RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

HUGO BEIRÃO DA VEIGA

Proprietà di sommabilità e di limitatezza per soluzioni di disequazioni variazionali ellittiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 141-171

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__141_0>

PROPRIETÀ DI SOMMABILITÀ E DI LIMITATEZZA PER SOLUZIONI DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI ELLITTICHE

HUGO BEIRÃO DA VEIGA *)

Introduzione.

Dati $x, y \in \boldsymbol{R}^N$ indicheremo con $|x|$ *e* $x \cdot y$ rispettivamente il modulo di x ed il prodotto scalare di x e y; rappresenteremo con (x_i) il vettore di $\boldsymbol{R}^N$ di componenti x_i. *Se* $f(x)=(f_i(x))$ e se $f_i(x) \in X$, ove X è uno spazio di funzioni, porremo per comodità $\| f \|_X = \| \, |f| \, \|_X$.

Indicheremo con Ω un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^N$ di frontiera $\partial\Omega$ e supporremo nota la definizione dello spazio $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Porremo $p'=p/(p-1)$ e, se $1 \leqslant p < N$, $p^* = pN/(N-p)$, $\bar{p}=(p^*)'$.

Sia $V=H^{1,\alpha}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev [1]) relativo all'esponente α, $1<\alpha<N$, V' il duale di V e $\langle \, , \, \rangle$ il pairing fra V' e V. Indicheremo con $A: V \to V'$ l'operatore variazionale ellittico non lineare definito da (1.18), ossia

$$(1) \qquad \langle Au, v \rangle = \int_\Omega \{A(x, \nabla u) \cdot \nabla v + \lambda(x) \, |u|^{\alpha-2} uv\} dx, \qquad \forall v \in V,$$

con $A(x, p)$ soddisfacente (1.16), (1.17).

Siano $\Phi_i : V \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, funzionali convessi s.c.i. (semi continui inferiormente) e propri ($\not\equiv +\infty$) definiti da (1.14) [2]) ossia

---

*) Indirizzo dell'A.: Instituto de Fisica e Matemática, Av. Gama Pinto, 2 Lisboa - 4 Portogallo.

1) Per definizioni precise vedi i numeri seguenti.

2) Per alcuni esempi semplici di tali funzioni cf. l'appendice I.

$$\Phi_i(v)=\int_{B_i}\varphi_i(x,\ \gamma_i v(x))d\mu_i(x) \tag{2}$$

con B_i, μ_i, φ_i e γ_i (ed anche ξ_i) soddisfacenti l'ipotesi 1.4 scritta per $p=\alpha$; inoltre siano $\Psi_j : V \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $1\leqslant j\leqslant m$, m funzionali convessi, s.c.i. e propri del tipo (1.15) i.e.

$$\Psi_j(v)=\begin{cases}0 \text{ se } v\geqslant\theta_j \text{ [opp. se } v\leqslant\theta_j] \text{ su } E_j\,,\\ +\infty \text{ altrove,}\end{cases} \tag{3}$$

ove $E_j\subset\overline{\Omega}$ è chiuso e $\theta_j\in V$. Supponiamo finalmente che esista $u_0\in V$ per cui $\Phi_i(u_0)<+\infty$ e $\Psi_j(u_0)<+\infty$ per tutti gli indici i e j.

Dato che l'operatore A è monotono, emicontinuo, limitato e coercitivo su V la disequazione variazionale

$$\begin{aligned}\langle Au,\ v-u\rangle+\sum_{i=1}^{n}[\Phi_i(v)-\Phi_i(u)]+\\ +\sum_{j=1}^{m}[\Psi_j(v)-\Psi_j(u)]\geqslant\langle F,\ v-u\rangle, \qquad \forall v\in V,\end{aligned} \tag{4}$$

ammette una ed una sola soluzione $u\in V$ per ogni $F\in V'$ (cf. ad esempio [10] teor. 8.5).

Supposto F scritto sotto la forma (1.22) dimostreremo in questo lavoro risultati di regolarità del seguente tipo [3]):

Se $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^q(\Omega)]^N$ e le funzioni ξ_i e θ_j relative *ai funzionali* Φ_i e Ψ_j (cf. (1.12)) appartengono a spazi $H^{1,s}(\Omega)$, [resp. $L^\infty(\Omega)$], con p, q e s convenienti, allora la soluzione u del problema (4) appartiene a $L_*^\beta(\Omega)$, con $\beta=\beta(p,\ q,\ s)$ [resp. a $L^\infty(\Omega)$]. Inoltre saranno dimostrate maggiorazioni per le corrispondenti norme delle soluzioni (cf. (2.39'), (2.40'), (2.42'), (2.43), p. 20). Per i dettagli rimandiamo il lettore al teorema 2.9 (cf. anche i teoremi 2.8 e 2.10).

Risultati di questo tipo si generalizzano ad operatori della forma

3) Per la definizione di $L_*^p(\Omega)$ cf. la def. 1.1.

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega \{A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + B(x, u, \nabla u) v\} dx \tag{5}$$

ove $A : \Omega \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}^N$ e $B : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$, misurabili nella prima variabile e continue nelle altre due soddisfano le maggiorazioni (gli esponenti di $|y|$ possono essere aumentati. Cf. [16] teorema IV)

$$\begin{cases} A(x, y, p) \cdot p \geqslant a |p|^\alpha - b(x) |y|^\alpha - l(x), \\ |B(x, y, p)| \leqslant d(x) |p|^{\alpha-1} + e(x) |y|^{\alpha-1} + f(x), \\ |A(x, y, p)| \leqslant a^{-1} |p|^{\alpha-1} + g(x) |y|^{\alpha-1} + h(x), \end{cases} \tag{6}$$

con a costante positiva; la regolarità delle soluzioni u della disequazione (4) dipenderà allora dagli spazi L^p cui si suppongono appartenere le funzioni al secondo membro delle relazioni (6).

Per particolari funzionali convessi Φ tali risultati (relativi all'operatore A definito in (5)) sono stati dimostrati in [16], teor. I, II e IV[4]); cfr. anche [17]. Essendo lo scopo di questo lavoro generalizzare la forma del funzionale convesso Φ tralascieremo di considerare l'operatore più generale A per semplificare l'esposizione; A sarà dato da (1.18), (1.16), (1.17).

Il metodo seguito per dimostrare il teorema 2.9 si ricollega ad un noto metodo introdotto da G. Stampacchia (cf. ad esempio [14]).

Con la tecnica usata nel presente lavoro si possono ottenere, per le soluzioni di (4), risultati di regolarità negli spazi capacitari (introdotti in [4]).

Si osservi che in ipotesi di maggiore regolarità sui dati si possono dimostrare, in corrispondenza a particolari funzionali convessi Φ, dei risultati di regolarità più forti per le soluzioni di (1.21); cf. ad esempio [9], [3], [15], [16], [8], [6], [2], [5]. In particolare i risultati di hölderiana contenuti in [16] (teor. III e IV) si estendono facilmente e con lo stesso metodo ad una classe più ampia di disequazioni variazionali, sempre del tipo (4) (cf. anche [5]).

L'impostazione dei diversi problemi ai limiti nella forma (4) si tro-

---

[4]) In [16] si cercano soluzioni in particolari convessi chiusi $K \subset V$; tali problemi si possono esprimere tramite la disequazione (4) introducendo funzionali convenienti.

va anche in [2] ove per $\alpha=2$, A operatore lineare a coefficienti regolari, $j=0$, $i=1$, $\varphi_1(x, y)$ indipendente da x, $B_1=\partial\Omega$ e $\mu_1=$area su $\partial\Omega$, si dimostra che se $f\in L^p(\Omega)$, $2\leqslant p<N$, allora $u\in H^{1,p^*}(\Omega)$ e quindi $u\in L^\beta(\Omega)$ con $\beta=Np/(N-2p)$. Noi invece otteniamo, in questo caso, che se $f\in L_*^p(\Omega)$ allora $u\in L_*^\beta(\Omega)$ per lo stesso β.

Infine rimandiamo il lettore all'appendice I per qualche semplice esempio e qualche considerazione su una classe di problemi caratterizzati dalla disequazione variazionale (4).

1. Definizioni e risultati noti.

Sia Ω un aperto limitato e connesso di $\boldsymbol{R}^N$ di frontiera $\partial\Omega$.

DEFINIZIONE 1.1. *Dato $p>1$, indicheremo con $L_*^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $f(x)$ misurabili in Ω e tali che*

$$|\{x\in\Omega : |f(x)|>t\}|\leqslant(A/t)^p, \qquad \forall t>0, \tag{1.1}$$

con A costante positiva; la più piccola costante A che verifica (1.1) *verrà indicata con $|f|_p$.*

Si vede facilmente che lo spazio vettoriale $L_*^p(\Omega)$ è completo rispetto alla quasi-norma $|\ |_p$. Inoltre per $1\leqslant\beta<p$ si ha

$$L^p(\Omega)\subset L_*^p(\Omega)\subset L^\beta(\Omega)$$

con immersioni continue.

È ben noto il seguente risultato:

(1.2) Se $1/p+1/q<1$, $f\in L_*^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$ allora per ogni $E\subset\Omega$ misurabile si ha

$$\int_E |fg|\,dx\leqslant c(p, q)\,|E|^{1-1/q-1/p}\,\|g\|_q\,|f|_p\,.$$

Nel seguito *supporremo che Ω sia localmente dalla stessa parte di $\partial\Omega$, e che $\partial\Omega$ sia lipschitziana,* i.e.:

(1.3) Dato un punto $x_0\in\partial\Omega$ esista un sistema ortogonale di coordinate $(y_1, \ldots, y_N)$ e una funzione lipschitziana $f(y_1, \ldots, y_{N-1})=f(y')$ definita sul cubo chiuso $N-1$ dimensionale $C=\{|y_i|\leqslant 1 : 1\leqslant i\leqslant N-1\}$, e tale che $x_0=(y'_0, f(y'_0))$ per un $y'_0\in C$; inoltre esista $\beta>0$ tale che i punti (y', y_N) per cui $y'\in C$ e $f(y')<y_N<f(y')+\beta$ appartengono a Ω ed i punti (y', y_N) per cui $y'\in C$ e $f(y')-\beta<y_N<f(y')$ appartengano al complementare di $\bar{\Omega}$.

Inoltre si suppone che con un numero finito di tali carte si ricopra tutta la frontiera $\partial\Omega$.

In queste condizioni (cf. ad esempio [11]) si hanno le seguenti proprietà:

a) l'immersione di $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ è continua, $1\leqslant p<N$.

b) l'applicazione di traccia è continua di $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\partial\Omega)$ [5]).

Con $H^{1,p}(\Omega)$, $1\leqslant p<+\infty$, abbiamo indicato il completamento di $C^1(\bar{\Omega})$, spazio delle funzioni con prime derivate continue in $\bar{\Omega}$, rispetto alla norma

$$\| v \|_{1,p}=\| v \|_p+\| \nabla v \|_p ;$$

data la regolarità di Ω segue che $H^{1,p}(\Omega)\equiv W^{1,p}(\Omega)$, spazio delle distribuzioni appartenenti con le sue derivate prime a $L^p(\Omega)$.

Dato un sottoinsieme chiuso E di $\bar{\Omega}$ ed una funzione $u\in H^{1,p}(\Omega)$ diremo (cf. [14]) che $u\geqslant 0$ su E se esiste una successione di funzioni u_n appartenenti a $C^1(\bar{\Omega})$, $u_n\rightarrow u$ in $H^{1,p}$ e $u_n(x)\geqslant 0$ per ogni $x\in E$. Se u, $\theta\in H^{1,p}(\Omega)$ diremo che $u\geqslant\theta$ su E se $u-\theta\geqslant 0$ su E, ecc.

Sia μ una misura a supporto compatto (positiva ed a variazione limitata) in $\bar{\Omega}$ e $B\subset\bar{\Omega}$ tale che $\mu(\complement B)=0$. Si ha il seguente

LEMMA 1.2. *Sia γ una applicazione lineare e continua di $H^{1,p}(\Omega)$, $1<p<+\infty$, in $L_\mu^1(B)$, tale che*

$$\gamma v=v_{/B} \qquad \forall v\in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega}) \text{ [6])}. \tag{1.4}$$

Allora se u e ψ appartengono a $H^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\gamma \max(u, \psi)=\max(\gamma u, \gamma\psi). \tag{1.5}$$

[5]) Più precisamente l'applicazione di traccia è continua a valori in $H^{1/p',p}(\partial\Omega)$.

[6]) $v_{/B}$ = restrizione di v a B. $\operatorname{Lip}(\bar{\Omega})$ = spazio delle funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$.

La (1.5) *si estende ovviamente ad un numero finito qualunque di funzioni.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre senza ledere la generalità che $\psi=0$; sia inoltre $Tz=\max(z, 0)$. Dalla (1.4) segue

$$T\gamma v=\gamma Tv \qquad \forall v\in \mathrm{Lip}\,(\bar{\Omega}). \tag{1.6}$$

Sia $\{u_n\}$ una successione di Lip $(\bar{\Omega})$ convergente verso u in $H^{1,p}(\Omega)$; $Tu_n \to Tu$ debolmente in $H^{1,p}$ (cf. [16]) ed il teorema di Banach e Saks garantisce l'esistenza di una sottosuccessione di $\{u_n\}$, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, tale che

$$M_m(\{Tu_n\}) \to Tu \qquad \text{in } H^{1,p}(\Omega) \tag{1.7}$$

quando $m \to +\infty$; $M_m(\{\alpha_n\})$ indica la media aritmetica $m^{-1}\sum_1^m \alpha_n$ (cf. [1]). Da (1.7) segue

$$\gamma M_m(\{Tu_n\}) \to \gamma Tu \qquad \text{in } L_\mu^1(B); \tag{1.8}$$

inoltre da (1.6) discende

$$\gamma M_m(\{Tu_n\})=M_m(\{\gamma Tu_n\})=M_m(\{T\gamma u_n\}),$$

relazione che assieme alla (1.8) implica

$$M_m(\{T\gamma u_n\}) \to \gamma Tu \qquad \text{in } L_\mu^1(B). \tag{1.9}$$

D'altra parte $T\gamma u_n \to T\gamma u$ in $L_\mu^1(B)$ e pertanto

$$M_m(\{T\gamma u_n\}) \to T\gamma u \qquad \text{in } L_\mu^1(B); \tag{1.10}$$

finalmente da (1.9) e (1.10) segue la tesi.

COROLLARIO 1.3. *Sia* $1<p<+\infty$ e sia Γ *una ipersuperficie contenuta in* $\bar{\Omega}$; *se l'applicazione di traccia*

$$\gamma : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma) \qquad (\textit{oppure } H^{1/p',p}(\Gamma)) \tag{1.11}$$

è continua allora la (1.5) *è verificata per ogni coppia* $u, \psi\in H^{1,p}(\Omega)$; *in particolare le operazioni di traccia e di troncatura commutano.*

IPOTESI 1.4. *Sia* μ *una misura di Borel positiva ed a variazione limitata con supporto in* $\overline{\Omega}$ *e sia* $B \subseteq \overline{\Omega}$ *tale che* $\mu(\complement B) = 0$. *Sia* $\varphi(x, y)$ *una funzione definita su* $B \times \boldsymbol{R}$ *a valori in* $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, μ*-misurabile in* x *per tutti gli* $y \in \boldsymbol{R}$ *e convessa, s.c.i. e propria in* y *per* μ*-quasi tutti gli* $x \in B$. *Sia inoltre* $\gamma : H^{1,p}(\Omega) \to L^1_\mu(B)$ *lineare e continua e supponiamo che esista* $\xi(x) \in H^{1,p}(\Omega)$ *per cui*

$$0 \in \partial_y \varphi(x, \gamma\xi(x)) \tag{1.12}$$

per μ*-quasi tutti gli* $x \in B$, *ove* $\partial_y \varphi(x, z)$ *è il subdifferenziale della funzione* $\varphi(x, \cdot)$ *nel punto* z. *Supporremo ancora che*

$$\varphi(x, \gamma\xi(x)) \in L_\mu^1(B). \tag{1.13}$$

Si ha il seguente risultato

LEMMA 1.5. *Nelle ipotesi* 1.4 *il funzionale*

$$\Phi(v) = \int_B \varphi(x, \gamma v(x)) d\mu(x) \tag{1.14}$$

definito su $H^{1,p}(\Omega)$ *a valori in* $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ *è convesso, s.c.i. e proprio.*

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda la misurabilità di $\varphi(x, \gamma v(x))$ rimandiamo il lettore all'appendice II.

Da (1.12) segue $\varphi(x, \gamma v(x)) \geqslant \varphi(x, \gamma\xi(x))$ per quasi tutti (rispetto s'intende alla misura μ) gli $x \in B$ e perciò $\Phi(v) \geqslant \text{Cost.} = \Phi(\xi)$ per ogni v. Inoltre da (1.13) segue $\Phi(\xi) < +\infty$, per cui Φ è propria. Essendo evidente la convessità di Φ dimostriamo la s.c.i.: Supponiamo che $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$, sia $i = \liminf \Phi(u_n)$, e $i < +\infty$. Poichè $\gamma u_n \to \gamma u$ in $L_\mu^1(B)$ esiste una sottosuccessione $\{\gamma u_\beta\}$ tale che $\lim \Phi(u_\beta) = i$ e $\gamma u_\beta(x) \to \gamma u(x)$ quasi ovunque su B. Allora $\varphi(x, \gamma u(x)) \leqslant \liminf \varphi(x, \gamma u_\beta(x))$ q.o. su B e ne segue dal lemma di Fatou [7]) che

$$\Phi(u) = \int_B \varphi(x, \gamma u(x)) d\mu(x) \leqslant \int_B \liminf \varphi(x, \gamma u_\beta(x)) d\mu(x) \leqslant$$

---

[7]) Si osserva che per ogni β si ha $\varphi(x, \gamma u_\beta(x)) \geq \varphi(x, \gamma\xi(x)) \in L_\mu^1(B)$.

$$\leqslant \liminf \int_B \varphi(x, \gamma u_\beta(x))d\mu(x) = i.$$

Siano E un sottoinsieme chiuso di $\overline{\Omega}$ e $\theta \in H^{1,p}(\Omega)$; allora

LEMMA 1.6. *Il funzionale* $\Psi(v)$ *definito su* $H^{1,p}(\Omega)$ *da*[8])

$$\Psi(v) = \begin{cases} 0 \ \text{se} \ v \geqslant \theta \ (\text{opp.} \ v \leqslant \theta) \ \text{su} \ E, \\ +\infty \ \text{altrove}, \end{cases} \tag{1.15}$$

è un funzionale convesso s.c.i. e proprio.

Infatti l'insieme $\boldsymbol{K} = \{v \in H^{1,p}(\Omega) : \Psi(v) = 0\}$ è convesso e chiuso.

Introduciamo ora l'operatore $\mathcal{A}$ e la disequazione variazionale associata. Siano $A_i(x, p)$, $i = 1, \ldots, N$, N funzioni reali definite su $\Omega \times \boldsymbol{R}^N$, misurabili in x per tutti i $p \in \boldsymbol{R}^N$ e continue in p per quasi tutti gli $x \in \Omega$; sia $A = (A_i)$ e supponiamo che esistano costanti positive ν, η e α, $1 < \alpha < N$[9]), tali che per ogni $p \in \boldsymbol{R}^N$ si abbia

$$\begin{cases} A(x, p) \cdot p \geqslant \nu \, | p |^\alpha \\ | A(x, p) | \leqslant \eta \, | p |^{\alpha - 1} \end{cases} \tag{1.16}$$

per quasi tutti gli $x \in \Omega$. Supponiamo inoltre che per quasi tutti gli $x \in \Omega$ si abbia (in (1.17) basta $\geqslant 0$ data la (1.19))

$$(A(x, p) - A(x, q)) \cdot (p - q) > 0, \qquad \text{se } p \neq q. \tag{1.17}$$

Posto $V = H^{1,\alpha}(\Omega)$ consideriamo l'operatore $A : V \to V'$ così definito:

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega \{A(x, \nabla u) \cdot \nabla v + \lambda(x) \, | u |^{\alpha-2} uv\} dx, \qquad \forall v \in V, \tag{1.18}$$

---

[8]) $v \geq \theta$ è inteso nel senso introdotto a p. 8.

[9]) Non consideriamo il caso $\alpha > N$ poichè $H^{1,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,1-N/\alpha}(\overline{\Omega})$.

ove

$$\lambda(x) \geqslant \lambda > 0, \ \lambda(x) \in L^{N/\alpha}(\Omega). \tag{1.19}$$

Si verifica facilmente che l'operatore A è monotono, emicontinuo, limitato e coercitivo su V. Si tenga presente che $H^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^{\alpha^*}(\Omega)$.

All'operatore A viene associato al solito modo l'operatore differenziale in Ω

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div} A(x, \nabla u) + \lambda(x) \, | u |^{\alpha-2} u. \tag{1.20}$$

Siano dati n funzionali convessi Φ_i su V del tipo (1.14) (con B_i, μ_i, $\varphi_i(x, y)$ e $\xi_i(x)$ soddisfacenti per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, l'ipotesi 1.4) ed m funzionali convessi Ψ_j del tipo (1.15) (in corrispondenza a m 'ostacoli, E_j, θ_j). Sia inoltre verificata la seguente ipotesi di compatibilità:

IPOTESI 1.7. *Esiste* $u_0 \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ *per cui* $\Phi_i(u_0) < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$, *e* $\Psi_j(u_0) < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$.

In queste condizioni è ben noto (cf. ad esempio [10] teor. 8.5) che dato $F \in V'$ esiste ed è unica la funzione $u \in V$ soluzione della disequazione variazionale (4).

Nel seguito rappresenteremo il funzionale $F \in V'$ sotto la forma

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega (f_0 v + f \cdot \nabla v) dx, \qquad \forall v \in V, \tag{1.22}$$

ove $f = (f_i) \in [L^{\alpha'}(\Omega)]^N$ e $f_0 \in L^{\bar{\alpha}}(\Omega)$ con $\bar{\alpha} = (\alpha^*)'$.

OSSERVAZIONE. Possiamo sostituire (1.19) con « $\lambda(x) \geqslant 0$ » se (almeno) uno dei funzionali convessi che compaiono in (4) introduce una condizione di Dirichlet (opp. due ostacoli; esempio 6) su una ipersuperficie contenuta in $\bar{\Omega}$ di misura $(N-1)$-dimensionale non nulla; sotto questa ipotesi la condizione di coercività (cf. ad esempio [10], (8,49)) è ovviamente verificata.

2. Un risultato di regolarità.

LEMMA 2.1. *Essendo $A(x, p)$ una funzione soddisfacente* (1.16), *si ha per quasi tutti gli $x \in \Omega$*

$$A(x, p+q)\cdot p \geqslant \nu_0 |p|^\alpha - \eta_0 |q|^\alpha, \qquad \forall p, q \in \boldsymbol{R}^N \tag{2.1}$$

ove $\eta_0 = \eta_0(\nu, \eta, \alpha)$, $\nu_0 = 2^{-\alpha}\nu$. *Inoltre*

$$|y+\zeta|^{\alpha-2}(y+\zeta) \geqslant 2^{1-\alpha}|y|^{\alpha-2}y - c|\zeta|^{\alpha-1} \qquad \forall y, \zeta \in \boldsymbol{R} \tag{2.2}$$

con $c = c(\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $A(x, p+q)\cdot p = A(x, p+ +q)\cdot(p+q) - A(x, p+q)\cdot q$ ed applicare le (1.16).

Siano ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, le funzioni relative alla proprietà (1.12) dei funzionali Φ_i, e θ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, le funzioni relative alla definizione dei funzionali Ψ_j (cf. (1.15)). Poniamo

$$\zeta(x) = \max(\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x), \theta_1(x), \ldots, \theta_m(x)); \tag{2.3}$$

data una funzione $g(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ indicheremo con $\bar{g}(x)$ la funzione

$$\bar{g}(x) = g(x) - \zeta(x). \tag{2.4}$$

Indicheremo nel seguito con c delle costanti dipendenti al più dalle costanti α, N, ν, η, λ, da Ω e dagli esponenti di sommabilità degli spazi ai quali si suppongono appartenenti le funzioni $\lambda(x)$, f_0, f, ξ_i e θ_j; ad esempio se $f_0 \in L_*^p(\Omega)$ c può dipendere da p ma non dalla particolare f_0. Inoltre il valore di una costante c può essere alterato lungo una dimostrazione senza che il simbolo usato venga cambiato.

LEMMA 2.2. *Siano soddisfatte le ipotesi* 1.4 (*per ogni* Φ_i), 1.7 *e* (1.16) *e sia u la soluzione del problema* (4) *con F dato da* (1.22); *allora per ogni reale non negativo k si ha*

$$\int_{A(k)} |\nabla \bar{u}|^\alpha\, dx + \int_{A(k)} (\bar{u}-k)^\alpha dx \leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant c \left\{ \int_{A(k)} |\nabla \zeta|^{\alpha} dx + \int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u}-k) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{A(k)} f_0(\bar{u}-k) dx + \int_{A(k)} f \cdot \nabla \bar{u} dx \right\}$$

ove

$$A(k) = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) \geqslant k\}. \tag{2.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$v = \min(u, \zeta + k); \tag{2.7}$$

ne segue che

$$\begin{cases} \text{se } x \in A(k) : v - u = k - \bar{u} & \text{e } \nabla_i(v-u) = -\nabla_i \bar{u}; \\ \text{se } x \in \complement A(k) : v - u = \complement & \text{e } \nabla_i(v-u) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

D'altra parte dal lemma 1.2, (2.3) e (2.7) segue che per μ_i-quasi tutti gli $x \in \Gamma_i$ si ha $\gamma_i \xi_i(x) \leqslant \gamma_i \zeta(x)$ e $\gamma_i v(x) = \min(\gamma_i u, \gamma_i \zeta + k)$ e pertanto o $\gamma_i v(x) = \gamma_i u(x)$ oppure $\gamma_i \xi_i(x) \leqslant \gamma_i v(x) \leqslant \gamma_i u(x)$; allora tenendo presente la convessità di $\varphi_i(x, \cdot)$ e (1.12) segue che $\varphi_i(x, \gamma_i v(x)) - \varphi_i(x, \gamma_i u(x)) \leqslant 0$; quest'ultima disuguaglianza implica

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(u) \leqslant 0, \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.9}$$

Inoltre risulta ovviamente

$$\Psi_j(v) - \Psi_j(u) = 0, \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.10}$$

Da (4), (2.8), (2.9) e (2.10) segue

$$-\int_{A(k)} A(x, \nabla \bar{u}(x) + \nabla \zeta(x)) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx -$$

$$-\int_{A(k)} \lambda(x)\,|\,\bar{u}+\zeta\,|^{\alpha-2}(\bar{u}+\zeta)(\bar{u}-k)dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{A(k)} f_0(k-\bar{u})dx - \int_{A(k)} f\cdot\nabla\bar{u}dx$$

relazione che, insieme al lemma 2.1 e a (1.19), implica

$$\nu_0\int_{A(k)} |\,\nabla\bar{u}\,|^{\alpha}\,dx + 2^{1-\alpha}\lambda\int_{A(k)} |\,\bar{u}\,|^{\alpha-2}\,\bar{u}(\bar{u}-k)dx \tag{2.11}$$

$$\leqslant \eta_0\int_{A(k)} |\,\nabla\zeta\,|^{\alpha}\,dx + c\int_{A(k)} \lambda(x)\,|\,\zeta\,|^{\alpha-1}(\bar{u}-k)dx -$$

$$-\int_{A(k)} f_0(k-\bar{u})dx + \int_{A(k)} f\cdot\nabla\bar{u}dx.$$

Poichè $0\leqslant\bar{u}-k\leqslant\bar{u}$ su $A(k)$ si ha

$$\int_{A(k)} |\,\bar{u}\,|^{\alpha-2}\,\bar{u}(\bar{u}-k)dx \geqslant \int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha}dx. \tag{2.12}$$

Da (2.11) e (2.12) segue la tesi.

LEMMA 2.3. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma 2.2 e supponiamo che* $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^{p^*}(\Omega)]^N$ *e* $\zeta\in H^{1,s}(\Omega)$, *con*

$$s=(\alpha-1)p. \tag{2.13}$$

Inoltre sia $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$ *se* $p=N/\alpha$, *e* $\lambda\in L^p(\Omega)$ *se* $p>N/\alpha$. *Allora*

$$|\,A(h)\,|\leqslant c\,\frac{H^{\alpha^*/\alpha}}{(h-k)^{\alpha^*}}\,|\,A(k)\,|^{\alpha^*(1/\alpha-1/s)}, \qquad \forall h>k\geqslant 0 \tag{2.14}$$

ove

$$(2.15)\qquad H=\begin{cases} \|\nabla\zeta\|_s^\alpha+\|\lambda\|_{N/\alpha}^{\alpha/(\alpha-1)}\|\zeta\|_{s^*}^\alpha+|f_0|_p^{\alpha/(\alpha-1)}+|f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \\ \|\nabla\zeta\|_N^\alpha+\|\lambda\|_{(N/\alpha)+}^{\alpha/(\alpha-1)}\|\zeta\|_{1,N}^\alpha+|f_0|_p^{\alpha/(\alpha-1)}+|f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \\ \|\nabla\zeta\|_s^\alpha+\|\lambda\|_p^{\alpha/(\alpha-1)}\|\zeta\|_\infty^\alpha+|f_0|_p^{\alpha/(\alpha-1)}+|f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \end{cases}$$

rispettivamente se $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$, $p=N/\alpha$ *o* $N/\alpha<p<N$. *Con* $(N/\alpha)+$ *abbiamo indicato un qualunque reale maggiore di* N/α.

Saranno utili nel seguito le seguenti relazioni:

$$(2.15')\qquad \begin{cases} \bar{\alpha}<p<N/\alpha \Leftrightarrow \alpha'<p^*<N/(\alpha-1)\Leftrightarrow \alpha<s<N, \\ p=N/\alpha \Leftrightarrow p^*=N/(\alpha-1)\Leftrightarrow s=N, \\ N/\alpha<p<N \Leftrightarrow N(\alpha-1)<p^*<+\infty \Leftrightarrow N<s<+\infty. \end{cases}$$

Consideriamo dapprima il caso $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$; poichè $\alpha/N+1/\alpha^*+$ $+(\alpha-1)/s^*+(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)=1$, segue dalla disuguaglianza di Hölder e dalla immersione di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ in $L^{\alpha^*}(\Omega)$ che

$$(2.16)\qquad \int_{A(k)}\lambda|\zeta|^{\alpha-1}(\bar{u}-k)dx\leqslant$$

$$\|\lambda\|_{N/\alpha}\|\zeta\|_{s^*}^{\alpha-1}\left(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}\cdot|A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}$$

Da (2.5), (2.16) e (1.2) risulta

$$(2.17)\qquad \int_{A(k)}|\nabla\bar{u}|^\alpha dx+\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^\alpha dx\leqslant$$

$$\leqslant c\{\|\nabla\zeta\|_s^\alpha|A(k)|^{1-\alpha/s}+\|\lambda\|_{N/\alpha}\|\zeta\|_{s^*}^{\alpha-1}\cdot$$

$$\cdot\Big(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\Big)^{1/\alpha^*}|A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}+$$

$$+\,|\,f_0\,|_p\left(\int\limits_{A(k)}(\overline{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}|\,A(k)\,|^{1/\overline{\alpha}-1/p}+$$

$$+\,|\,f\,|_{p^*}\left(\int\limits_{A(k)}|\,\nabla\overline{u}\,|^{\alpha}\,dx\right)^{1/\alpha}|\,A(k)\,|^{1/\alpha'-1/p^*}\};$$

da (2.17) si deduce facilmente che

$$\int\limits_{A(k)}|\,\nabla\overline{u}\,|^{\alpha}\,dx+\int\limits_{A(k)}(\overline{u}-k)^{\alpha}\,dx\leqslant \tag{2.18}$$

$$\leqslant c\{\|\,\nabla\zeta\,\|_s^{\alpha}\,|\,A(k)\,|^{1-\alpha/s}+\|\,\lambda\,\|_{N/\alpha}\,\|\,\zeta\,\|_{s^*}^{\alpha-1}\,\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_{A(k)}(\overline{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}|\,A(k)\,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}+$$

$$+\,|\,f_0\,|_p\left(\int\limits_{A(k)}(\overline{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}|\,A(k)\,|^{1/\alpha'-1/p^*}+$$

$$+\,|\,f\,|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)}|\,A(k)\,|^{[\alpha/(\alpha-1)](1/\alpha'-1/p^*)}.$$

Finalmente da (2.18) e dalla maggiorazione di Sobolev $\|\,w\,\|_{\alpha^*}\leqslant\leqslant c\,\|\,w\,\|_{1,\alpha}$ applicata alla funzione $w=v-u$ (cf. (2.8)) si ricava con qualche calcolo la maggiorazione

$$\left(\int\limits_{A(k)}(\overline{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{\alpha/\alpha^*}\leqslant cH\,|\,A(k)\,|^{1-\alpha/s} \tag{2.19}$$

con H dato da (2.15.1). Se $h>k$ dalla (2.19) e dalla maggiorazione

$$|\,A(h)\,|^{\alpha/\alpha^*}(h-k)^{\alpha}\leqslant\left(\int\limits_{A(k)}(\overline{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{\alpha/\alpha^*}$$

segue la (2.14).

Gli altri due casi si dimostrano allo stesso modo: se $p=N/\alpha$ si ha che $\lambda\in L^t(\Omega)$ con $1/t=\alpha/N-1/\delta$, $\delta>0$. Allora dalla disuguaglianza di

Hölder si ricava la maggiorazione

$$\int_{A(k)} \lambda\,|\,\zeta\,|^{\alpha-1}(\bar{u}-k)dx \leqslant \tag{2.20}$$
$$\leqslant \|\,\lambda\,\|_t\,\|\,\zeta\,\|_{(\alpha-1)/\delta}^{\alpha-1} \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*} \cdot$$
$$\cdot\,|\,A(k)\,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/N)};$$

poichè $\|\,\zeta\,\|_{(\alpha-1)/\delta} \leqslant c\,\|\,\zeta\,\|_{1,r} \leqslant c\,\|\,\zeta\,\|_{1/N}$, con r tale che $r^*=(\alpha-1)/\delta$, da (2.20) segue

$$\int_{A(k)} \lambda\,|\,\zeta\,|^{\alpha-1}(\bar{u}-k)dx \leqslant c\,\|\,\lambda\,\|_t\,\|\,\zeta\,\|_{1,N}^{\alpha-1} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*} |\,A(k)\,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/N)};$$

questa maggiorazione sostituisce la (2.16); la dimostrazione prosegue come prima.

Se invece $p>N/\alpha$ la (2.16) si sostituisce con

$$\int_{A(k)} \lambda\,|\,\zeta\,|^{\alpha-1}(\bar{u}-k)dx \leqslant \|\,\lambda\,\|_p\,\|\,\zeta\,\|_\infty^{\alpha-1} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*} |\,A(k)\,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}.$$

COROLLARIO 2.4. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma* 2.2 *e supponiamo inoltre che* $f_0 \in L_*^p(\Omega), f \in [L_*^{p^*}(\Omega)]^N$, $\zeta \in H^{1,s}(\Omega)$ *con* s *dato da* (2.13). *Si hanno i seguenti risultati*:

a) *se* $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$ *allora*

$$|\,\{u-\zeta \geqslant t\}\,| \leqslant (cH^{1/\alpha}t^{-1})^{s^*}, \qquad \forall t>0 \tag{2.21}$$

con H *dato da* (2.15.1).

b) *se* $p = N/\alpha$ *e* $\lambda \in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$ *allora*

$$|\{u - \zeta \geqslant t\}| \leqslant e\,|\Omega|\exp(-cH^{-1/\alpha}t), \qquad \forall t > 0, \tag{2.22}$$

con H *dato da* (2.15.2).

c) *se* $p > N/\alpha$ *e* $\lambda \in L^p(\Omega)$ *allora*

$$u - \zeta \leqslant cH^{1/\alpha} \qquad q.o.\ in\ \Omega \tag{2.23}$$

con H *dato da* (2.15.3).

Il corollario è una semplice conseguenza del lemma 2.3 e del seguente lemma di G. Stampacchia [10]) applicato alla funzione $\varphi(t) = |A(t)|$:

LEMMA 2.5. *Sia* $\varphi(t)$ *una funzione reale definita per* $t \geqslant 0$, *non negativa e non decrescente, tale che per* $h > k \geqslant 0$ *si abbia*:

$$\varphi(h) \leqslant z(h-k)^{\mu}[\varphi(k)]^{\beta}$$

con z, μ *e* β *costanti positive. Allora si ha*:

a) *se* $\beta < 1$:

$$\varphi(t) \leqslant \frac{2^{\mu/(1-\beta)^2}\, z^{1/(1-\beta)}}{\sigma^{\mu/(1-\beta)}}.$$

b) *se* $\beta = 1$:

$$\varphi(t) \leqslant e\varphi(0)\exp[-(ez)^{-1/\mu}t].$$

c) *se* $\beta > 1$:

$$\varphi(t_0) = 0$$

per $t_0 \geqslant z^{1/\mu} 2^{\beta/(\beta-1)}[\varphi(0)]^{(\beta-1)/\mu}$.

Indicheremo ora con ζ' la funzione

$$\zeta'(x) = -\min(\xi_1, \ldots, \xi_n, \theta_1, \ldots, \theta_m); \tag{2.24}$$

---

10) Cf. [12] per i casi a) e c), e [13] per il caso b).

si ha il seguente risultato:

COROLLARIO 2.6. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma* 2.2 *e supponiamo inoltre che* $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^p(\Omega)]^N$, $\zeta' \in^{1,s}(\Omega)$ *con s dato da* (2.13). *Allora*:

a) *se* $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$ *si ha*

$$|\{-u-\zeta' \geqslant t\}| \leqslant (cH^{1/\alpha} t^{-1})^{s^*}, \qquad \forall t > 0, \tag{2.25}$$

con H dato da (2.15.2) *e con* ζ' *al posto di* ζ.

b) *se* $p = N/\alpha$ *e* $\lambda \in L^{(N/\alpha)+}$ *allora si ha*

$$|\{-\zeta'-u \geqslant t\}| \leqslant e\,|\Omega|\exp(-cH^{-1/\alpha}t), \qquad \forall t > 0, \tag{2.26}$$

con H dato da (2.15.3) *e con* ζ' *al posto di* ζ.

c) *se* $p > N/\alpha$ *e* $\lambda \in L^p(\Omega)$ *si ha*

$$-u-\zeta' \leqslant cH^{1/\alpha} \tag{2.27}$$

con H dato da (2.15.3) *e* ζ' *al posto di* ζ.

DIMOSTRAZIONE. Posto $\tilde{\varphi}_i(x, y) = \varphi_i(x, -y)$ segue da (1.12) che

$$0 \in \partial_y \tilde{\varphi}_i(x, -\gamma \xi_i(x)). \tag{2.28}$$

Definiamo

$$\tilde{\Phi}_i(v) = \int_{B_i} \tilde{\varphi}_i(x, \gamma v(x))\, d\mu_i(x) \equiv \Phi_i(-v), \text{ e} \tag{2.29}$$

$$\tilde{\Psi}_j(v) = \Psi_j(-v) \equiv \begin{cases} 0 \text{ se } v \leqslant -\theta_j \text{ (resp. } \geqslant) \text{ su } E, \\ +\infty \text{ altrove.} \end{cases} \tag{2.30}$$

Finalmente poniamo

$$\tilde{A}(x, p) = -A(x, -p); \tag{2.31}$$

la funzione $\tilde{A}$ soddisfa in particolare la proprietà (1.16).

Con la notazione introdotta la (4) si scrive

$$\int_\Omega \tilde{A}(x,\ \nabla(-u))\cdot\nabla(w-(-u))dx+ \tag{2.32}$$

$$+\int_\Omega \lambda\,|-u\,|^{\alpha-2}(-u)(w-(-u))dx+\sum_j[\tilde{\Phi}_i(w)-\tilde{\Phi}_i(-u)]+$$

$$+\sum_j[\tilde{\Psi}_j(w)-\tilde{\Psi}_j(-u)]\geqslant\int_\Omega -f_0(w-(-u))dx+$$

$$+\int_\Omega -f\cdot\nabla(w-(-u))dx,\qquad \forall\, w\in V.$$

Applicando il corollario 2.4 alla soluzione $-u$ di (2.32) si ottengono i risultati descritti nel corollario 2.6. Si tenga presente che le funzioni $-\xi_i$ e $-\theta_j$ svolgono ora il ruolo delle ξ_i e θ_j nel caso anteriore, come segue dalle (2.28) e (2.30); inoltre da (2.24) risulta

$$\zeta'=\max(-\xi_1,\ \ldots,\ -\xi_n,\ -\theta_1,\ \ldots,\ -\theta_m);$$

si osservi finalmente che $(\overline{-u})=-\zeta'-u$.

Lemmma 2.7. *Siano verificate le ipotesi del lemma 2.2, sia u la soluzione di (4), ζ e ζ' le funzioni definite in (2.3) e (2.24) e sia $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^{p*}(\Omega)]^N$, ζ, $\zeta'\in H^{1,s}(\Omega)$ con s dato da (2.13). Allora*

a) *se $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$ si ha*

$$|\{|\,u\,|\geqslant t\}|\leqslant\left(c\,\frac{H^{1/\alpha}+H'^{1/\alpha}+|\,\zeta\,|_{s^*}+|\,\zeta'\,|_{s^*}}{t}\right)^{s^*} \tag{2.33}$$

b) *se $p=N/\alpha$ e $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}$ si ha*

$$|\{|\,u\,|\geqslant t\}|\leqslant c\exp\{-c[H^{1/\alpha}+H'^{1/\alpha}+ \tag{2.34}$$
$$+\|\,\zeta\,\|_{1,N}+\|\,\zeta'\,\|_{1,N}]^{-1}t\}.$$

c) *se $N>p>N/\alpha$ e $\lambda\in L^p(\Omega)$ si ha*

$$\|\,u\,\|_\infty\leqslant cH^{1/\alpha}+cH'^{1/\alpha}+\|\,\zeta\,\|_\infty+\|\,\zeta'\,\|_\infty\,. \tag{2.35}$$

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente risulta per ogni $t>0$

$$(2.36)\qquad \{|u|\geqslant t\}=\{u\geqslant t\}\cup\{-u\geqslant t\}\subset$$
$$\subset\{t/2\leqslant u-\zeta\}\cup\{t/2\leqslant\zeta\}\cup\{-u-\zeta'\geqslant t/2\}\cup\{\zeta'\geqslant t/2\}.$$

Da (2.36) e dai casi a) dei corollari 2.4 e 2.6 otteniamo il caso a) del presente lemma

Da (2.36) e dai casi b) dei corollari riferiti segue il caso b) del teorema. Si osservi che se $f\in[H^{1,N}(\Omega)]^N$ allora

$$(2.37)\qquad |\{\sigma\leqslant|f|\}|\leqslant c\exp(-c\,\|f\|_{1,N}^{-1}\sigma),\qquad \forall\sigma>0;$$

per verificare (2.37) basta 'prolungare, con continuità $H^{1,N}(\Omega)$ ad $H_0^{1,N}(\Omega')$, con $\Omega\subset\subset\Omega'$, osservare che ($\tilde{f}_j$=prolungata di f_j) $\Delta\tilde{f}_j=\sum_i\nabla_i(\nabla_i\tilde{f}_j)$, con $\tilde{f}_j\in H_0^{1,N}(\Omega')$, ed applicare alla soluzione f_j noti risultati di regolarizzazione (cf. [13]).

Finalmente il caso c) del teorema segue dai corrispondenti casi dei corollari 2.4 e 2.6. Si osservi che $H^{1,s}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$.

Poniamo

$$(2.38)\qquad \beta=\min\left(\frac{(\alpha-1)Np}{N-\alpha p},\ \frac{(\alpha-1)Nq}{N-(\alpha-1)q},\ \frac{Nr_i}{N-r_i},\ \frac{Nt_j}{N-t_j}\right)\ (^{11}).$$

Dal lemma 2.7 e dalle definizioni date segue immediatamente il seguente risultato.

TEOREMA 2.8. *Siano soddisfatte le ipotesi* 1.4, 1.7 *e* (1.16), *sia* u *la soluzione di* (4), *e supponiamo che* $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^q(\Omega)]^N$, $\xi_j\in H^{1,r_i}(\Omega)$, $\theta_j\in H^{1,t_j}(\Omega)$. *Allora*:

a) *se* $p>\bar{\alpha}$, $q>\alpha'$, r_i, $t_j>\alpha$, *si ha* $u\in L_*^\beta(\Omega)$ *con* β *dato da* (2.38), *ed inoltre*

---

[11]) Non sono da considerarsi i termini al secondo membro della (2.38) con denominatore nullo o negativo. Se ciò capita per tutti i termini allora $\beta>1$ può essere scelto arbitrariamente grande. Di più possiamo applicare uno dei casi b) o c) del teorema.

$$(2.39)\qquad |u|_\beta \leqslant c\{(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+\sum_i \|\nabla\xi_i\|_{r_i}+$$
$$+\sum_j \|\nabla\theta_j\|_{t_j}+(1+\|\lambda\|_{N/\alpha})^{1/(\alpha-1)}(\sum_i \|\xi_i\|_{r^*_i}+\sum_j \|\theta_j\|_{t^*_j})\}.$$

b) *se* $p\geqslant N/\alpha$, $q\geqslant N/(\alpha-1)$, r_i, $t_j\geqslant N$ *e* $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$, *allora*

$$(2.40)\qquad |\{|u(x)|\geqslant t\}|\leqslant c\exp(-c\mathcal{K}^{-1}t),\qquad \forall t>0,$$

ove

$$(2.41)\qquad \mathcal{K}=(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+(1+\|\lambda\|_{(N/\alpha)+})^{1/(\alpha-1)}\cdot$$
$$\cdot(\sum_i \|\xi_i\|_{1,r_i}+\sum_j \|\theta_j\|_{1,t_j}).$$

c) *se* $N/\alpha<p$, $N/(\alpha-1)<q$, $N<r_i$, t_j, *e se* $\lambda\in L^{\bar{s}}(\Omega)$ *con* $\bar{s}>N/\alpha$, *allora* $u\in L^\infty(\Omega)$ *ed inoltre*

$$(2.42)\qquad \|u\|_\infty\leqslant c\{(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+\sum_i \|\nabla\xi_i\|_{r_i}+$$
$$+\sum_j \|\nabla\theta_j\|_{t_j}+(1+\|\lambda\|_{\bar{s}})^{1/(\alpha-1)}(\sum_i \|\xi_i\|_\infty+\sum_j \|\theta_j\|_\infty)\}.$$

Come caso particolare del teorema precedente si ottiene la proposizione seguente:

TEOREMA 2.9. *Siano soddisfatte le ipotesi* 1.4, 1.7 *e* (1.16), *sia* u *la soluzione di* (4), *e supponiamo che* $\lambda(x)\leqslant c$, $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^q(\Omega)]^N$ (*cf.* (1.22)) $\xi_i H^{1,r_i}(\Omega)$, $\theta_j H^{1,t_j}(\Omega)$ (*cf.* (1.12), (1.15)); *poniamo*

$$(2.43)\qquad \mathcal{H}=(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+\sum_i \|\xi_i\|_{1,r_i}+$$
$$+\sum_j \|\theta_j\|_{1,t_j},$$

e sia β *dato da* (2.38). *Allora*:

a) *se* $p>\bar{\alpha}$, $q>\alpha'$, r_i, $t_j>\alpha$, *si ha* $u\in L_*^\beta(\Omega)$ *ed inoltre*

$$(2.39')\qquad |u|_\beta\leqslant c\mathcal{H}.$$

b) *se* $p \geqslant N/\alpha$, $q \geqslant N(\alpha-1)$, r_i, $t_j \geqslant N$, *allora*

$$|\{|u(x)| \geqslant t\}| \leqslant c \exp(-c\mathcal{H}^{-1}t), \qquad \forall t>0. \tag{2.40'}$$

c) *se* $N/\alpha<p$, $N/(\alpha-1)<q$, $N<r_i$, t_j, *allora* $u \in L^\infty(\Omega)$ *ed inoltre*

$$\|u\|_\infty \leqslant c\mathcal{H}. \tag{2.42'}$$

Le ipotesi usate per ottenere la limitatezza delle soluzioni possono essere indebolite; infatti il caso c) del teorema 2.8 (analogamente per il teorema 2.9) può sostituirsi con il seguente

Teorema 2.10. Siano soddisfatte le ipotesi 1.4, 1.7 e (1.4) e sia u la soluzione di (4); supponiamo che $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^q(\Omega)]^N$, $\lambda \in \overline{L^{\bar{s}}}(\Omega)$ con $p>N/\alpha$, $q>N/(\alpha-1)$, $\bar{s}>N/\alpha$ e supponiamo inoltre che ξ_i, θ_j, $\in L^\infty(\Omega)$. Allora $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty \leqslant c(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+ \\ +(1+\|\lambda\|_{\bar{s}})^{1/(\alpha-1)}(\sum_i \|\xi_i\|_\infty+\sum_j \|\theta_j\|_\infty). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Per dimostrare il teorema basta sostituire in (2.3) le funzioni $\xi_i(x)$ e $\theta_j(x)$ con rispettivamente le funzioni costanti $\tilde{\xi}_i(x)=\operatorname{Sup}\xi_i$ e $\tilde{\theta}_j(x)=$ $=\operatorname{Sup}\theta_j(x)$ (di conseguenza si sostituiscono in (2.24) le funzioni $\xi_i(x)$ e $\theta_j(x)$ con $\tilde{\xi}_i(x)=\operatorname{Inf}\xi_i$ e $\tilde{\theta}_j(x)=\operatorname{Inf}\theta_j$); essendo ancora verificato il lemma 2.2 la (2.44) discende immediatamente dalla (2.42).

Appendice I.

In quest'appendice daremo alcuni esempi (fra i più semplici) di problemi il cui studio si riduce allo studio di disequazioni del tipo (4).

Sia Γ una ipersuperficie contenuta in $\bar{\Omega}$, di misura d'area $\mu=S$ e supponiamo che l'applicazione di traccia $\gamma : H^{1,\alpha}(\Omega) \to L_S^\alpha(\Gamma)=L^\alpha(\Gamma)$ sia continua; sia $\varphi(x, y)$ una funzione definita su $\Gamma \times \boldsymbol{R}$ a valori in $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, misurabile in x e convessa, s.c.i. e propria in y; supponiamo che esista $\xi(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ per cui la (1.12) e la (1.13) siano verificate (con $B=\Gamma$ e $d\mu=ds$). Allora il funzionale

$$(1') \qquad \Phi(v)=\int_\Gamma \varphi(x,\ v(x))dS(x)$$

è convesso s.c.i. e proprio (lemma 1.5) su V. La disequazione (4) con F sotto la forma (1.22), $m=0$, $n=1$ e $\Phi_1=\Phi$ si scrive

$$(2') \qquad \langle Au,\ v-u\rangle+\int_\Gamma [\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)]dS\geqslant$$

$$\geqslant\int_\Omega f_0(v-u)dx+\int_\Omega f\cdot\nabla(v-u)dx, \qquad \forall v\in V.$$

Posto $\operatorname{div} f=\sum_{i=1}^N \nabla_i f_i$, $\nabla_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, le soluzioni della disequazione (2′) verificano, nel senso debole usuale, l'equazione differenziale

$$(3') \qquad \mathcal{a}u\equiv-\operatorname{div} A(x,\ \nabla u)+\lambda\,|\,u\,|^{\alpha-2}u=f_0-\operatorname{div} f$$

nel dominio $\Omega-\Gamma$; inoltre da (2′) e da (3′) segue almeno formalmente [12]), per ogni $v\in V$

$$(4') \qquad \int_\Gamma [\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)]dS\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\partial\Omega}[f-A(x,\ \nabla u)]\cdot n(v-u)dS+\int_{\Gamma-\partial\Omega}[A^{+\nu}(x,\ \nabla u)-A^{-\nu}(x,\ \nabla u)]\cdot$$

$$\cdot\nu(v-u)dS$$

ove n, vettore unitario normale a $\partial\Omega$, è orientato verso l'esterno di Ω e ν è uno dei due vettori unitari normali nel punto x a $\Gamma-\partial\Omega$; inoltre $A^{\pm\nu}(x,\ (\nabla u)(x))=\lim_{\varepsilon\to 0} A(z,\ (\nabla u)(z))$, ove $z=x\pm\varepsilon\nu$, $\varepsilon>0$.

---

12) i.e. la (4′) è verificata nel senso classico se l'operatore, la soluzione e i dati sono regolari.

Se $\Gamma=\partial\Omega$ otteniamo in particolare

$$(5') \qquad \mathcal{A}u=f_0-\operatorname{div} f \qquad \text{su } \Omega,$$

$$(6') \qquad \int_{\partial\Omega}[\varphi(x, v)-\varphi(x, u)]dS \geq \int_{\partial\Omega}(f-A)\cdot n(v-u)dS$$

per ogni $v \in V$.

Osservazione. Siano Ω regolare, $H^{1/\alpha', \alpha}(\partial\Omega)$ lo spazio di tracce delle funzioni di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ e $H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$ il suo duale. Dato $g \in H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$ esistono funzioni $\tilde{f}_0$ e f_i, $1 \leq i \leq N$, appartenenti a $L^{\alpha'}(\Omega)$ tali che

$$(7') \qquad \int_{\partial\Omega} gudS=\int_{\Omega}\tilde{f}_0 udS+\int_{\Omega} f\cdot \nabla udx,$$

ove $f=(f_i)$; dati perciò $e \in L^{\alpha'}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$, posto $f_0=1+\tilde{f}_0$, la disequazione variazionale (2′) si scrive

$$(8') \qquad \langle Au, v-u\rangle+\Phi(v)-\Phi(u) \geq \int_{\Omega} l(v-u)dx+\int_{\partial\Omega} g(v-u)dS;$$

di conseguenza la soluzione u di (2′) soddisfa l'equazione

$$(9') \qquad \mathcal{A}u=l \qquad \text{su } \Omega,$$

con l funzione arbitraria di $L^{\alpha'}(\Omega)$, e

$$(10') \qquad \int_{\partial\Omega}[\varphi(x, v)-\varphi(x, u)]ds \geq \int_{\partial\Omega}(g-A\cdot n)(v-u)dS, \qquad \forall v \in V,$$

con g elemento arbitrario di $H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$.

Se le funzioni $A(x, p)$ sono regolari allora si può dare un senso più preciso alla (10′) poichè si dimostra, servendosi della (9′), che si può definire $A(x, \nabla u)\cdot n$ come elemento di $H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$; cf. [10], p. 205.

Diamo ora alcuni esempi, fra i più semplici, di funzionali del tipo (1′) e dei problemi loro associati.

Esempio 1. Siano $\Gamma=\partial\Omega$, $\xi(x)$ una funzione definita su $\partial\Omega$ e φ data da

$$\varphi_1(x,\ y)=\begin{cases}0 & \text{se } y=\xi(x),\\ +\infty & \text{se } y\neq\xi(x);\end{cases}$$

allora (6′) equivale alla condizione di Dirichlet $u(x)=\xi(x)$ su $\partial\Omega$.

Esempio 2. Siano $\Gamma=\partial\Omega$ e $\varphi\equiv\varphi_2(x,\ y)=0$; allora (6′) equivale alla condizione di Neumann $A(x,\ \nabla u)\cdot n=g(x)$, $x\in\partial\Omega$, ove

$$g(x)=f\cdot n. \tag{11′}$$

Esempio 3. Sia $\Gamma=\partial\Omega$ e

$$\varphi_3(x,\ y)=\frac{k(x)}{2}(y-\xi(x))^2$$

ove $k(x)\geqslant 0$ e $\xi(x)$ sono definite su $\partial\Omega$; in questo caso abbiamo il cosiddetto « terzo problema ai limiti »

$$k(x)[u(x)-\xi(x)]+A(x,\ \nabla u)\cdot n=g(x), \qquad x\in\partial\Omega, \tag{12′}$$

con $g(x)$ data da (11′).

Per verificare che (6′) implica (12′) basta sostituire in (6′) la funzione $v=u\pm\varepsilon\psi$ (con $\varepsilon>0$ e ψ arbitraria su $\partial\Omega$), dividere per ε e passare al limite quando $\varepsilon\to 0$. Per fare la verifica opposta basta osservare che $\varphi_3(x,\ y)\geqslant\varphi_3(x,\ z)+k(x)(z-\xi(x))(y-z)$, $\forall x\in\partial\Omega$, $\forall y,\ z\in\boldsymbol{R}$; da questa relazione e da (12′) segue che l'integrando al primo membro di (6′) maggiora quello al secondo membro.

Esempio 4. Sia $\Gamma=\partial\Omega$, $\xi(x)$ definita su $\partial\Omega$ e

$$\varphi_4(x,\ y)=\begin{cases}0 & \text{se } y\geqslant\xi(x),\\ +\infty & \text{se } y<\xi(x).\end{cases}$$

Il problema ai limiti corrispondente generalizza il cosiddetto « problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno » (cf. [7]); infatti si hanno su $\partial\Omega$ le condizioni

$$\begin{cases} u-\xi \geqslant 0, \\ A\cdot n-g \geqslant 0, \\ (A\cdot n-g)(u-\xi)\geqslant 0. \end{cases}$$

Esempio 5 (*problemi misti*). Preso Γ come l'unione di un numero finito di ipersuperfici $\Gamma^{(i)}$ senza punti interni in comune (nella topologia di Γ), e posto

$$\varphi(x, y)=\varphi^{(i)}(x, y) \text{ se } x\in\Gamma^{(i)},$$

si ottengono problemi di tipo misto. La soluzione u soddisfa su ogni $\Gamma^{(i)}$ la condizione ai limiti relativa alla funzione $\varphi^{(i)}$; in particolare se $\Gamma=\partial\Omega=\Gamma^{(1)}\cup\Gamma^{(2)}$ e se $\varphi^{(i)}(x, y)=\varphi_i(x, y)$, $i=1, 2$, sono le funzioni introdotte negli esempi 1 e 2, otteniamo il problema misto di Dirichlet-Neumann.

Esempio 6 (*ostacoli sottili*). Supponiamo che il funzionale convesso Φ sia dato da $\Phi^{(1)}+\Phi^{(2)}$ ove $\Phi^{(1)}$ corrisponde ad esempio a un problema di frontiera e

$$\Phi^{(2)}(v)=\int_\Gamma \varphi^{(2)}(x, v(x))dS,$$

con Γ sottoinsieme $N-1$ dimensionale di Ω e

$$\varphi^{(2)}(x, y)=\begin{cases} +\infty & \text{se } y<\eta(x), \\ 0 & \text{se } \eta(x)\leqslant y\leqslant\xi(x), \\ +\infty & \text{se } \xi(x)<y; \end{cases}$$

$\eta(x)$ e $\xi(x)$ sono funzioni definite su $\partial\Omega$ e tali che $\eta(x)\leqslant\xi(x)$.

L'introduzione del funzionale convesso $\Phi^{(2)}$ nell'inequazione (2′) corrisponde ad introdurre in $\Omega\times\boldsymbol{R}$ i due ostacoli sottili ($N-1$ dimensionali)

$$s_\eta=\{(x,\ \eta(x)) : x\in\Gamma\},\ S_\xi=\{(x,\ \xi(x)) : x\in\Gamma\}$$

ed a imporre che il grafico $\{(x,\ u(x))\}$ della soluzione u rimanga fra i due ostacoli S_η e S_ξ ; si possono considerare un numero finito qualunque di ostacoli. Il problema degli ostacoli sottili può anche essere affrontato con funzionali del tipo (1.15); cf. [5].

Altri tipi di funzionali Φ_i possono essere considerati, in particolare funzionali del tipo

$$\Phi(v)=\int_E \varphi(x,\ v(x))dx,$$

con E sottoinsieme misurabile di Ω di misura N-dimensionale non nulla.

Osservazione. Si possono considerare dei funzionali convessi dipendenti anche dalle derivate prime; un caso semplice è quello relativo al funzionale Θ definito da

$$\Theta(v)=\int_E \theta(x,\ \nabla v(x))dx$$

con $E\subset\Omega$, θ convessa, s.c.i. (nella seconda variabile) e soddisfacente $0\in\partial_z\theta(x,\ \nabla\zeta(x))$, con $\zeta(x)\in H^{1,\alpha}(\Omega)$.

Per tali funzionali soon ancora verificati risultati del tipo di quelli che abbiamo dimostrato poichè le relazioni

$$(13') \quad \begin{cases} \Theta(u)\geqslant\Theta(\min(u,\ \zeta+k)) \\ \Theta(u)\geqslant\Theta(\max(u,\ \zeta+k)) \end{cases}$$

sono verificate per ogni k reale. Si possono considerare dei funzionali $\Theta(v)$, dipendenti dalle derivate prime, di tipo più generale, per cui pur non essendo verificate maggiorazioni del tipo (13') si riescano a valutare in modo adeguato gli incrementi $\Theta(v)-\Theta(u)$, con v, troncata generica della soluzione u, definita in modo conveniente.

Appendice II.

Dimostreremo in questa appendice che la funzione $\varphi(x, \gamma v(x))$ che compare nel lemma 1.5 è μ-misurabile su B per ogni $v \in H^{1,p}(\Omega)$; più precisamente dimostreremo il seguente risultato:

TEOREMA. *Sia μ una misura su B positiva ed a variazione limitata e sia*

$$(1'') \qquad \varphi : B \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$$

una funzione convessa, propria e s.c.i. nella seconda variabile per μ-quasi tutti gli $x \in B$ e μ-misurabile nella prima variabile per tutti gli $y \in \boldsymbol{R}$.

Supponiamo che esista almeno una funzione reale $\xi(x)$ μ-misurabile su B per cui

$$(2'') \qquad \varphi(x, \xi(x)) < +\infty$$

μ-q.o. su B.

$$(3'') \qquad \varphi(x, \xi(x))$$

sia μ-misurabile.

Allora la funzione $\varphi(x, u(x))$ è μ-misurabile per ogni funzione reale e μ-misurabile $u(x)$.

Dimostreremo questo risultato adoperando note tecniche di teoria della misura. Premettiamo il seguente lemma:

LEMMA. *Sia A un insieme μ-misurabile contenuto in B e sia $u(x)$ μ-misurabile; allora esistono funzioni semplici (e μ-misurabili) $u_n(x)$, nulle su $\complement A$, e tali che:*

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x)$ *μ-q.o. in A.*

b) *dato $x \in A$ esiste un intero positivo $N(x)$ tale che se $n > N(x)$ allora*

$$(4'') \qquad u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u(x)$$

per μ*-quasi tutti gli* $x \in A$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per ogni indice positivo n

$$(5'') \qquad \begin{cases} E_{n,i} = A \cap u^{-1}([(i-1)2^{-n},\ i2^{-n})) & 1 \leqslant i \leqslant n2^n, \\ \tilde{E}_{n,i} = A \cap u^{-1}([-i2^n,\ (i-1)2^{-n})) & 1 \leqslant i \leqslant n2^n, \\ F_n = A \cap u^{-1}([n,\ \infty)), & \\ F_n = A \cap u^{-1}((-\infty,\ -n)); & \end{cases}$$

Evidentemente tali insiemi sono misurabili. Poniamo [13])

$$(6'') \qquad u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} [(i-1)2^{-n}\chi_{E_{n,i}} - i2^{-n}\chi_{\tilde{E}_{n,i}}] + n\chi_{F_n};$$

le u_n sono funzioni semplici, misurabili e inoltre sono nulle su $\complement A$.

Fissato $x_0 \in A$ poniamo $N(x_0) > |\, u(x_0) \,|$; per ogni $n > N(x_0)$ il punto x_0 appartiene ad uno e uno solo degli insiemi $E_{n,i}$ o $E_{n,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n2^n)$; inoltre essendo $u_{n+1}(x_0) \leqslant u_n(x_0) \leqslant u(x_0)$ vale b), ed essendo $u(x_0) - 2^{-n} < u_n(x_0) \leqslant u(x_0)$ vale a).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Per ogni x per cui $\varphi(x, \cdot)$ sia convessa, s.c.i. e propria e per cui $\varphi(x, \xi(x)) < +\infty$, poniamo $Y^-(x) = \{y : y < \xi(x) \text{ e } \varphi(x, y) = +\infty\}$, $Y^+(x) = \{y : \xi(x) < y \text{ e } \varphi(x, y) = +\infty\}$ e

$$(7'') \qquad \begin{cases} a(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in Y^-} y & \text{se } Y^- \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } Y^- = \emptyset \end{cases} \\ b(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in Y^+} y & \text{se } Y^+ \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } Y^+ = \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

---

[13]) χ_E funzione caratteristica di E.

Si ha $a(x) \leqslant \xi(x) \leqslant b(x)$; inoltre è ben noto che la funzione $\varphi(x, \cdot)$ è continua su $[a(x), b(x)]$ a valori in $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, potendo essere $+\infty$ negli estremi dell'intervallo.

Consideriamo i seguenti insiemi misurabili:

$$(8'') \qquad \begin{cases} B_1 = \{x \in B : u(x) < \xi(x)\}, \\ B_2 = \{x \in B : \xi(x) < u(x)\}, \\ B_3 = \{x \in B : \xi(x) = u(x)\}; \end{cases}$$

dal lemma precedente segue l'esistenza di successioni $\{u_n^{(1)}(x)\}$ e $\{u_n^{(2)}(x)\}$ di funzioni semplici e misurabili tali che:

a) $u_n^{(j)}(x) \to u(x)$ q.o. su B_j, $j=1, 2$.

b) dato $x \in B_1$ [risp. B_2] esiste $N(x)$ tale che $n > N(x)$ implica $u_n^{(1)}(x) \geqslant u(x)$ [risp. $u_n^{(2)}(x) \leqslant u(x)$].

Inoltre $u_n^{(j)} = 0$ su $\complement B_j$, $j=1, 2$.

Consideriamo le funzioni

$$(9'') \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x, u_n^{(j)}(x)) & \text{se } x \in B_j, \ j=1, 2, \\ \varphi(x, \xi(x)) & \text{se } x \in B_3, \end{cases}$$

e dimostriamo la loro misurabilità su B, ossia, su B_1, B_2, e B_3 separatamente. Su B_3 un tale fatto è ovvio; dimostriamolo su B_1, ossia, dimostriamo la misurabilità dell'insieme

$$(10'') \qquad \{x \in B_1 : \varphi(x, u_n^{(1)}(x)) \in I\}$$

con I aperto qualunque di $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$:

essendo $u_n^{(1)}(x) = \sum_j \beta_j \chi_{E_j}$ su B_1, con $\cup E_j = B_1$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\beta_j \in \boldsymbol{R}$ e E_j misurabili segue che l'insieme (10″) è uguale all'unione

$$\bigcup_j \{x \in E_j : \varphi(x, \beta_j) \in I\}$$

che è misurabile poichè $\varphi(\ , \beta_j)$ è misurabile per ipotesi.

Per terminare la dimostrazione è sufficiente verificare che

$$(12'') \qquad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)=\varphi(x, u(x)) \qquad \text{q.o. su } B.$$

Se $x\in B_3$ la (12″) è ovvia. Supponiamo invece che sia $x\in B_2$; in questo caso $\xi(x)<u(x)$, $\lim u_n^{(2)}(x)=u(x)$ e, per $n>N(x)$, $u^{(2)}(x)\leqslant u(x)$; in particolare riesce

$$(13'') \qquad a(x)\leqslant\xi(x)<u_n^{(2)}(x)\leqslant u(x), \qquad \text{per } n>N(x).$$

Distinguiamo ora i casi $b(x)<u(x)$ e $u(x)\leqslant b(x)$; nella prima ipotesi si ha, per n sufficientemente grande, $b(x)<u_n^{(2)}(x)$ e pertanto $\varphi(x, u_n^{(2)}(x))=+\infty=\varphi(x, u(x))$. Se invece $u(x)\leqslant b(x)$ la (13″) implica $a(x)<u_n^{(2)}(x)\leqslant u(x)\leqslant b(x)$; ed essendo $\varphi(x, \cdot)$ continua su $[a(x), b(x)]$ ne segue che $\lim\varphi(x, u_n^{(2)}(x))=\varphi(x, u(x))$, come volevamo dimostrare.

Osservazione. L'ipotesi dell'esistenza di $\xi(x)$ tale che la (3″) sia verificata è (nel caso generale) essenziale. Infatti siano $B=(0, 1)\subset\boldsymbol{R}$, μ la misura di Lebesgue su B e $\zeta(x)=x^2$, per $x\in B$. Poniamo

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} g(x) & \text{se } x\in B,\ y=\zeta(x),\\ +\infty & \text{se } x\in B,\ y\neq\zeta(x),\end{cases}$$

con $g(x)$ funzione reale e non misurabile su B. Tutte le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte tranne la (3″); e per $u(x)=\zeta(x)$ la tesi non è verificata.

BIBLIOGRAFIA

[1] Banach, S. et Saks, S.: *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Studia Mathematica, 2 (1930), 51-57.

[2] Brezis, H.: *Problèmes unilateraux* (preprint).

[3] Brezis, H. et Stampacchia, G.: *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Société Mathématique de France, 96 (1968), 153-180.

[4] Conti, F.: *Su alcuni spazi funzionali e loro applicazioni, ecc.*, Boll. Unione Mat. Italiana, N. 4-5 (1969), 554-596.

[5] CONTI, F. e VEIGA, H., BEIRAO DA: *Equazioni ellittiche non lineari con ostacoli sottili. Applicazioni allo studio dei punti regolari* (in corso di stampa sugli Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa).

[6] DIAS, J. P. CARVALHO: *Une classe de problèmes variationnels non lineaires de type elliptique ou parabolique,* (à paraître).

[7] FICHERA, C.: *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema, ecc.,* Mem. Accad. Naz. Lincei, s. 8, vol. 7 (1964), 91-140.

[8] LEWI, H. and STAMPACCHIA, G.: *On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities,* (preprint).

[9] LIONS, J. L.: *Equations aux dérivées partielles et calcul des variations,* Cours Fac. Sciences Paris, 2e semestre (1967), (multigr.).

[10] LIONS, J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* ed. Dunod, Paris (1969).

[11] NEČAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson et Cie (1967).

[12] STAMPACCHIA, G.: *Régularisation des solutions de problèmes aux limites, etc.,* Inter. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem (1960), 399-408.

[13] STAMPACCHIA, G.: *Some limit cases of L^p-estimates for solutions, etc.,* Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 505-510.

[14] STAMPACCHIA, G.: *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques, etc.,* Ann. Inst. Fourier, 15 (1965), 189-250.

[15] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Sulla holderianità delle soluzioni di alcune disequazioni, ecc.,* Ann. Mat. Pura Appl., 83 (1969), 73-112.

[16] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Sur la régularité des solutions de l'équation* div $A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ *avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées* (preprint).

[17] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Régularité pour une classe d'inéquations non linéaires,* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271 série A-23 (6 juillet 1970), 23-25.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1971.