2$. Poichè B è continuo da $E_i^{(1)} \times E_i^{(2)}$ a F_i $(i=0, 1)$, B è separatamente continuo, cioè:

$\forall x_1 \in E_1^{(1)}$, $T_{x_1} : y \to B(x_1, y)$, è un operatore lineare e continuo da $E_i^{(2)}$ a F_i, $(i=0, 1)$;

$\forall y_1 \in E_1^{(2)}$, $S_{y_1} : x \to B(x, y_1)$, è un operatore lineare e continuo da $E_i^{(1)}$ a F_i, $(i=0, 1)$.

Dalla ipotesi sulla proprietà di interpolazione segue:

$\forall x_1 \in E_1^{(1)}$, T_{x_1} è lineare e continuo da $E_\alpha^{(2)}$ a F_α, e, $\forall y_1 \in E_1^{(2)}$, S_{y_1} è lineare e continuo da $E_\alpha^{(1)}$ a F_α, $\alpha \in [0, 1]$.

D'altra parte, se $x_1 \in E_1^{(1)}$, $y_1 \in E_1^{(2)}$, $B(x_1, y_1) = T_{x_1}(y_1) = S_{y_1}(x_1)$. Quindi, in base alla Proposizione 1.1, B è un operatore bilineare continuo da $E_\alpha^{(1)} \times E_\alpha^{(2)}$ a F_α, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Ora, sia $n=3$.

Sfruttiamo i seguenti isomorfismi isometrici canonici (cfr. [2], p. 120):

Denotiamo con $L_3(E_1, E_2, E_3; F)$ lo spazio degli operatori 3-lineari continui da $E_1 \times E_2 \times E_3$ a F (E_1, E_2, E_3, F spazi di Banach), munito della norma abituale (che ne fà uno spazio di Banach). Allora:

$$\text{(i)} \qquad L(E_1, E_2, E_3; F) \cong L(E_1, E_2; L(E_3, F)) \cong L(E_1; L(E_2, E_3; F)).$$

Sia B un elemento di $L(E_0^{(1)}, E_0^{(2)}, E_0^{(3)}; F_0) \cap L(E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, E_1^{(3)}; F_1)$.

Allora, a B corrisponde biunivocamente un operatore U_B appartenente a $L(E_0^{(1)}, E_0^{(2)}; L(E_0^{(3)}, F_0)) \cap L(E_1^{(1)}, E_1^{(2)}; L(E_1^{(3)}, F_1))$.

Ciò implica che:

$\forall x \in E_1^{(1)}$, l'operatore $U_{B,x}$ definito da: $U_{B,x}(y) = U_B(x, y)$, è lineare e continuo da $E_0^{(2)}$ a $L(E_0^{(3)}, F_0)$;

$\forall y \in E_1^{(2)}$, l'operatore $V_{B,y}$ definito da: $V_{B,y}(x) = U_B(x, y)$, è lineare e continuo da $E_0^{(1)}$ a $L(E_0^{(3)}, F_0)$.

Ora, per ogni $x \in E_1^{(1)}$, a $U_{B,x}$ corrisponde biunivocamente un operatore bilineare continuo $\tilde{U}_{B,x}$ da $E_0^{(2)} \times E_0^{(3)}$ a F_0.

Analogamente, per ogni $y \in E_2^{(1)}$, a $V_{B,y}$ corrisponde biunivocamente un operatore bilineare continuo $\tilde{V}_{B,y}$ da $E_0^{(1)} \times E_0^{(3)}$ a F_0.

Ma, per ipotesi, lo stesso discorso può essere ripetuto considerando U_B appartenente allo spazio $L(E_1^{(1)}, E_1^{(2)}; L(E_1^{(3)}, F_1))$. Quindi, valgono le seguenti implicazioni:

$\forall x \in E_1^{(1)}$, $\tilde{U}_{B,x}$ è un operatore bilineare continuo da $E_i^{(2)} \times E_i^{(3)}$ a F_i $(i=0,\ 1)$;

$\forall y \in E_1^{(2)}$, $\tilde{V}_{B,y}$ è un operatore bilineare continuo da $E_i^{(1)} \times E_i^{(3)}$ a F_i $(i=0,\ 1)$.

Applicando il risultato ottenuto per $n=2$, allora:

$\forall x \in E_1^{(1)}$, $\tilde{U}_{B,x}$ è bilineare continuo da $E_\alpha^{(2)} \times E_\alpha^{(3)}$ a F_α, $\alpha \in [0,\ 1]$;

$\forall y \in E_\alpha^{(2)}$, $\tilde{V}_{B,y}$ è bilineare continuo da $E_\alpha^{(1)} \times E_\alpha^{(3)}$ a F_α, $\alpha \in [0,\ 1]$.

Cioè,

$\forall x \in E_1^{(1)}$, $U_{B,x}$ è lineare e continuo da $E_\alpha^{(2)}$ a $L(E_\alpha^{(3)}, F_\alpha)$ e $\forall y \in E_1^{(2)}$, $V_{B,y}$ è lineare continuo da $E_\alpha^{(1)}$ a $L(E_\alpha^{(3)}, F_\alpha)$, $\alpha \in [0,\ 1]$.

D'altra parte, $U_B(x,\ y)=U_{B,x}(y)=V_{B,y}(x)$. Quindi U_B è bilineare continuo da $E_\alpha^{(1)} \times E_\alpha^{(2)}$ a $L(E_\alpha^{(3)}, F_\alpha)$, come conseguenza della Proposizione 1.1.

Così, per la identificazione (i), B risulta 3-lineare continuo da $E_\alpha^{(1)} \times E_\alpha^{(2)} \times E_1^{(3)}$ a F_α, $\alpha \in [0,\ 1]$.

In modo del tutto analogo, cioè, sfruttando gli isomorfismi:

$$L(E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n;\ F) \cong L(E_1;\ L(E_2,\ \ldots,\ L(E_n,\ F))\ \ldots),$$

validi per ogni naturale n, (cfr. [2], p. 105), si ottiene il risultato per $n=4,\ 5,\ \ldots$

Finalmente, anche l'affermazione relativa alla interpolazione forte è provata per mezzo del medesimo ragionamento.

APPLICAZIONE. *Sia* $\{H_\alpha\}(0 \leq \alpha \leq 1)$, *una scala normale continua di spazi di Banach, avente la proprietà di interpolazione relativa a se stessa.*

Se H_0 *e* H_1 *sono due algebre di Banach, allora su* H_α *si può definire una norma* $|||\ |||_\alpha$, *equivalente alla norma originale* $\|\ \|_{H_\alpha}$, *tale che* $(H_\alpha,\ |||\ |||_\alpha)$ *è anch'essa un'algebra di Banach,* $\forall \alpha \in]0,\ 1[$.

In altre parole, interpolando fra algebre di Banach, si ottengono algebre di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, l'operatore Φ definito da

$$\Phi(x,\ y)=xy,$$

è un operatore bilineare continuo da $H_i \times H_i$ a H_i, $(i=0,\ 1)$.

Il Teorema 1.1 permette allora di dedurre la esistenza di una costante C_α, tale che:

$$\| xy \|_{H_\alpha} \leq C_\alpha \| x \|_{H_\alpha} \| y \|_{H_\alpha}.$$

Infatti, che esista una costante C per cui $\| B(x), y) \|_G \leq \leq C \| x \|_E \| y \|_F$, $(x, y) \in E \times F$, è condizione necessaria e sufficiente perchè un operatore bilineare B sia continuo da $E \times F$ a G, E, F, G spazi di Banach.

Ma allora, su H_α può essere definita una norma equivalente alla data, che rende H_α un'algebra di Banach, (cfr. [3], pp. 274-275).

OSSERVAZIONE. Dalla dimostrazione, risulta chiaro che le prove precedenti restano valide anche nel caso che le famiglie di spazi considerate non siano scale normali continue di spazi di Banach, ma abbiano certe proprietà di interpolazione; (ciò implica, fra l'altro, che gli spazi sono legati dalla relazione di immersione densa).

Infine, notiamo che la Proposizione 1.1 vale anche per spazi più complessi degli spazi di Banach.

In particolare, possiamo stabilire i due seguenti teoremi:

TEOREMA 1.2. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{G_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *tre famiglie di spazi LPS*:

$$E_\alpha = \bigcap_I E_{\alpha, i}, \qquad F_\alpha = \bigcap_J F_{\alpha, j}, \qquad G_\alpha = \bigcap_K G_{\alpha, k}.$$

Gli spazi E_α, F_α, $\forall \alpha \in [0, 1]$, *siano metrizzabili (è sufficiente supporre per esempio, che gli insiemi di indici* I, J *coincidano con* $\boldsymbol{N}$) *e*:

1) $\forall i \in I$, *la famiglia* $\{E_{\alpha, i}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *abbia la proprietà di interpolazione rispetto a ciascuna delle famiglie* $\{G_{\alpha, k}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$;

2) $\forall j \in J$, *la famiglia* $\{F_{\alpha, j}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *abbia la proprietà di interpolazione relativa a ciascuna delle famiglie* $\{G_{\alpha, k}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Allora, se B *è un operatore bilineare continuo da* $E_0 \times F_0$ *a* G_0 *e da* $E_1 \times F_1$ *a* G_1, B *è un operatore bilineare continuo anche da* $E_\alpha \times F_\alpha$ *a* G_α, $\alpha \in [0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $x_0 \in E_1$. Dalle ipotesi segue che l'operatore T_{x_0}, definito da:

$$T_{x_0}(y) = B(x_0, y),$$

è lineare e continuo da F_0 a G_0 e da F_1 a G_1. Cioè, (cfr. [6], p. 41),

$\forall k\in K \exists j\in J,\ T_{x_0}: F_{0,j} \to G_{0,k}$ è lineare e continuo;

$\forall k\in K \exists l\in J,\ T_{x_0}: F_{1,l} \to G_{1,k}$ è lineare e continuo.

Supponiamo, per esempio, $j<l$.

Allora T_{x_0} è lineare e continuo da $F_{0,l}$ a $G_{0,k}$. Così, in virtù delle assunzioni, T_{x_0} si prolunga come operatore continuo da $F_{\alpha,l}$ *a* $G_{\alpha,k}$, $\alpha\in[0, 1]$.

Ma ciò equivale a dire T_{x_0} è continuo da F_α a G_α, $0\leq\alpha\leq 1$.

Ragionando in maniera analoga, si deduce che l'operatore

$$S_{y_0}: x \to B(x, y_0),\ y_0\in F_1,\ \text{fissato},$$

è lineare e continuo da E_α a G_α, $\forall\alpha\in[0, 1]$.

Quindi, B è continuo da $E_\alpha \times F_\alpha$ a G_α, in base alla Proposizione 1.1 e al fatto che:

$$(x, y)\in E_1 \times F_1 \Rightarrow B(x, y)=T_x(y)=S_y(x).$$

Teorema 1.3. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{G_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$, *tre famiglie di spazi localmente convessi,* E_α *ed* F_α *spazi* LPS, *cioè*:

$E_\alpha=\bigcap_I E_{\alpha,i}$, $F_\alpha=\bigcap_J F_{\alpha,j}$, *come nel Teorema* 1.2, *ma* G_α *sia uno spazio* LIS, $G_\alpha=\bigcup_n G_{\alpha,n}$. *Valgano le ipotesi* 1) *e* 2) *del Teorema precedente.*

Allora, se B *è un operatore bilineare continuo da* $E_0\times F_0$ *a* G_0 *e da* $E_1\times F_1$ *a* G_1, *B è continuo anche da* $E_\alpha\times F_\alpha$ a G_α, $\forall\alpha\in[0, 1]$.

Dimostrazione. Fissiamo $x_0\in E_1$. L'operatore T_{x_0}, definito da:

$$T_{x_0}(y)=B(x_0, y),$$

è lineare e continuo da F_0 a G_0 e da F_1 a G_1. Quindi, in base alla caratterizzazione di tali operatori, (cfr. [5]), si ha che:

$\exists i\in I,\ j\in J,\ T_{x_0}: F_{0,i} \to G_{0,j}$ è lineare e continuo;

$\exists k\in I,\ l\in J,\ T_{x_0}: F_{1,k} \to G_{1,l}$ è lineare e continuo.

Poniamo $m=\max(i, k)$, $n=\max(j, l)$. Allora T_{x_0} risulta lineare e continuo da $F_{0,m}$ a $G_{0,n}$ e da $F_{1,m}$ *a* $G_{1,n}$.

In forza della assunzione2), T_{x_0} è lineare e continuo da $F_{\alpha,m}$ a $G_{\alpha,n}$, $\alpha\in[0, 1]$. Quindi, lo è anche da F_α a G_α (cfr. [5]).

Questo ragionamento si ripete per dimostrare che l'operatore S_{y_0}, definito da: $S_{y_0}(x)=B(x, y_0)$, è lineare e continuo da E_α a G_α, $\alpha\in[0, 1]$.

A questo punto, la prova è terminata, essendo sufficiente applicare la Proposizione 1.1.

La proposizione 1.1 non consente di stabilire affermazioni analoghe alle precedenti nel caso che nessuno degli spazi su cui l'operatore bilineare B è definito, sia metrizzabile. Questo si verifica quando, per esempio, essi sono spazi limiti induttivi.

Si può, però, in certi casi, rimediare a simili inconvenienti. Infatti, ricordiamo la seguente proposizione (cfr. [15], p. 421):

PROPOSIZIONE 1.2. Siano F, G due spazi localmente convessi, duali forti di spazi di Fréchet riflessivi, ed E sia o uno spazio normato o il duale forte di uno spazio di Fréchet riflessivo.

Allora ogni operatore bilineare separatamente continuo da $E\times F$ a G è continuo.

TEOREMA 1.4. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{G_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq1)$, *tre famiglie di spazi* LIS *ed* E_α, F_α, G_α *risultino spazi duali forti di spazi* LPS *riflessivi e di Fréchet,* $\forall\alpha\in]0, 1[$.

Le famiglie $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq1)$, *abbiano la proprietà di interpolazione relativa alla famiglia* $\{G_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq1)$.

Se B *è un operatore bilineare continuo da* $E_0\times F_0$ *a* G_0 *e da* $E_1\times F_1$ *a* G_1, *allora* B *è continuo anche da* $E_\alpha\times F_\alpha$ *a* G_α, $\forall\alpha\in[0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $f\in E_1$. L'operatore T_f, definito da: $T_f(g)=B(f, g)$, è, per ipotesi, lineare e continuo da F_0 a G_0 e da F_1 a G_1. Quindi, si può concludere che T_f è lineare e continuo da F_α a G_α, $\forall\alpha\in[0, 1]$. Analogamente, l'operatore S_g, $g\in F_1$, tale che:

$$S_g(f)=B(f, g),$$

è lineare e continuo da E_i a G_i, $i=0, 1$, e quindi, anche da E_α e G_α, per $\alpha\in[0, 1]$. Allora, in virtù della Proposizione 1.2, B è un operatore bilineare continuo da $E_\alpha\times F_\alpha$ a G_α, $\alpha\in[0, 1]$.

OSSERVAZIONE 1. Condizioni sufficienti ad assicurare che le famiglie $\{E_\alpha\}$ e $\{F_\alpha\}$ abbiano la proprietà di interpolazione relativa alla famiglia $\{G_\alpha\}$, sono quelle enunciate a proposito degli spazi LPS nel Teorema 1.2.

OSSERVAZIONE 2. Le ipotesi del Teorema 1.4 sono soddisfatte nel caso in cui E_α, F_α, G_α sono limiti induttivi stretti di spazi di Hilbert:

$$E_\alpha = \bigcup_n E_{\alpha,n}\,, \quad F_\alpha = \bigcup_n F_{\alpha,n}\,, \quad G_\alpha = \bigcup_n G_{\alpha,n}\,,$$

e la famiglia $\{G'_{\alpha,p}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, ha la proprietà di interpolazione relativa alle famiglie $\{E'_{\alpha,m}\}$ e $\{F'_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, $\forall m, n, p \in \boldsymbol{N}$.

Infatti, (cfr. [7], p. 363), il duale forte di uno spazio LIS $E = \bigcup_n E_n$, E_n spazio di Banach riflessivo, coincide (algebricamente e topologicamente) con $E' = \bigcap_n E'_n$.

Inoltre, se $\{G'_{\alpha,p}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, ha la proprietà di interpolazione rispetto a $\{E'_{\alpha,m}\}$ e a $\{F'_{\alpha,n}\}$, allora $\{E_{\alpha,m}\}$ e $\{F_{\alpha,n}\}$ hanno la proprietà di interpolazione relativa a $\{G_{\alpha,p}\}$, (cfr. [4], p. 381). Ciò implica (cfr. l'Osservazione 1), che $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, hanno la proprietà di interpolazione relativa a $\{G_\alpha\}$ $(\leq \alpha \leq 1)$.

Finalmente, poichè $E'_{\alpha,m}$, $F'_{\alpha,n}$, $G'_{\alpha,p}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ e $\forall m, n, p \in \boldsymbol{N}$, sono spazi di Hilbert, si ha (cfr. [8], p. 296):

$$\Big(\bigcap_n E'_{\alpha,n}\Big)' = \bigcup_n E_{\alpha,n}\,, \quad \Big(\bigcap_n F'_{\alpha,n}\Big)' = \bigcup_n F_{\alpha,n}\,, \quad \Big(\bigcap_n G'_{\alpha,n}\Big)' = \bigcup_n G_{\alpha,n}\,.$$

2. Prodotti tensoriali.

Ricordiamo la definizione di prodotto tensoriale di due spazi vettoriali, (cfr. [11], pp. 82-83).

Siano E, F due spazi vettoriali. Denotiamo con $E \,\square\, F$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le combinazioni lineari formali

$$\Sigma a_{x,y}(x, y), \; x \in E, \; y \in F,$$

dove solo un numero finito dei coefficienti complessi $a_{x,y}$ sono diversi da 0 e le operazioni di addizione e di moltiplicazione scalare sono definite nel solito modo.

Sia N il sottospazio di $E \square F$ generato da tutti i vettori del tipo

$$(x,\ y+z)-(x,\ y)-(x,\ z),\ (x+w,\ y)-(x,\ y)-(w,\ y),$$

$$(\lambda x,\ y)-\lambda(x,\ y),\ (x,\ \lambda y)-\lambda(x,\ y).$$

Il prodotto tensoriale (algebrico) $E \otimes F$ è allora lo spazio quoziente $E \otimes F = E \square F/N$.

Se φ è la restrizione dell'applicazione canonica $\psi : E \square F \rightarrow E \otimes F$ allo spazio $E \times F$, si pone $\varphi(x,\ y) = x \otimes y$.

Si può definire anche il prodotto tensoriale di due operatori. Precisamente, (cfr. [15], p. 406):

Se $E,\ F,\ E_1,\ F_1$ sono quattro spazi vettoriali sul campo complesso e $U : E \rightarrow E_1$, $V : F \rightarrow F_1$, sono operatori lineari, allora c'è un solo operatore lineare da $E \otimes F$ a $E_1 \otimes F_1$, detto il prodotto tensoriale di U e V, e denotato con $U \otimes V$, tale che:

$$(U \otimes V)(x \otimes y) = Ux \otimes Vy,\quad x \in E,\ y \in F.$$

Noi considereremo tre topologie tensoriali, cioè, il prodotto tensoriale hilbertiano, il prodotto tensoriale proiettivo e il prodotto tensoriale ε (o di convergenza bi-equicontinua).

I. Il prodotto tensoriale hilbertiano.

Ricordiamo la seguente:

DEFINIZIONE 2.1. Siano H e K due spazi di Hilbert, con prodotto interno $\langle\,,\rangle_i$ $(i=0,\ 1)$, rispettivamente.

Allora lo spazio vettoriale $H \otimes K$ può essere strutturato come uno spazio pre-hilbertiano attraverso il seguente prodotto scalare:

(i) $\langle u_1 \otimes v_1,\ u_2 \otimes v_2 \rangle = \langle u_1,\ u_2 \rangle_1 \langle v_1,\ v_2 \rangle_2,\ u_1,\ u_2 \in H,\ v_1,\ v_2 \in K.$

Lo spazio di Hilbert ottenuto completando tale prodotto tensoriale verrà denotato con $H \widehat{\otimes}_\tau K$.

Per la definizione della topologia τ si può vedere [11], p. 83 e [12] p. 197 e ss.

TEOREMA 2.1. *Siano* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$, *due scale normali continue di spazi di Hilbert. Allora anche la famiglia* $\{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$ *è una scala normale continua di spazi di Hilbert.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (i) di Definizione 2.1 segue che:

$$u\in H_\alpha\,,\ v\in K_\alpha \Rightarrow \| u\otimes v\|_{H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha}=\langle u\otimes v,\ u\otimes v\rangle^{1/2}_{H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha}=$$
$$=\langle u,\ u\rangle^{1/2}_{H_\alpha}\langle v,\ v\rangle^{1/2}_{K_\alpha}=\| u\|_{H_\alpha}\| v\|_{K_\alpha}\,,\ \alpha\in[0,\ 1].$$

Ciò implica che:

$$(1)\qquad \alpha,\ \beta\in[0,\ 1],\ \alpha<\beta\Rightarrow \| u\otimes v\|_{H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha}=\| u\|_{H_\alpha}\| v\|_{K_\alpha}\leq$$
$$\leq\| u\|_{H_\beta}\| v\|_{K_\beta}=\| u\otimes v\|_{H_\beta\otimes_\tau K_\beta}\,,\ \forall u\in H_\beta\,,\ v\in K_\beta\,;$$

$$(2)\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma\in[0,\ 1],\ \alpha<\beta<\gamma\Rightarrow \| u\otimes v\|_{H_\beta\otimes_\tau K_\beta}=\| u\|_{H_\beta}\| v\|_{K_\beta}\leq$$
$$\leq\| u\|^\mu_{H_\alpha}\| u\|^\nu_{H_\gamma}\| v\|^\mu_{K_\alpha}\| v\|^\nu_{K_\gamma}=[\| u\otimes v\|_{H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha}]^\mu[\| u\otimes v\|_{H_\gamma\otimes_\tau K_\gamma}]^\nu,$$
$$u\in H_\gamma\,,\ v\in K_\gamma\,,\ \mu=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,,\ \nu=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\,.$$

Per ipotesi, H_1 e K_1 sono densi in H_α e K_α, $\forall\alpha\in[0,\ 1]$, rispettivamente. Sia $u\otimes v$ un elemento di $H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha$, spazio pre-hilbertiano il cui completamento è $H_\alpha\widehat{\otimes}_\tau K_\alpha$. Per ipotesi, allora:

$$\exists u_n\in H_1\,,\ \forall n\in\boldsymbol{N},\ \| u_n-u\|_{H_\alpha}\xrightarrow[n\leftarrow\infty]{}0;$$

$$\exists v_n\in K_1\,,\ \forall n\in\boldsymbol{N},\ \| v_n-v\|_{K_\alpha}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Si ha, ponendo per brevità, $\langle\,,\rangle_{H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha}=\langle\,,\rangle_\alpha$,

$$(*)\qquad |\langle u_n\otimes v_n-u\otimes v,\ u_n\otimes v_n-u\otimes v\rangle_\alpha|=$$
$$=|\langle u_n\otimes v_n\,,\ u_n\otimes v_n\rangle_\alpha-\langle u_n\otimes v_n\,,\ u\otimes v\rangle_\alpha-\langle u\otimes v,\ u_n\otimes v_n\rangle_\alpha+$$
$$+\langle u\otimes v,\ u\otimes v\rangle_\alpha|=|\langle u_n\,,\ u_n\rangle_{H_\alpha}\langle v_n\,,\ v_n\rangle_{K_\alpha}-\langle u_n\,,\ u\rangle_{H_\alpha}\langle v_n\,,\ v\rangle_{K_\alpha}-$$
$$-\langle u,\ u_n\rangle_{H_\alpha}\langle v,\ v_n\rangle_{K_\alpha}+\langle u,\ u\rangle_{H_\alpha}\langle v,\ v\rangle_{K_\alpha}|.$$

Ora,

$$|\langle u_n, u_n\rangle_{H_\alpha}-\langle u, u\rangle_{H_\alpha}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |\langle v_n, v_n\rangle_{K_\alpha}-\langle v, v\rangle_{K_\alpha}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$|\langle u_n, u\rangle_{H_\alpha}-\langle u, u\rangle_{H_\alpha}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ ecc.}$$

Quindi, per $n \to \infty$, $(*) \to 0$.

Questo significa che esiste $u_n \otimes v_n \in H_1 \otimes_\tau K_1$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, per cui:

$$\| u_n \otimes v_n - u \otimes v \|_{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'altra parte, lo spazio pre-hilbertiano $H_\alpha \otimes_\tau K_\alpha$ è denso in $H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha$, per definizione stessa di completamento. Segue che anche $H_1 \widehat{\otimes}_\tau K_1$ è denso in ciascuno degli spazi $H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha$.

Per la stessa ragione, le disuguaglianze (1) e (2) si prolungano agli spazi completati. Che la scala sia continua è conseguenza della definizione di prodotto interno $\langle\ ,\ \rangle_{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha}$, della continuità delle scale $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ e della densità degli spazi in oggetto.

COROLLARIO. *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *una scala massimale,* (cfr. [9], p. 109), *e sia* $\{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *una scala come nel Teorema* 2.1. *Allora* $\{E_\alpha\}$ *ha la proprietà di interpolazione stretta relativa alla famiglia* $\{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$.

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza del Teorema 2.1 e delle proprietà delle scale massimali, (cfr. [9], p. 111).

È noto (cfr. [12], p. 199) che il duale forte di $H \widehat{\otimes}_\tau K$, H e K essendo spazi di Hilbert, coincide con $H' \widehat{\otimes}_\tau K'$. Segue:

PROPOSIZIONE 2.1. *Se le scale normali continue* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *di spazi di Hilbert sono regolari, allora è regolare anche la scala* $\{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \otimes g$ un elemento di

$$H'_\alpha \otimes_\tau K'_\alpha \subset H'_\beta \otimes_\tau K'_\beta \subset H'_\gamma \otimes_\tau K'_\gamma,$$

$0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1$. Allora:

$$\| f \otimes g \|_{H'_\beta \otimes_\tau K'_\beta} = \| f \|_{H'_\beta} \| g \|_{K'_\beta} \leq$$
$$\leq [\| f \|_{H'_\alpha}]^\mu [\| f \|_{H'_\gamma}]^\mu [\| g \|_{K'_\alpha}]^\nu [\| g \|_{K'_\gamma}]^\nu =$$
$$= [\| f \|_{H'_\alpha} \| g \|_{K'_\alpha}]^\mu [\| f \|_{H'_\gamma} \| g \|_{K'_\gamma}]^\nu =$$
$$[\| f \otimes g \|_{H'_\alpha \otimes_\tau K'_\alpha}]^\mu [\| f \otimes g \|_{H'_\gamma \otimes_\tau K'_\gamma}]^\nu,$$
$$\mu = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}, \qquad \nu = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}.$$

Dunque, per ogni elemento del tipo $f \otimes g \in H'_\alpha \otimes_\tau K'_\alpha$, la Proposizione 2.1 è vera. D'altra parte, ogni elemento di $H'_\alpha \hat{\otimes}_\tau K'_\alpha$ è il limite di una successione di elementi della forma $f_i \otimes g_i$, $\forall i \in \boldsymbol{N}$, per la densità di $H'_\alpha \otimes_\tau K'_\alpha$ in $H'_\alpha \hat{\otimes}_\tau K'_\alpha$. Si ottiene, in tal modo, l'affermazione.

COROLLARIO. *Siano* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *due scale normali continue regolari di spazi di Hilbert. Allora la scala* $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale relativa a qualsiasi scala minimale.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 2.1, la scala $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ è regolare; quindi, essa ha la proprietà di interpolazione normale relativa a ogni scala minimale, (cfr. [9], p. 108).

Ricordiamo ora che, se H, K, H_1, K_1 sono spazi di Hilbert, e U, V sono due operatori lineari e continui da H a H_1 e da K a K_1, rispettivamente, allora l'operatore $U \otimes V$ è lineare continuo da $H \otimes_\tau K$ a $H_1 \otimes_\tau K_1$ e

$$\| U \otimes V \|_{H \otimes_\tau K \to H_1 \otimes_\tau K_1} = \| U \|_{H \to H_1} \| V \|_{K \to K_1},$$

(cfr. [12], p. 197). Denotiamo con $U \hat{\otimes} V$ il prolungamento di $U \otimes V$ allo spazio $H \hat{\otimes}_\tau K$: esso è lineare e continuo da $H \hat{\otimes}_\tau K$ a $H_1 \hat{\otimes}_\tau K_1$.

Questi richiami permettono di stabilire il seguente:

TEOREMA 2.2. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$, *scale normali continue di spazi di Hilbert e* $\{E_\alpha\}$ *(rispettivamente,* $\{F_\alpha\}$*) abbia la proprietà d'interpolazione normale [rispett., stretta] relativa a* $\{H_\alpha\}$ *(rispettivamente, a* $\{K_\alpha\}$*).*

Se U *e* V *sono operatori lineari e continui da* E_i *a* H_i *e da* F_i *a* K_i, $(i=0,\ 1)$, *rispettivamente, allora* $U\,\widehat{\otimes}\,V$ *è lineare continuo da* $E_\alpha\,\widehat{\otimes}_\tau F_\alpha$ *a* $H_\alpha\,\widehat{\otimes}_\tau K_\alpha$, $\forall\alpha\in[0,\ 1]$ *e*

$$\| U\,\widehat{\otimes}\,V \|_{E_\alpha\widehat{\otimes}_\tau F_\alpha\to H_\alpha\widehat{\otimes}_\tau K_\alpha}\leq$$

$$\leq[\|\,\widehat{\otimes}\,V \|_{E_0\widehat{\otimes}_\tau F_0\to H_0\widehat{\otimes}_\tau K_0}]^{1-\alpha}[\| U\,\widehat{\otimes}\,V \|_{E_1\widehat{\otimes}_\tau F_1\to H_1\widehat{\otimes}_\tau K_1}]^{\alpha};$$

[nel secondo caso,

$$U\in L(E_\alpha\,,\ H_\alpha)\cap L(E_\gamma\,,\ H_\gamma),$$

$$V\in L(F_\alpha\,,\ K_\alpha)\cap L(F_\gamma\,,\ K_\gamma)\Rightarrow U\otimes V\in L(E_\beta\otimes_\tau F_\beta\,,\ H_\beta\otimes_\tau K_\beta),$$

$$\| U\,\widehat{\otimes}\,V \|_{E_\beta\widehat{\otimes}_\tau F_\beta\to H_\beta\widehat{\otimes} K_\beta}\leq$$

$$\leq[\| U\,\widehat{\otimes}\,V \|_{E_\alpha\widehat{\otimes}_\tau F_\alpha\to H_\alpha\widehat{\otimes}_\tau K_\alpha}]^{\mu}[\| U\,\widehat{\otimes}\,V \|_{E_\gamma\widehat{\otimes}_\tau F_\gamma\to H_\gamma\widehat{\otimes}_\tau K_\gamma}]^{\nu},$$

$$\mu=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha},\qquad \nu=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\Bigg].$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi segue che:
U è un operatore lineare e continuo da E_α a H_α e

$$\| U \|_{E_\alpha\to H_\alpha}\leq\| U \|^{1-\alpha}_{E_0\to H_0}\,\| U \|^{\alpha}_{E_1\to H_1}\,;$$

V è un operatore lineare e continuo da F_α a K_α e

$$\| V \|_{F_\alpha\to K_\alpha}\leq\| V \|^{1-\alpha}_{F_0\to K_0}\,\| V \|^{\alpha}_{F_1\to K_1}\,.$$

Quindi, (cfr. il richiamo precedente il Teorema), $U\otimes V$ è continuo da $E_\alpha\otimes_\tau F_\alpha$ a $H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha$, e:

$$\| U\otimes V \|_{E_\alpha\otimes_\tau F_\alpha\to H_\alpha\otimes_\tau K_\alpha}=\| U \|_{E_\alpha\to H_\alpha}\,\| V \|_{F_\alpha\to K_\alpha}\leq$$

$$\leq[\| U \|^{1-\alpha}_{E_0\to H_0}\,\| U \|^{\alpha}_{E_1\to H_1}][\| V \|^{1-\alpha}_{F_0\to K_0}\,\| V \|^{\alpha}_{F_1\to K_1}]=$$

$$=[\| U\otimes V \|_{E_0\otimes_\tau F_0\to H_0\otimes_\tau K_0}]^{1-\alpha}[\| U\otimes V \|_{E_1\otimes_\tau F_1\to H_1\otimes_\tau K_1}]^{\alpha}.$$

Ma allora, il prolungamento di $U \otimes V$ a $E_\alpha \widehat{\otimes}_\tau F_\alpha$ è continuo da $E_\alpha \widehat{\otimes}_\tau F_\alpha$ a $H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

D'altro canto, la norma di $U \otimes V$ come operatore da $E_\alpha \otimes_\tau F_\alpha$ a $H_\alpha \otimes_\tau K_\alpha$, è conservata quando l'operatore viene prolungato a $E_\alpha \widehat{\otimes}_\tau F_\alpha$. Per cui:

$$\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\tau F_\alpha \to H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha} \leq$$

$$\leq [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_0 \widehat{\otimes}_\tau F_0 \to H_0 \widehat{\otimes}_\tau K_0}]^{1-\alpha} [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_1 \widehat{\otimes}_\tau F_1 \to H_1 \widehat{\otimes}_\tau K_1}]^{\alpha}.$$

In modo simile si prova l'affermazione relativa alla interpolazione stretta.

Notiamo che, se H e K sono due spazi di Hilbert, il prodotto tensoriale completato $H \widehat{\otimes}_\tau K$ può essere identificato con lo spazio degli operatori di tipo Hilbert-Schmidt da H' a K, (cfr. [12], p. 199).

TEOREMA 2.3. *Siano* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *due scale normali continue di spazi di Hilbert, e* H_α, K_α, $\alpha \in]0, 1[$, *siano ottenuti da* H_0, H_1 *e da* K_0, K_1, *rispettivamente, attraverso il metodo complesso (di Calderon), cioè* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ *siano delle AK-scale.*

Allora anche la scala $\{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *è una AK-scala.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{V}$ l'insieme delle funzioni Φ, definite su $\{z \in \boldsymbol{C},\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$, a valori in $H_0 \widehat{\otimes}_\tau K_0$, tali che:

1) Φ è limitata e continua da $\{z \in \boldsymbol{C},\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ a $H_0 \widehat{\otimes}_\tau K_0$;

2) Φ è analitica da $\{z \in \boldsymbol{C},\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ a $H_0 \widehat{\otimes}_\tau K_0$;

3) $\Phi(1+i\tau) \in H_1 \widehat{\otimes}_\tau K_1$ e $\Phi(1+i\tau)$ è continua e limitata da $-\infty < \tau < +\infty$ a $H_1 \widehat{\otimes}_\tau K_1$.

Su $\mathfrak{V}$ si definisce la norma:

$$\| \Phi \|_{\mathfrak{V}} = \max \{ \sup_{-\infty < \tau < \infty} \| \Phi(i\tau) \|_{H_0 \widehat{\otimes}_\tau K_0},\ \sup_{-\infty < \tau < +\infty} \| \Phi(1+i\tau) \|_{H_1 \widehat{\otimes}_\tau K_1} \}.$$

$(\mathfrak{V}, \| \ \|_{\mathfrak{V}})$ è uno spazio di Banach.

L'insieme $\mathfrak{B}_\alpha$ di tutte le funzioni $\Phi \in \mathfrak{V}$ tali che $\Phi(\alpha)=0$, è un sottospazio chiuso di $\mathfrak{V}$. Denotiamo con $\{\Phi_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ lo spazio quoziente $\mathfrak{W}/\mathfrak{B}_\alpha$, la cui norma è definita da:

$$\| w \|_{\Phi_\alpha} = \inf_{\Phi(\alpha)=w} \| \Phi \|_{\mathfrak{w}},$$

(cfr. [9], p. 132).

$\{\Phi_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, con $\Phi_0 = H_0 \hat{\otimes}_\tau K_0$, $\Phi_1 = H_1 \hat{\otimes}_\tau K_1$, è la AK-scala costruita da Φ_0 e Φ_1.

Analogamente, denoteremo con $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ gli spazi corrispondenti di $\mathfrak{W}$ relativi alle coppie H_0, H_1 e K_0, K_1, per cui:

$$\| x \|_{H_\alpha} = \inf_{\varphi(\alpha)=x} \| \varphi \|_{\mathfrak{w}'}, \qquad \| y \|_{K_\alpha^!} = \inf_{\psi(\alpha)=y} \| \psi \|_{\mathfrak{w}''}.$$

Supponiamo $x \in H_\alpha$, $y \in K_\alpha$. Allora:

$$\| x \otimes y \|_{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha} = \| x \|_{H_\alpha} \| y \|_{K_\alpha^!} =$$

$$= [\inf_{\varphi(\alpha)=x} \| \varphi \|_{\mathfrak{w}'}][\inf_{\psi(\alpha)=y} \| \psi \|_{\mathfrak{w}''}] = \inf_{\substack{\varphi(\alpha)=x \\ \psi(\alpha)=y}} \| \varphi \|_{\mathfrak{w}'} \| \psi \|_{\mathfrak{w}''}.$$

Ora,

$$\| \varphi \|_{\mathfrak{w}'} \| \psi \|_{\mathfrak{w}''} = \max \{\sup_\tau \| \varphi(i\tau) \|_{H_0}, \sup_\tau \| \varphi(1+i\tau) \|_{H_1}\} \cdot$$

$$\cdot \max \{\sup_\tau \| \psi(i\tau) \|_{K_0}, \sup_\tau \| \psi(1+i\tau \|_{K_1}\} \geq$$

$$\geq \max \{\sup_\tau (\| \varphi(i\tau) \|_{H_0} \| \psi(i\tau) \|_{K_0}, \sup_\tau (\| \varphi(1+i\tau) \|_{H_1} \| \psi(1+i\tau) \|_{K_1})\}.$$

Poniamo $(\varphi \cdot \psi)(z) = \varphi(z) \otimes \psi(z)$. Allora:

1) Dalle proprietà di φ e ψ segue che la funzione $\varphi \cdot \psi$ così definita appartiene a $\mathfrak{W}$. Inoltre:

$$\max \{\sup_\tau (\| \varphi(i\tau) \|_{H_0} \| \psi(i\tau) \|_{K_0}), \sup_\tau (\| \varphi(1+i\tau) \|_{H_1} \| \psi(1+i\tau) \|_{K_1})\} =$$

$$= \max \{\sup_\tau \| (\varphi \cdot \psi)(i\tau) \|_{H_0 \hat{\otimes} K_0}, \sup_\tau \| (\varphi \cdot \psi)(1+i\tau) \|_{H_1 \hat{\otimes} K_1}\} = \| \varphi \cdot \psi \|_{\mathfrak{w}}.$$

D'altra parte, $(\varphi \cdot \psi)(\alpha) = \varphi(\alpha) \otimes \psi(\alpha) = x \otimes y$. Quindi,

$$\| \varphi \cdot \psi \|_{\mathfrak{w}} \geq \| x \otimes y \|_{\Phi_\alpha}.$$

Perciò, $x \otimes y \in H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha \Rightarrow x \otimes y \in \Phi_\alpha$ e

$$\| x \otimes y \|_{\Phi_\alpha} \leq \| x \otimes y \|_{H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha} = \| x \|_{H_\alpha} \| y \|_{K_\alpha} .$$

Ciò implica che, poiché $(H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha)' = H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha$,

$$\| f \otimes g \|_{H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha} \leq \| f \otimes g \|_{\Phi'_\alpha} .$$

Ora, (cfr. [10], p. 150), se denotiamo con $AK(E_0, E_1, \alpha)$ lo spazio di Hilbert ottenuto da E_0 e E_1 (E_i spazio di Hilbert, $i=0, 1$), corrispondente a $\alpha \in]0, 1[$, allora:

$$\Phi'_\alpha = AK(\Phi'_1, \Phi'_0, 1-\alpha), \qquad H'_\alpha = AK(H'_1, H'_0, 1-\alpha),$$
$$K'_\alpha = AK(K'_1, K'_0, 1-\alpha).$$

Quindi, ragionando come nella prima parte della dimostrazione,

$$\| f \otimes g \|_{\Phi'_\alpha} \leq \| f \otimes g \|_{H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha} .$$

Cioè:

$$\| f \otimes g \|_{\Phi'_\alpha} = \| f \otimes g \|_{H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha} = \| f \|_{H'_\alpha} \| g \|_{K'_\alpha} .$$

Notiamo che Φ'_α e $H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha$ sono spazi di Hilbert e si sa che la topologia su $H_\alpha \otimes K_\alpha$ che rende quest'ultimo uno spazio pre-hilbertiano e il suo completamento uno spazio di Hilbert, è unica ed è propria la topologia τ.

In altre parole, esiste una sola topologia hilbertiana tale che:

$$f \in H'_\alpha, \; g \in K'_\alpha \Rightarrow \| f \otimes g \|_{H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha} = \| f \|_{H'_\alpha} \| g \|_{K'_\alpha} .$$

D'altro canto, Φ'_α è uno spazio di Hilbert, per cui

$$\| f \otimes g \|_{\Phi'_\alpha} = \| f \|_{H'_\alpha} \| g \|_{K'_\alpha} .$$

Si può dunque concludere che $\Phi'_\alpha = H'_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K'_\alpha$.

Ma allora, per dualità

$$\Phi''_\alpha = \Phi_\alpha = H''_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K''_\alpha = H_\alpha \widehat{\otimes}_\tau K_\alpha .$$

Ciò conclude la prova.

II. Il prodotto tensoriale proiettivo.

Ricordiamo la seguente:

DEFINIZIONE 2.1′. Siano E, F due spazi normati; la topologia proiettiva, o π-topologia, su $E \otimes F$ è la topologia definita dalla norma:

$$\| \theta \|_{E \otimes_\pi F} = \inf \sum_i \| x_i \|_E \| y_i \|_F ,$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutti gli insiemi finiti di coppie (x_i , y_i) tali che:

$$\theta = \sum_i x_i \otimes y_i , \quad x_i \in E, \quad y_i \in F.$$

(cfr. [15], p. 435).

Per le proprietà del prodotto tensoriale proiettivo di due spazi normati, o, più in generale, di due spazi vettoriali topologici localmente convessi, rimandiamo al citato testo di Treves (cfr. [15], pp. 434-445).

TEOREMA 2.1′. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *due scale normali continue di spazi di Banach. Allora la famiglia* $\{E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *di spazi di Banach* $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi E_\alpha$ *gode delle seguenti proprietà*:

1) $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, $\theta \in E_\beta \otimes_\pi F_\beta \Rightarrow \| \theta \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha} \leq \| \theta \|_{E_\beta \widehat{\otimes}_\pi F_\beta}$;

2) $E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1$ *è denso in* $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Allora,

$$\theta \in E_\beta \otimes_\pi F_\beta \Rightarrow \theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i ,$$

con $x_i \in E_\beta$, $y_i \in F_\beta$, $i = 1, 2, ..., n$.

Ora,

$$\theta\in E_\beta\otimes_\pi F_\beta \Longrightarrow \|\,\theta\,\|_{E_\beta\otimes_\pi F_\beta}=\inf_{\substack{\theta=\sum_i x_i\otimes y_i\\ x_i\in E_\beta,\ y_i\in F_\beta}}\sum_i \|\,x_i\,\|_{E_\beta}\,\|\,y_i\,\|_{F_\beta}\geq$$

$$\geq \inf_{\substack{\theta=\sum_i x_i\otimes y_i\\ x_i\in E_\alpha,\ y_i\in F_\alpha}}\sum_i \|\,x_i\,\|_{E_\alpha}\,\|\,y_i\,\|_{F_\alpha}=\|\,\theta\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha},$$

poichè

$$x_i\in E_\beta \Longrightarrow x_i\in E_\alpha\,, \qquad y_i\in F_\beta\Longrightarrow y_i\in F_\alpha$$

e

$$\|\,x_i\,\|_{E_\alpha}\leq\|\,x_i\,\|_{E_\beta}\,, \qquad \|\,y_i\,\|_{F_\alpha}\leq\|\,y_i\,\|_{F_\beta}\,.$$

Cioè

$$(*)\qquad \theta\in E_\beta\otimes_\pi F_\beta\Longrightarrow\theta\in E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha \ \text{ e } \ \|\,\theta\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha}\leq\|\,\theta\,\|_{E_\beta\otimes_\pi F_\beta}\,.$$

Sia ora $\theta=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$ un qualunque elemento di $E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha$.

Poichè $x_i\in E_\alpha$, $y_i\in F_\alpha$, per ogni indice i che compare nella espressione di θ, e poichè $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $(0\leq\alpha\leq 1)$, sono scale normali continue:

(i) $\exists x_{k,i}\in E_1\,,\ \|\,x_{k,i}-x_i\,\|_{E_\alpha}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0;$

(ii) $\exists y_{k,i}\in F_1\,,\ \|\,y_{k,i}-y_i\,\|_{F_\alpha}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

Valutiamo $\|\sum_{i=1}^n x_{k,i}\otimes y_{k,i}-\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha}$. Si ha:

$$\|\sum_{i=1}^n x_{k,i}\otimes y_{k,i}-\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha}=$$

$$=\|\sum_{i=1}^n [x_{k,i}\otimes y_{k,i}-x_i\otimes y_i]\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^n\|\,x_{k,i}\otimes y_{k,i}-x_i\otimes y_i\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha}=$$

$$=\sum_{i=1}^n\|\,x_{k,i}\otimes y_{k,i}-x_{k,i}\otimes y_i+x_{k,i}\otimes y_i-x_i\otimes y_i\,\|_{E_\alpha\otimes_\pi F_\alpha}\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \| x_{k,i} \otimes y_{k,i} - x_{k,i} \otimes y_i \|_{E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \| x_{k,i} \otimes y_i - x_i \otimes y_i \|_{E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha} =$$

= (poichè il prodotto tensoriale $\otimes$ è un operatore bilineare da

$$E_\alpha \times F_\alpha \text{ a } E_\alpha \otimes F_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} [\| x_{k,i} \|_{E_\alpha} \| y_{k,i} - y_i \|_{F_\alpha}] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\| x_{k,i} - x_i \|_{E_\alpha} \| y_{k,i} \|_{F_\alpha}] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} [[\| x_{k,i} - x_i \|_{E_\alpha} + \| x_i \|_{E_\alpha}] \| y_{k,i} - y_i \|_{F_\alpha}] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [[\| y_{k,i} - y_i \|_{F_\alpha} + \| y_i \|_{F_\alpha}] \| x_{k,i} - x_i \|_{E_\alpha}].$$

Facendo tendere k all'infinito, quest'ultima somma tende a 0, in virtù di (i) e di (ii). Quindi, $E_1 \otimes_\pi F_1$ è denso in $E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

D'altra parte, per definizione, $E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha$ è denso in $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$. Quindi, anche $E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1$ è denso in $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$.

Ciò è sufficiente anche per concludere che la disuguaglianza (*) si prolunga ai completamenti, cioè, per affermare che:

$$\alpha, \beta \in [0, 1], \ \alpha < \beta, \ \theta \in E_\beta \widehat{\otimes}_\pi F_\beta \Rightarrow \theta \in E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$$

e

$$\| \theta \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha} \leq \| \theta \|_{E_\beta \widehat{\otimes}_\pi F_\beta} .$$

OSSERVAZIONE. Dalla prova del Teorema 2.1′ segue che questo resta valido nella sola ipotesi che:

$\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha < \beta \Rightarrow E_\beta$ e F_β sono immersi normalmente in E_α e F_α, rispettivamente.

TEOREMA 2.2′. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{G_\alpha\}$, $\{H_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *famiglie di spazi di Banach ed* $\{E_\alpha\}$ (*rispettivamente*, $\{F_\alpha\}$) *abbia la proprietà di interpolazione normale* [*stretta*] *relativa a* $\{G_\alpha\}$ (*rispettivamente, a* $\{H_\alpha\}$).

Se U e V sono operatori lineari e continui da E_i a G_i e da F_i a H_i, ($i=0$, 1), rispettivamente, allora il prolungamento $U \widehat{\otimes} V$ di $U \otimes V$ a $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$ è lineare continuo da $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$ a $G_\alpha \widehat{\otimes}_\pi H_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$ e

$$\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha \to G_\alpha \widehat{\otimes} H_\alpha} \leq$$
$$\leq [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_0 \widehat{\otimes}_\pi F_0 \to G_0 \widehat{\otimes}_\pi H_0}]^{1-\alpha} [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1 \to G_1 \widehat{\otimes}_\pi H_1}]^\alpha;$$

[*nel secondo caso,*

$$U \in L(E_\alpha, G_\alpha) \cap (E_\gamma, G_\gamma),$$
$$V \in L(F_\alpha, H_\alpha) \cap L(F_\gamma, H_\gamma) \Rightarrow U \widehat{\otimes} V \in L(E_\beta \widehat{\otimes}_\pi F_\beta, G_\beta \widehat{\otimes}_\pi H_\beta)$$

e

$$\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\beta \widehat{\otimes}_\pi F_\beta \to G_\beta \widehat{\otimes}_\pi H_\beta} \leq$$
$$\leq [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha \to G_\alpha \widehat{\otimes}_\pi H_\alpha}]^\mu [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\gamma \widehat{\otimes}_\pi F_\gamma \to G_\gamma \widehat{\otimes}_\pi H_\gamma}]^\nu,$$
$$0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1, \qquad \mu = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}, \qquad \nu = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \Bigg].$$

DIMOSTRAZIONE. Si sa, (cfr. [15], p. 444), che, dati quattro spazi di Banach E, F, G, H e due operatori $U \in L(E, G)$, $V \in L(F, H)$, l'operatore lineare $U \otimes V$ è continuo da $E \otimes_\pi F$ a $G \otimes_\pi H$ e

$$\| U \otimes V \|_{E \otimes_\pi F \to G \otimes_\pi H} = \| U \|_{E \to G} \| V \|_{E \to H};$$

quindi, la prova è analoga a quella del Teorema 2.2.

Siano E, F, G tre spazi normati; allora lo spazio $B(E, F; G) = L(E, F; G)$ degli operatori bilineari continui da $E \times F$ a G è isometricamente isomorfo allo spazio $L(E \otimes_\pi F, G)$ degli operatori lineari e continui da $E \otimes_\pi F$ a G (cfr. [15], p. 443).

TEOREMA 2.3′. *Siano $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{G_\alpha\}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), tre scale normali continue di spazi di Banach ed $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ abbiano la proprietà di interpolazione relativa a $\{G_\alpha\}$.*

Allora, se T è un operatore lineare continuo da $E_0 \widehat{\otimes}_\pi F_0$ a G_0 e da $E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1$ a G_1, T è continuo anche da $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$ a G_α, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la restrizione di T a $E_i \otimes_\pi F_i$, $i=0, 1$. In virtù della identificazione richiamata sopra, a T corrisponde biunivocamente un operatore bilineare continuo B_T da $E_i \times F_i$ a G_i ($i=0, 1$).

Dalle ipotesi, utilizzando il Teorema 1.1, segue che B_T risulta bilineare continuo da $E_\alpha \times F_\alpha$ a G_α, $\alpha \in [0, 1]$. A B_T corrisponde, attraverso a G_α, che coincide con T, per la densità di $E_1 \otimes_\pi F_1$ in ogni $E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha$.

Il prolungamento di T a $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$ è, di conseguenza, lineare e continuo da $E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha$ a G_α, $\alpha \in [0, 1]$.

COROLLARIO. *Siano* $\{E_\alpha^{(1)}\}$, $\{E_\alpha^{(2)}\}$, ..., $\{E_\alpha^{(n)}\}$ *scale normali continue di spazi di Banach su* $[0, 1]$, $n>2$, *aventi la proprietà di interpolazione relativa alla famiglia* $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *di spazi di Banach.*

Se T *è un operatore lineare continuo da* $E_i^{(1)} \widehat{\otimes}_\pi E_i^{(2)} \ldots \widehat{\otimes}_\pi E_i^{(n)}$ *a* F_i, $i=0, 1$, *allora* T *è continuo da* $E_\alpha^{(1)} \widehat{\otimes}_\pi E_\alpha^{(2)} \ldots \widehat{\otimes}_\pi E_\alpha^{(n)}$ *a* F_α, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. La prova corre come quella del Teorema 2.3′, in base al Teorema 1.1 e al fatto che:

$$L(E_1, E_2, \ldots, E_n; F) \cong L(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}; L(E_n, F)) \cong$$
$$\cong \ldots \cong L(E_1, E_2; L(E_3, L(\ldots) \ldots)) \cong$$
$$\cong L(E_1 \otimes_\pi E_2; L(E_3, L(\ldots) \ldots)) \cong L(E_1 \otimes_\pi E_2 \otimes_\pi E_3, L(E_4, L(\ldots) \ldots)) \cong$$
$$\cong L(E_1 \otimes_\pi E_2 \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E_n, F).$$

OSSERVAZIONE. Si supponga che le scale che entrano nello enunciato del Teorema 2.3′ siano *AK*-scale. È noto, allora, (cfr. [1], p. 120), che:

$$B \in L(E_0, F_0; G_0) \cap L(E_1, F_1; G_1) \Rightarrow B \in L(E_\alpha, F_\alpha; G_\alpha)$$

e

$$\| B \|_{E_\alpha \times F_\alpha \to G_\alpha} \leq [\| B \|_{E_0 \times F_0 \to G_0}]^{1-\alpha} [\| B \|_{E_1 \times F_1 \to G_1}]^\alpha.$$

Dunque, si può dire che:

$$T \in L(E_0 \widehat{\otimes}_\pi F_0, G_0) \cap L(E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1, G_1) \Rightarrow T \in L(E_\alpha \widehat{\otimes}_\pi F_\alpha, G_\alpha)$$

e

$$\| T \|_{E \hat{\otimes}_\pi F_\alpha \to G_\alpha} \leq [\| T \|_{E_0 \hat{\otimes}_\pi F_0 \to G_0}]^{1-\alpha} [\| T \|_{E_1 \hat{\otimes}_\pi F_1 \to G_1}]^{\alpha}.$$

In particolare, vale una affermazione analoga per α, β, $\gamma \in [0, 1]$, $\alpha < \beta < \gamma$, dal momento che le AK-scale hanno la proprietà di interpolazione stretta relativa l'una all'altra.

Infine, se $G_\alpha \equiv \boldsymbol{C}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, allora:

$$T \in (E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F_\alpha)' \cap (E_\gamma \hat{\otimes}_\pi F_\gamma)' \Rightarrow T \in (E_\beta \hat{\otimes}_\pi F_\beta)'$$

e

$$\| T \|_{(E_\beta \hat{\otimes}_\pi F_\beta)'} \leq [\| T \|_{(E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F_\alpha)'}]^{\mu} [\| T \|_{(E_\gamma \hat{\otimes}_\pi F_\gamma)'}]^{\nu};$$

cioè, la famiglia $\{E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, è regolare.

Nota. Ricordiamo che, se H e K sono due spazi di Hilbert, il duale forte di $H \hat{\otimes}_\pi K$ coincide con lo spazio $L(H', K)$, munito della topologia forte d'operatore, (cfr. [15], p. 498).

Finalmente, lo stesso spazio $H \hat{\otimes}_\pi K$ non è altro che lo spazio degli operatori nucleari da H' a K, munito della norma-traccia, (cfr. [15], pp. 495-496).

III. Il prodotto tensoriale ε (o di convergenza bi-equicontinua).

Proposizione 2.1″. Siano E, F due spazi normati. Sullo spazio vettoriale $E \otimes F$ viene definita una topologia ε associando a ogni elemento u di $E \otimes F$ il numero positivo:

$$\| u \|_{E \hat{\otimes}_\varepsilon F} = \sup_{\|x'\|_{E'} \leq 1, \, \|y'\|_{F'} \leq 1} |(x' \otimes y')u|.$$

La applicazione: $u \to \| u \|_{E \otimes_\varepsilon F}$ risulta essere una norma su $E \otimes F$ ed è precisamente la norma indotta su $E \otimes F$ da

$$B(E', F') = B(E', F'; \boldsymbol{C}) \cong (E' \hat{\otimes}_\pi F')' = (E' \otimes_\pi F')',$$

(cfr. [14], Exposé 7, pp. 5-6).

In seguito, denoteremo con $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ il completamento di $E \otimes_\varepsilon F$.

TEOREMA 2.1″. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *due scale normali continue di spazi di Banach. Allora*:

1) $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow E_\beta \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\beta$ *è immerso normalmente in* $E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha$.

2) *Se gli spazi* E_α, F_α *sono riflessivi*, $\alpha \in [0, 1]$, *e* $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, $\alpha < \beta < \gamma$

$$\text{(i)} \qquad T \in L(E'_\alpha, F_\alpha) \cap L(E'_\gamma, F_\gamma) \Rightarrow T \in L(E'_\beta, F_\beta)$$

e

$$\| T \|_{E'_\beta \to F_\beta} < \| T \|^\mu_{E'_\alpha \to F_\alpha} \| T \|^\nu_{E'_\gamma \to F_\gamma}, \qquad \mu = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}, \qquad \nu = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha},$$

allora:

$$(*) \qquad 0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1, \ \theta \in E_\gamma \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\gamma \Rightarrow \| \theta \|_{E_\beta \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\beta} \leq$$
$$\leq [\| \theta \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha}]^\mu [\| \theta \|_{E_\gamma \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\gamma}]^\nu.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Per ipotesi,

$$0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow \| x \|_{E_\alpha} \leq \| x \|_{E_\beta}, \ \| y \|_{F_\alpha} \leq \| y \|_{F_\beta}.$$

Quindi,

$$0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow \| x' \|_{E'_\alpha} \geq \| x' \|_{E'_\beta}, \ \| y' \|_{F'_\alpha} \geq \| y' \|_{F'_\beta}.$$

Segue che:

$$\| x' \|_{E'_\alpha} \leq 1 \Rightarrow \| x' \|_{E'_\beta} \leq 1, \ \| y' \|_{F'_\alpha} \leq 1 \Rightarrow \| y' \|_{F'_\beta} \leq 1.$$

E allora:

$$\{x', \| x' \|_{E'_\alpha} \leq 1\} \subset \{x', \| x' \|_{E'_\beta} \leq 1\},$$
$$\{y', \| y' \|_{F'_\alpha} \leq 1\} \subset \{y', \| y' \|_{F'_\beta} \leq 1\}.$$

Ciò implica:

$$(1) \qquad \| u \|_{E_\alpha \otimes_\varepsilon F_\alpha} = \sup_{\|x'\|_{E'_\alpha} \leq 1,\ \|y'\|_{F'_\alpha} \leq 1} |(x' \otimes y')u| \leq$$

$$\leq \sup_{\|x'\|_{E'_\beta} \leq 1,\ \|y'\|_{F'_\beta} \leq 1} |(x' \otimes y')u| = \| u \|_{E_\beta \otimes_\varepsilon F_\beta}.$$

Ora ricordiamo che (cfr. [15], p. 440):

Se E, F sono due spazi normati, allora $E \otimes_\varepsilon F$ è denso in $\widehat{E} \otimes_\varepsilon \widehat{F}$, $\widehat{E}$ e $\widehat{F}$ essendo i completamenti di E e di F, rispettivamente. Nel nostro caso, lo spazio normato $(E_1, \| \ \|_{E_\alpha})$ è, per ipotesi, denso in $(E_\alpha, \| \ \|_{E_\alpha})$ e quindi, il completamento di $(E_1, \| \ \|_{E_\alpha})$ rispetto alla norma $\| \ \|_{E_\alpha}$ coincide con E_α.

Così, da queste osservazioni, segue che $E_1 \otimes_\varepsilon F_1$ è denso in ciascuno degli spazi $E_\alpha \otimes_\varepsilon F_\alpha$; perciò, anche $E_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon F_1$ è denso in $E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Ciò implica, fra l'altro, che la disuguaglianza (1) si prolunga ai completamenti degli spazi.

2) Sussistono i seguenti isomorfismi:

$$L(E', F'; \mathbf{C}) = B(E', F') \cong L(E', L(F', \mathbf{C})) = L(E', F'').$$

Se F è riflessivo, $F'' = F$. Quindi, $B(E', F') \cong L(E', F)$.

D'altra parte, la topologia ε su $E \otimes F$ coincide, come è stato richiamato, con la topologia indotta da $B(E', F') \cong L(E', F)$.

Ma:

$$E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \subset E_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon F_1 \subset L(E'_1, F_1) \text{ e } E_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon F_1 \subset E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha.$$

In base alla ipotesi (i), allora, si ottiene la disuguaglianza (*).

COROLLARIO 1. *Nelle ipotesi del Teorema 2.1'', se vale la condizione* 2) (i) *dello stesso teorema, allora la famiglia* $\{E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *forma una scala normale continua di spazi di Banach.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 2.1'', rimane da verificare la continuità della scala. D'altronde, ciò è conseguenza della definizione di $\| \ \|_{E_\alpha \otimes_\varepsilon F_\alpha}$, $\alpha \in [0, 1]$, e della continuità delle scale $\{E_\alpha\}$ e $\{F_\alpha\}$.

Corollario 2. *Una scala massimale ha la proprietà di interpolazione stretta relativa a ogni scala del tipo* $\{E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Dimostrazione. Discende dal fatto che ogni scala massimale ha la proprietà d'interpolazione stretta rispetto a qualsiasi scala normale.

Adoperando il medesimo ragionamento per dimostrare il Teorema 2.2′ e servendosi di un risultato concernente il prodotto tensoriale di due operatori, si prova il seguente:

Corollario 3. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\{G_\alpha\}$, $\{H_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *scale normali continue di spazi di Banach ed* $\{E_\alpha\}$ *(rispettivamente,* $\{F_\alpha\}$*) abbia la proprietà di interpolazione normale [stretta] relativa a* $\{G_\alpha\}$ *(rispettivamente, a* $\{H_\alpha\}$*).*

Se U *e* V *sono due operatori lineari e continui da* E_i *a* G_i $(i=0,\ 1)$ *e da* F_i *a* H_i $(i=0,\ 1)$*, rispettivamente, allora l'operatore* $U \widehat{\otimes} V$*, prolungamento di* $U \otimes V$ *a* $E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha$*, è lineare continuo da* $E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha$ *a* $G_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon H_\alpha$, $\alpha \in [0,\ 1]$ *e*

$$\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha \to G_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon H_\alpha} \leq$$

$$\leq [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon F_0 \to G_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon H_0}]^{1-\alpha} [\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \to G_1 \widehat{\otimes}_3 H_1}]^\alpha$$

$$\cdot \Big[U \in L(E_\alpha,\ G_\alpha) \cap L(E_\gamma,\ G_\gamma),\ V \in L(F_\alpha,\ H_\alpha) \cap L(F_\gamma,\ H_\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \widehat{\otimes} V \in L(E_\beta \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\beta,\ G_\beta \widehat{\otimes}_\varepsilon H_\beta)$$

e

$$\| U \widehat{\otimes} V \|_{E_\beta \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\beta \to G_\beta \widehat{\otimes}_\varepsilon H_\beta} \leq [\| U \otimes V \|_{E_\alpha \widehat{\otimes}_3 F_\alpha \to G_\alpha \widehat{\otimes}_\varepsilon H_\alpha}]^\mu \cdot$$

$$\cdot [\| U \otimes V \|_{E_\gamma \widehat{\otimes}_\varepsilon F_\gamma \to G_\gamma \widehat{\otimes}_\varepsilon H_\gamma}]^\nu,\ \mu = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha},\ \nu = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \Big].$$

Dimostrazione. Analoga a quella del Teorema 2.2′, in base al fatto che:

$$\| U \otimes V \|_{E \otimes_\varepsilon F \to G \otimes_\varepsilon H} = \| U \|_{E \to G} \| V \|_{F \to H}.$$

(cfr. [15], p. 444).

NOTA. Siano E, F due spazi di Banach ed E' abbia la proprietà di approssimazione, cioè, l'operatore identico su E' può essere approssimato, uniformemememente su ogni sottoinsieme precompatto di E', da operatori lineari continui di dimensione finita; (ricordiamo che ogni spazio di Hilbert ha la proprietà di approssimazione, (cfr. [13], p. 108)).

Allora lo spazio $E' \hat{\otimes}_\varepsilon F$ può essere identificato con lo spazio degli operatori lineari compatti da E a F, (cfr. [13], p. 114).

IV. Relazioni fra le topologie τ, π, ε.

Ricordiamo il seguente lemma (cfr. [9], p. 151):

LEMMA. *Sia E_0 uno spazio di Hilbert, immerso normalmente nello spazio di Banach E_{-1}. Allora esiste una scala normale continua di spazi di Banach che connette i tre spazi E_{-1}, E_0 e $E_1=(E_{-1})'$.*

TEOREMA 2.1‴. *Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert. Allora esiste una scala normale continua di spazi di Banach che connette gli spazi $H_1 \hat{\otimes}_\varepsilon H_2$, $H_1 \hat{\otimes}_\tau H_2$, $H'_1 \hat{\otimes}_\pi H'_2 \cong H_1 \hat{\otimes}_\pi H_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Lemma, in conseguenza del fatto che:

$$(H_1 \otimes_\varepsilon H_2)' \cong H'_1 \otimes_\pi H'_2 .$$

(cfr. [15], p. 497).

OSSERVAZIONE. Abbiamo già ricordato che $H_1 \hat{\otimes}_\varepsilon H_2$, $H_1 \hat{\otimes}_\tau H_2$, $H_1 \hat{\otimes}_\pi H_2$ sono topologicamente isomorfi allo spazio degli operatori compatti, di tipo Hilbert-Schmidt, nucleari, da H'_1 a H_2, rispettivamente.

Rileviamo, inoltre, che lo spazio degli operatori di dimensione finita da H'_1 a H_2 è denso in ciascuno di tali spazi, i quali risultano essere proprio il suo completamento rispetto alle norme $\| \; \|_{H'_1 \to H_2}$, $| \; |_{H'_1 \to H_2}$; $||| \; |||_{H'_1 \to H_2}$. $\| \; \|_{H'_1 \to H_2}$ è l'usuale norma d'operatore; $||| T |||_{H'_1 \to H_2} = \sum_n \lambda_n$, $| T |_{H'_1 \to H_2} = [\sum_n \lambda_n^2]^{1/2}$, dove i numeri reali positivi λ_n sono gli autovalori dell'operatore positivo autoaggiunto $(T^*T)^{1/2}$. (cfr. [11], p. 161 e [5]).

Così, identificando H'_1 con H_1, possiamo stabilire:

Corollario. *Sia T un operatore nucleare da H_1 a H_2, H_i spazio di Hilbert per $i=1, 2$. Allora esiste $\alpha \in]0, 1[$, tale che:*

$$| T |_{H_1 \to H_2} \leq [\| T \|_{H_1 \to H_2}]^{1-\alpha} [\||T \||_{H_1 \to H_2}]^{\alpha}.$$

Teorema 2.2. *Siano $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, due scale normali continue di spazi di Banach, $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, due scale normali continue di spazi di Hilbert.*

Se le famiglie $\{E_\alpha\}$ e $\{F_\alpha\}$ hanno la proprietà di interpolazione relativa alla famiglia $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, allora anche $\{E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F_\alpha\}$ ha la proprietà di interpolazione rispetto a $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$.

Dimostrazione. Sia T un operatore lineare e continuo da $E_i \hat{\otimes}_\pi F_i$ a $H_i \hat{\otimes}_\tau K_i$ $(i=0, 1)$. All'operatore T corrisponde biunivocamente, per la proprietà della topologia π, un operatore bilineare B_T, continuo da $E_i \times F_i$ a $H_i \hat{\otimes}_\tau K_i$ $(i=0, 1)$. Dalle assunzioni, in base al Teorema 1.1, segue che B_T è bilineare continuo da $E_\alpha \times F_\alpha$ a $H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$.

Cioè l'operatore T è lineare continuo da $E_\alpha \otimes_\pi F_\alpha$ a $H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha$.

Quindi, l'estensione di T a $E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F_\alpha$ è continua da

$$E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F_\alpha \text{ a } H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha .$$

Corollario 1. *Siano $\{E_\alpha^{(1)}\}$, $\{E_\alpha^{(2)}\}$, ..., $\{E_1^{(n)}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, $n > 2$, scale normali continue di spazi di Banach, $\{H_\alpha\}$ e $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, due scale normali continue di spazi di Hilbert.*

Se $\{E_\alpha^{(i)}\}$ ha la proprietà di interpolazione relativa a $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, $i=1, 2, ..., n$, allora, se T è un operatore lineare continuo da $E_0^{(1)} \hat{\otimes}_\pi E_0^{(2)} \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_0^{(n)}$ a $H_0 \hat{\otimes}_\tau K_0$ e da $E_1^{(1)} \hat{\otimes}_\pi E_1^{(2)} \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_n E_1^{(n)}$ a $H_1 \hat{\otimes}_\tau K_1$, T è lineare continuo da

$$E_\alpha^{(1)} \hat{\otimes}_\pi E_\alpha^{(2)} \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_\alpha^{(n)} \text{ a } H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$$

Dimostrazione. Analoga a quella del Teorema 2.2''', in base al Teorema 1.1, per $n > 2$.

Corollario 2. *Valgano le ipotesi del Teorema 2.2''' e, in più,* *le scale* $\{E_\alpha\}$ *e* $\{F_\alpha\}$ *siano scale massimali. Allora* $\{E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F_\alpha\}$ *ha la proprietà di interpolazione relativa a* $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, $\{E_\alpha\}$ ed $\{F_\alpha\}$ hanno la proprietà di interpolazione relativa a $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$, poichè $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, è una scala normale.

Osserviamo che il Teorema 2.2‴ e i suoi Corollari rimangono validi se si sostituisce la scala $\{H_\alpha \hat{\otimes}_\tau K_\alpha\}$ con una scala $\{G_\alpha \hat{\otimes}_\varepsilon L_\alpha\}$, G_α e L_α spazi di Banach, (cfr. Corollari 1 e 2 del Teorema 2.1″).

BIBLIOGRAFIA

[1] CALDERÓN: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math., 24, pp. 113-190 (1964).

[2] DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press (1960).

[3] DIEUDONNÉ: *Elements d'analyse*, Tome 2, Gauthier-Villars (1968).

[4] FAVINI: *Sulla teoria della interpolazione negli spazi vettoriali topologici*, Rend. Mat., (2) 3, pp. 361-390 (1970).

[5] FAVINI: *Sulla interpolazione di operatori compatti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XLV, pp. 279-304 (1971).

[6] GOULAOUIC: *Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications*, Ann. Inst. Fourier, 18, pp. 1-98 (1968).

[7] KANTOROVICH-AKILOV: *Funktional Analysis in normierten Räumen*, Akademie Verlag (1964).

[8] KÖTHE: *Topologische lineare Räume 1*, Springer (1966).

[9] KREJN-PETUNIN: *Scalse of Banach Spaces*, Russian Math. Surveys, 21, pp. 85-159 (1966).

[10] MAGENES: *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali*, Conferenza tenuta al Congreso dell'U.M.I., Genova, pp. 134-197 (1963).

[11] MAURIN: *Methods of Hilbert space*, MM 45 (1967).

[12] PALAIS: *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton (1965).

[13] SCHAEFER: *Topological vector spaces*, (1967).

[14] DIVERSI: *Séminaire Schwartz*, 1953/54.

[15] TREVES: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, (1967).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 marzo 1971.