Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

A. Basile

P. Brutti

Alcuni risultati sui $\{q(n-1)+1;n\}$-archi di un piano proiettivo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 107-125

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__107_0>

ALCUNI RISULTATI SUI $\{q(n-1)+1;\ n\}$-ARCHI DI UN PIANO PROIETTIVO FINITO

A. BASILE e P. BRUTTI *)

1. Sia $\pi(q)$ un piano proiettivo di ordine $q=p^r$, p intero primo. Un (k, n)-arco di $\pi(q)$ è un insieme di k punti del piano tali che n è il massimo numero di essi che sono allineati. Supporremo nel seguito $n \geqslant 3$.

Fra i (k, n)-archi di $\pi(q)$ hanno un certo rilievo i $\{q(n-1)+1;\ n\}$-archi, in quanto è stato congetturato da Lunelli e Sce (cfr. L. Lunelli e M. Sce [4]), che, per $q \not\equiv 0$ $(mod\ n)$, l'estremo superiore dei valori di k sia $q(n-1)+1$. Chiameremo tali archi « LS-archi ».

La nota si compone di due parti. Nella prima sono studiate alcune proprietà caratteristiche di una classe di LS-archi, che abbiamo chiamato « regolari », con riferimento a condizioni necessarie di esistenza. Nella seconda si dimostrano alcuni teoremi relativi al problema della completezza degli LS-archi regolari.

Converremo di chiamare « secanti di ordine i » o « i-secanti » $(0 \leqslant i \leqslant n)$, le rette del piano incidenti un (k, n)-arco esattamente in i punti. Saranno frequentemente usati i seguenti simboli:

r_i^P = numero delle i-secanti $(1 \leqslant i \leqslant n)$ passanti per un punto P dell'arco.

h_j^Q = numero delle j-secanti $(0 \leqslant j \leqslant n)$ passanti per un punto Q non dell'arco.

---

*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università di Perugia, 06100 Perugia.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

H_k = numero totale delle k-secanti $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Le n-secanti passanti per un punto P di un LS-arco saranno talvolta dette « secanti di ordine massimo » per P, poichè è di semplice verifica che per ogni punto di un LS-arco passa almeno una n-secante.

2. In questo numero introdurremo il concetto di « regolarità » per i punti di un LS-arco $\mathfrak{C}$ e determineremo una condizione necessaria e sufficiente per la regolarità dei punti di $\mathfrak{C}$.

DEF. Un punto di un LS-arco $\mathfrak{C}$ è detto « regolare » se le secanti di ordine non massimo passanti per esso hanno tutte lo stesso ordine. L'arco $\mathfrak{C}$ è detto « regolare » se tutti i suoi punti sono regolari.

Esistono numerosi esempi non banali di archi che soddisfano la definizione precedente (cfr. A. Barlotti [1], capitolo III).

Se P è un punto di un LS-arco $\mathfrak{C}$, indichiamo con $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} r_i^P$ il numero delle secanti di ordine non massimo passanti per P e con i_0 l'ordine minimo di tali secanti. Si osservi che deve essere $1 \leqslant \lambda \leqslant n-1$. Infatti se fosse $\lambda = 0$, sulle rette per P si avrebbero più di $q(n-1)+1$ punti dell'arco. Sia allora $\lambda \neq 0$, da

$$\lambda(n-2)+(q+1-\lambda)(n-1) \geqslant q(n-1)$$

segue $\lambda \leqslant n-1$. Vale il teorema seguente:

TEOREMA 1. *Un punto P di un* $\{q(n-1)+1;\ n\}$-arco $\mathfrak{C}$ *è regolare se e solo se è verificata la seguente relazione fra gli interi i_0 e λ relativi al punto P:*

$$i_0 = \frac{(\lambda-1)n+1}{\lambda}. \tag{2.1}$$

DIM. Sia P un punto regolare di $\mathfrak{C}$ e indichiamo con i l'ordine delle secanti per P che non sono n-secanti. Si può scrivere:

$$\lambda(i-1)+(q+1-\lambda)(n-1) = q(n-1)$$

e da qui:

$$i=\frac{(\lambda-1)n+1}{\lambda}=i_0\,.$$

Viceversa, sia P un punto di $\mathfrak{C}$ per cui vale la (2.1). I punti diversi da P sulle n-secanti per P sono in numero di $(q+1-\lambda)(n-1)$. I rimanenti punti di $\mathfrak{C}$ diversi da P sono allora $(\lambda-1)(n-1)$. Essi si distribuiscono sulle λ secanti di ordine non massimo in modo che ciascuna ne possieda almeno

$$i_0-1=\frac{(\lambda-1)(n-1)}{\lambda}\,.$$

Ne segue che ciascuna delle λ secanti per P possiede esattamente i_0 punti.

Si osservi che è $\lambda=r_{i_0}^P$ per ogni punto regolare dell'arco. Inoltre $r_{i_0}^P$ deve essere un divisore di $n-1$ e ogni punto regolare possiede al più una 1-secante.

3. Sia $\mathfrak{C}$ un LS-arco regolare. Diciamo « punti di tipo i » queì punti dell'arco per i quali passano r_i^P secanti di ordine i $(i\leqslant n-1)$. Indichiamo con ρ_i il numero dei punti di tipo i dell'arco. Si hanno allora le seguenti relazioni:

$$\sum_{r_i^P\,|\,n-1}{}_i\ \rho_i=q(n-1)+1 \tag{3.1}$$

$$\sum_{r_i^P\,|\,n-1}{}_i\ (q+1-r_i^P)\rho_i=nH_n \tag{3.2}$$

e da queste:

$$(q+1)[q(n-1)+1]-\sum_{r_i^P\,|\,n-1}{}_i\ r_i^P\rho_i=nH_n\,. \tag{3.3}$$

Essendo il secondo membro della (3.3) divisibile per n, se ne conclude che deve essere:

$$\sum_{r_i^P\,|\,n-1}{}_i\ r_i^P\rho_i\equiv 1-q^2\ (mod\ n). \tag{3.4}$$

Si è così ottenuto il seguente:

TEOREMA 2. *Condizione necessaria per l'esistenza in* $\pi(q)$ *di un* $\{q(n-1)+1;\ n\}$*-arco regolare è che valga la* (3.4).

Esamineremo alcune conseguenze del teorema 2, nel caso in cui un *LS*-arco $\mathfrak{C}$ regolare sia dotato solo di punti di tipo uno e punti di tipo i, per un fissato valore $i \leqslant n-1$.

Dalla relazione (2.1) scritta nella forma:

$$r_i^P = \frac{n-1}{n-i} \tag{3.5}$$

e dalle (3.1) e (3.4) si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_i \equiv 1-q \ (mod\ n) \\ \rho_1 + \dfrac{n-1}{n-i}\rho_i \equiv 1-q^2 \quad (mod\ n) \end{cases}$$

che fornisce le congruenze:

$$\rho_i(i-1) \equiv iq(q-1)\ (mod\ n) \tag{3.6}$$

$$\rho_1(1-i) \equiv q(iq-1)+(1-i)\ (mod\ n). \tag{3.7}$$

Le (3.6) e (3.7) possono essere usate in due diverse direzioni di indagine. Fissato un valore di q $(mod\ n)$, esse determinano una condizione necessaria di esistenza per *LS*-archi regolari con due tipi di punti, stabilendo limitazioni a cui deve soddisfare il numero complessivo delle 1-secanti. Noto invece il numero totale delle 1-secanti di un *LS*-arco $\mathfrak{C}$, le (3.6), (3.7) stabiliscono che esso può esistere solo se certe congruenze $(mod\ n)$, sono soddisfatte da q. Mostriamo alcune applicazioni di questo procedimento.

a) Sia $q \equiv 0$ *oppure* 1 $(mod\ n)$. La (3.7) diviene:

$$\rho_1 \equiv 1 \ oppure\ 0 \left(mod\ \frac{n}{(n,\ i-1)} \right)$$

dove $(n,\ i-1)$ è il *M.C.D.* fra n. ed $i-1$.

b) *Se* $\mathfrak{C}$ è un *LS*-arco regolare i cui punti sono tutti di tipo $n-1$, dalla (3.6), ponendo $i=n-1$ e $\rho_{n-1}=q(n-1)+1$ si ottiene:

$$(q+2)(q-1)\equiv 0 \ (mod\ n)$$

e se n è primo ciò implica:

$$q\equiv -2 \ (mod\ n)$$

oppure

$$q\equiv 1 \ (mod\ n).$$

Tale risultato è stato ottenuto per altra via da A. Barlotti (cfr. [1], cap. III-9).

c) Consideriamo ora un *LS*-arco $\mathfrak{C}$ regolare i cui punti siano tutti di tipo uno. La (3.6) si scrive:

$$q(q-1)\equiv 0 \ (mod\ n).$$

Per $q\equiv 1$ $(mod\ n)$, la curva algebrica del piano di Galois $PG(2,\ p^{2m})$ di equazione

$$x_1^{p^m+1}+x_2^{p^m+1}+x_3^{p^m+1}=0$$

è un esempio di arco del tipo in esame con $n=p^m+1$ (cfr. R. C. Bose [2], n. 5). Esistono esempi di archi di questo tipo ($q\equiv 1$ $(mod\ n)$) anche in piani non desarguesiani, coordinatizzati su un « Dickson commutative division ring » (vedi F. Piper [5]). Mostriamo invece che un arco $\mathfrak{C}$ con le proprietà precedenti non può esistere per $q\equiv 0$ $(mod\ n)$.

In tal caso infatti si ha:

$$H_1=q(n-1)+1; \qquad nH_n=q[q(n-1)+1]$$

e di conseguenza

$$H_0=q^2+q+1-H_1-H_n=\frac{q}{n}[q-(n-1)^2].$$

Poichè $H_0\geqslant 0$ ne segue $q\geqslant (n-1)^2$ e tenuto conto che è $q\equiv 0$ $(mod\ n)$,

$q = p^r$ (p primo), si conclude:

$$q \geqslant n^2 \text{ (cioè } H_0 > 0). \tag{3.8}$$

Sia Q un punto non appartenente a $\mathfrak{C}$. Dalle relazioni:

$$h_0^Q + h_1^Q + h_n^Q = q + 1$$

$$h_1^Q + n h_n^Q = q(n-1) + 1$$

si trova:

$$h_1^Q = \eta n + 1; \quad h_0^Q = \frac{q}{n} - \eta(n-1); \quad h_n^Q = \frac{q}{n}(n-1) - \eta \tag{3.9}$$

per un certo intero $\eta \geqslant 0$, variabile da punto a punto.

Posto $n = p^s$, si ha $r \geqslant 2s$ e dalla seconda delle (3.9)

$$\eta = \frac{\frac{q}{n} - h_0^Q}{n-1} = \frac{p^{r-s} - h_0^Q}{p^s - 1}.$$

Il resto della divisione a secondo membro è della forma

$$p^{r-is} - h_0^Q$$

e perchè η sia intero si deve avere:

$$h_0^Q = p^{r-is} \qquad \text{con } i \geqslant 1. \tag{3.10}$$

Risulta cioè:

$$\eta = \frac{\frac{q}{n} - \frac{q}{n^i}}{n-1}$$

e la prima delle (3.9) diviene:

$$h_1^Q = \frac{q}{n-1} \, \frac{n^{i-1} - 1}{n^{i-1}} + 1 = h_1(i) \tag{3.11}$$

dove $h_1(i)$ cresce al crescere dell'intero i.

Sia t una 1-secante di $\mathfrak{C}$. Diciamo y il numero dei punti di t non appartenenti all'arco per cui passa la sola 1-secante t, x il numero dei rimanenti, per ciascuno dei quali passano almeno $\frac{q}{n}+1$ 1-secanti, come segue facilmente dalla (3.11) ponendo in essa $i \geqslant 2$. Si ha allora:

$$x\frac{q}{n} \leqslant H_1 - 1 = q(n-1)$$

cioè:

$$x \leqslant n(n-1); \qquad y \geqslant q - n(n-1).$$

Indicato con $\mathfrak{P}_0$ l'insieme dei punti non appartenenti all'arco, sia $\mathfrak{P}_j \subset \mathfrak{P}_0$ l'insieme dei punti per i quali passano $h_1(j)$ 1-secanti. Poichè due qualsiasi 1-secanti si intersecano in un punto che non appartiene a $\mathfrak{P}_1$, si può scrivere:

$$|\mathfrak{P}_1| \geqslant H_1[q - n(n-1)].$$

D'altra parte:

$$q(q-n+2) = |\mathfrak{P}_0| > |\mathfrak{P}_1| \geqslant [q(n-1)+1][q-n(n-1)],$$

disuguaglianza che è verificata solo per $q \leqslant n^2$ e, ricordando la (3.8), si conclude:

$$q = n^2.$$

La (3.10) si scrive allora:

$$h_0{}^Q = n^{2-i}$$

e sono perciò possibili solo i valori $i = 1, 2$. Di conseguenza:

$$h_1{}^Q = 1,\ n-1; \quad x = n(n-1); \quad y = n; \quad |\mathfrak{P}_0| = n^2(n^2-n+2);$$

$$|\mathfrak{P}_1| = n^3(n-1)+n; \quad |\mathfrak{P}_2| = n(2n-1).$$

Scelto un punto $Q \in \mathfrak{P}_2$, per esso passano $n+1$ 1-secanti ciascuna contenente $n(n-1)-1$ punti di $\mathfrak{P}_2$ diversi da Q; si ha allora:

$$(n+1)[n(n-1)-1] \leqslant |\mathfrak{P}_2| - 1 = n(2n-1) - 1$$

cioè:

$$n^2-2n-1\leqslant 0$$

che è soddisfatta solo per $n\leqslant 2$, contro la condizione assunta inizialmente che sia sempre $n\geqslant 3$. Riassumendo si può enunciare il seguente teorema:

TEOREMA 3. *Condizione necessaria per l'esistenza in* $\pi(q)$, $q=p^r$, *di un* $\{q(n-1)+1;\ n\}$*-arco regolare* $(n\geqslant 3)$, *i cui punti siano di tipo uno, è che risulti:*

$$q\not\equiv 0 \ (mod\ n)$$

e

$$q(q-1)\equiv 0 \ (mod\ n).$$

Questo teorema è una estensione di un risultato ottenuto da A. Barlotti in [1] (pp. III-7).

4. In questo numero studieremo il problema della completezza degli *LS*-archi regolari. Ricordiamo che un $(k,\ n)$-arco del piano $\pi(q)$ si dice completo se non esiste, in $\pi(q)$, alcun $(k',\ n)$-arco $(k'>k)$ che lo contiene propriamente.

Per rendere più semplice l'esposizione dei risultati ottenuti intorno a questo problema, ci sembra opportuno mettere in evidenza le caratteristiche geometriche di due particolari tipi di *LS*-archi regolari che hanno un ruolo importante nell'analisi che svilupperemo.

Indichiamo con $\mathfrak{A}$ la classe degli *LS*-archi regolari con un punto di tipo uno e $q(n-1)$ punti di tipo $n-1$; con $\mathfrak{B}$ la classe degli *LS*-archi regolari con $(n-2)^2$ punti di tipo $n-2$ ed $(n-1)(q-n+3)$ punti di tipo $n-1$.

TEOREMA 4. *Ogni* $\{q(n-1)+k;\ n\}$*-arco* $(n\geqslant k\geqslant 2)$ *contiene dei* $\{q(n-1)+1;\ n\}$*-archi. Se uno di questi,* $\mathfrak{C}$, *è regolare, allora* $\mathfrak{C}$ *appartiene alla classe* $\mathfrak{A}$ o alla classe $\mathfrak{B}$.

DIM. La prima parte del teorema si dimostra con un procedimento di induzione su k.

Sia $\mathfrak{C}'$ un $\{q(n-1)+2;\ n\}$-arco. Per ogni punto P di $\mathfrak{C}'$ passano almeno due n-secanti, infatti:

$$(n-1)r_n^P+(n-2)(q+1-r_n^P)\geqslant q(n-1)+1$$

da cui:

$$r_n^P\geqslant q-n+3$$

cioè:

$$r_n^P\geqslant 2.$$

Da qui segue che l'insieme $\mathfrak{C}'-\{P\}$ è un $\{q(n-1)+1;\ n\}$-arco qualunque sia P appartenente a $\mathfrak{C}'$ e la proposizione è vera per $k=2$. Supponiamola vera per $k=m-1$ e consideriamo un $\{q(n-1)+m;\ n\}$--arco $\mathfrak{C}'$. Lo stesso ragionamento fatto in precedenza porta alla conclusione che per ogni punto P di $\mathfrak{C}'$ passano almeno due n-secanti. Allora $\mathfrak{C}'-\{P\}$ è un $\{q(n-1)+(m-1);\ n\}$-arco contenuto in $\mathfrak{C}'$ che, per ipotesi di induzione, contiene un LS-arco $\mathfrak{C}$.

Sia $\mathfrak{C}$ regolare. Esiste almeno un punto P non appartenente a $\mathfrak{C}$ tale che $h_n^P=0$. Segue facilmente che deve essere $h_0^P=0$ e che esistono, per P, delle secanti di ordine inferiore ad $n-1$. Diciamo $i_M(1\leqslant i_M\leqslant n-2)$ l'ordine massimo di queste secanti. Poichè vi sono delle i_M-secanti per P, esiste almeno un punto Q di $\mathfrak{C}$ di tipo i_M. Se è $i_M>1$, la (3.5) assicura l'esistenza di almeno una i_M-secante passante per Q e non incidente con P, indicata con r. Congiungendo allora con P i punti dell'arco appartenenti ad r, si ottengono, dato che lo LS-arco $\mathfrak{C}$ è regolare, i_M rette i_M-secanti distinte. In tale caso si può quindi scrivere:

$$\sum_{\substack{r_i^Q \mid n-1 \\ i\leq i_M}} \rho_i\geqslant i_M^2 .$$

Se invece $i_M=1$ la disuguaglianza precedente vale banalmente. Si osservi poi che è:

$$(n-1)h_{n-1}^P+(q+1-h_{n-1}^P)i_M\geqslant q(n-1)+1$$

cioè:

$$h_{n-1}^P\geqslant q-\frac{i_M-1}{n-1-i_M}$$

quindi:

$$\rho_{n-1} \geqslant (n-1)\left(q - \frac{i_M - 1}{n-1-i_M}\right).$$

Si ha così:

$$i_M^2 \leqslant \sum_{\substack{r_i^Q \mid n-1 \\ i \leq i_M}} \rho_i = q(n-1)+1-\rho_{n-1} \leqslant q(n-1)+1-(n-1)\left(q - \frac{i_M-1}{n-1-i_M}\right)$$

ed infine:

$$i_M^2 - (n-1)i_M + (n-2) \geqslant 0$$

che è soddisfatta soltanto per $i_M \leqslant 1$ oppure $i_M \geqslant n-2$. È allora necessariamente $i_M = 1$ oppure $i_M = n-2$. Se è $i_M = 1$, per il punto P passano soltanto 1-secanti ed $(n-1)$-secanti all'arco $\mathfrak{C}$. Il seguente sistema:

$$\begin{cases} h_1^P + (n-1)h_{n-1}^P = q(n-1)+1 \\ h_1^P + h_{n-1}^P = q+1 \end{cases}$$

fornisce allora la soluzione $h_1^P = 1$, $h_{n-1}^P = q$. L'arco $\mathfrak{C}$ possiede di conseguenza un solo punto di tipo uno e $q(n-1)$ punti di tipo $n-1$. Esso appartiene dunque alla classe $\mathfrak{A}$. Se invece è $i_M = n-2$, dalla disuguaglianza:

$$(n-1)h_{n-1}^P + (n-2)(q+1-h_{n-1}^P) \geqslant q(n-1)+1$$

segue:

$$h_{n-1}^P \geqslant q-n+3.$$

Ma esiste certamente una $(n-2)$-secante per P e, poichè l'arco è regolare, ne esistono almeno $n-2$. Si ha allora:

$$h_{n-1}^P \leqslant q+1-h_{n-2}^P \leqslant q+1-(n-2) = q-n+3$$

cioè:

$$h_{n-1}^P = q-n+3; \quad h_{n-2}^P = n-2; \quad h_i^P = 0 \ (0 \leqslant i \leqslant n-3).$$

Lo *LS*-arco $\mathfrak{C}$ possiede solo punti di tipo $n-2$ e di tipo $n-1$. Precisamente: $\rho_{n-2}=(n-2)^2$; $\rho_{n-1}=(n-1)(q-n+3)$ e $\mathfrak{C}$ è un *LS*-arco della classe $\mathfrak{B}$. Il teorema è così dimostrato.

Si osservi che il teorema precedente equivale ad affermare che ogni *LS*-arco regolare incompleto appartiene alla classe $\mathfrak{A}$ o alla classe $\mathfrak{B}$. Viceversa non si può dire che ogni *LS*-arco delle classi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sia incompleto. In effetti per $q\equiv-1$ (*mod* n), esistono esempi di archi della classe $\mathfrak{A}$ che sono completi (cfr. A. Barlotti [1], p. III-6, esempio 1), mentre l'insieme dei punti di un piano $\pi(q)$, ad eccezione di q punti di una retta arbitraria del piano, è un esempio di $\{q^2+1;\ q+1\}$-arco regolare della classe $\mathfrak{A}$ incompleto. I due teoremi che seguono mostrano, sotto l'ipotesi $(q,\ n)=1$ *oppure* n, come si ripartiscano gli *LS*-archi completi e gli *LS*-archi incompleti nelle classi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. A tale scopo chiamiamo $\mathfrak{A}_0$ e $\mathfrak{A}_{-1}$ rispettivamente le sottoclassi di $\mathfrak{A}$ tali che, per ogni *LS*-arco regolare appartenente ad $\mathfrak{A}_0$ si ha $q\equiv$ D (*mod* n) e per ogni *LS*-arco regolare appartenente ad $\mathfrak{A}_{-1}$ si ha $q\equiv-1$ (*mod* n). Analogamente definiamo le sottoclassi $\mathfrak{B}_0$ e $\mathfrak{B}_{-1}$ di $\mathfrak{B}$.

TEOREMA 5. *Se* $(n,\ q)=1$ *oppure* n, *allora ogni LS-arco regolare di* $\mathfrak{A}$ *o appartiene ad* $\mathfrak{A}_0$ *o appartiene ad* $\mathfrak{A}_{-1}$.

Gli archi di $\mathfrak{A}_0$ *sono incompleti e si completano univocamente in* $\{q(n-1)+n;\ n\}$*-archi.*

Gli archi di $\mathfrak{A}_{-1}$ *sono completi se* $n\leqslant q$; *sono incompleti se* $n=q+1$ *e si completano univocamente nell'intero piano* $\pi(q)$.

DIM. Sia $\mathfrak{C}\in\mathfrak{A}$. Ponendo nella (3.6) o (3.7) $\rho_1=1$, $\rho_i=\rho_{n-1}=q(n-1)$, si ottiene:

$$q(q+1)\equiv 0 \ (mod\ n)$$

che per $(q,\ n)=1$ *oppure* n implica rispettivamente $q\equiv-1$ (*mod* n) oppure $q\equiv 0$ (*mod* n). Questo prova la prima affermazione del teorema.

Sia ora $\mathfrak{C}\in\mathfrak{A}_0$ e t la 1-secante di $\mathfrak{C}$. Denotiamo con $\mathfrak{P}_0$ l'insieme dei punti di t per cui passano 0-secanti di $\mathfrak{C}$ e con $\mathfrak{P}_1$ l'insieme dei restanti punti di t non appartenenti a $\mathfrak{C}$. Se Q è un punto non sull'arco nè su t, per esso si ha $h_0^Q\geqslant 1$. In caso contrario infatti si potrebbe scrivere:

$$(q+1)(n-1)\leqslant q(n-1)+1$$

e ciò è assurdo essendo $n\geqslant 3$.

D'altra parte si ha:

$$(n-1)h^Q_{n-1}+nh_n{}^Q=q(n-1)+1$$

cioè:

$$h^Q_{n-1}\equiv -1 \ (mod \ n)$$

ovvero:

$$h^Q_{n-1}\geqslant n-1. \tag{4.1}$$

Sia ora R un punto qualsiasi di $\mathfrak{P}_0$, r una 0-secante per R. Contando le $(n-1)$-secanti incidenti r, si ottiene dalla (4.1):

$$q(n-1)+h^R_{n-1}\leqslant H_{n-1}=q(n-1)$$

da cui:

$$h^R_{n-1}=0. \tag{4.2}$$

Dal fatto che per R non passano $(n-1)$-secanti segue:

$$(q-h_0{}^R)n=q(n-1)$$

e quindi:

$$h_0{}^R=\frac{q}{n}. \tag{4.3}$$

Determiniamo il numero totale delle 0-secanti di $\mathfrak{C}$.

$$H_0=q^2+q+1-H_1-H_{n-1}-H_n=\frac{q}{n}(q-n+1).$$

Dalla (4.3) segue subito:

$$|\mathfrak{P}_0|=q-n+1; \quad |\mathfrak{P}_1|=n-1. \tag{4.4}$$

Le $(n-1)$-secanti, dalla (4.2), incidono t solo nei punti di $\mathfrak{P}_1$ e, dalla seconda delle (4.4), si deduce che i punti dell'insieme $\mathfrak{P}_1$ sono privi di

n-secanti. Vi sono allora nel piano esattamente $n-1$ punti per cui non passano n-secanti di $\mathfrak{C}$, ed essi appartengono alla 1-secante t. Aggiungendo a $\mathfrak{C}$ i punti di $\mathfrak{P}_1$ si ottiene una successione di archi regolari incompleti, contenuti in un $\{q(n-1)+n;\ n\}$-arco completo [1]).

Sia infine $\mathfrak{C}\in\mathfrak{A}_{-1}$ e consideriamo dapprima il caso in cui sia $n\leqslant q$. Se l'arco $\mathfrak{C}$ è incompleto esiste almeno un punto $P\notin\mathfrak{C}$ per cui non passa alcuna n-secante. Detta t la 1-secante di $\mathfrak{C}$, si ha che P deve appartenere a t (cfr. M. Tallini Scafati [6], p. 813). Ne segue facilmente $h^P_{n-1}=q$. D'altra parte per ogni altro punto $Q\in t$ $(Q\notin\mathfrak{C})$ vale la relazione:

$$nh_n{}^Q+(n-1)h^Q_{n-1}=q(n-1)$$

da cui si ha:

$$h^Q_{n-1}\equiv -1 \ (mod\ n)$$

cioè:

$$h^Q_{n-1}\geqslant n-1. \tag{4.5}$$

Dalla (4.5) si può scrivere allora:

$$H_{n-1}=q(n-1)\geqslant(q-1)(n-1)+q$$

e da qui: $q\leqslant n-1$, che è assurdo per $n\leqslant q$, e dunque l'arco $\mathfrak{C}$ è completo.

Nel caso in cui sia $n=q+1$, lo LS-arco $\mathfrak{C}$ è un $\{q^2+1;\ q+1\}$-arco. I punti del piano che non appartengono a $\mathfrak{C}$ sono in numero di q e cioè tutti e soli i punti che non appartengono a $\mathfrak{C}$ e che giacciono sulla 1-secante di $\mathfrak{C}$. Questi punti ovviamente non possiedono delle $(q+1)$-secanti; ne segue che l'arco è incompleto e si completa nell'intero piano mediante l'aggiunta dei q punti della 1-secante.

---

1) Si osservi che la definizione di regolarità data nel paragrafo 2 per gli LS-archi si estende a $(k,\ n)$-archi qualsiasi.

Si osservi inoltre che LS-archi regolari della classe $\mathfrak{A}_0$ si possono costruire a partire da $\{q(n-1)+n;\ n\}$-archi, l'esistenza dei quali, almeno per $q=2^r$, è stata provata da R. H. F. Denniston in [3].

Per ciò che riguarda la completezza degli archi della classe $\mathfrak{B}$, si è ottenuto un risultato meno preciso di quello relativo agli archi della classe $\mathfrak{A}$. Rimane infatti da stabilire quando gli archi della classe $\mathfrak{B}_{-1}$ siano completi o incompleti.

TEOREMA 6. *Condizione necessaria per l'esistenza di LS-archi regolari della classe $\mathfrak{B}$ è che sia n dispari, $n \geqslant 5$.*

Se $(n, q)=1$ oppure n, allora ogni LS-arco regolare di $\mathfrak{B}$ o appartiene a $\mathfrak{B}_0$ o appartiene a $\mathfrak{B}_{-1}$.

Gli archi di $\mathfrak{B}_{-1}$ eventualmente incompleti si completano univocamente in $\{q(n-1)+2;\ n\}$-archi.

Gli archi di $\mathfrak{B}_0$ sono completi.

DIM. Sia P un punto di tipo $n-2$ di un LS-arco $\mathfrak{C}$ della classe $\mathfrak{B}$. Dalla (3.5) segue $r^P_{n-2}=\dfrac{n-1}{2}$. Deve allora essere n dispari ed $n \geqslant 5$, perchè per $n=3$ le $(n-2)$-secanti per P divengono 1-secanti e ci si riconduce ad un arco della classe $\mathfrak{A}$.

Per provare la seconda proposizione, si osservi che la (3.4), applicata ad un arco della classe $\mathfrak{B}$, cioè ponendo in essa: $i=n-2,\ n-1$, diviene:

$$q(q+1)\equiv 0 \ (mod\ n)$$

che nell'ipotesi $(n, q)=1$ oppure n implica rispettivamente $q\equiv -1$ $(mod\ n)$ oppure $q\equiv 0$ $(mod\ n)$.

Premettiamo ora alcune osservazioni necessarie per dimostrare sia la terza che la quarta proposizione del teorema.

Se P e Q sono due punti non appartenenti a $\mathfrak{C}$ e tali che per essi non passi alcuna n-secante all'arco, la retta per P e Q è una $(n-1)$-secante. In effetti la retta per P e Q non può essere altro che una $(n-2)$-secante o una $(n-1)$-secante, visto che $h_n^P=0$ implica $h_0^P=0$, per ogni $P \notin \mathfrak{C}$. Supponiamo allora che tale retta sia una $(n-2)$-secante. Se r è un'altra $(n-2)$-secante per Q, che esiste perchè $n \geqslant 5$, congiungendo gli $n-2$ punti di r che appartengono a $\mathfrak{C}$ con P, si ottengono $n-2$ $(n-2)$-secanti per P, che, aggiunte alla retta per P e Q danno luogo ad $n-1$ $(n-2)$-secanti per P e ciò è assurdo.

Un'altra osservazione valida per un qualsiasi arco della classe $\mathfrak{B}$ è che per esso si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$
(4.6)\qquad
\begin{aligned}
&H_0 = \frac{q}{n}(q-n+1)\\
&H_{n-2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\\
&H_{n-1} = (n-1)(q-n+3)\\
&H_n = \frac{q+1}{n}\,[q(n-1)+1] - \frac{(n-2)^2(n-1)}{2n} - \frac{(n-1)^2(q-n+3)}{n}
\end{aligned}
$$

Ultima premessa alla dimostrazione della terza e quarta parte del teorema 6 è che, qualunque sia $Q \notin \mathfrak{C}$, se $\mathfrak{C} \in \mathfrak{B}_0$, si ha $h_0^Q \leqslant \frac{q}{n}$, se $\mathfrak{C} \in \mathfrak{B}_{-1}$ segue $h_0^Q \leqslant \frac{q+1}{n}$. Sia infatti Q un punto non sull'arco. Si può allora scrivere:

$$n(q+1-h_0^Q) \geqslant q(n-1)+1$$

cioè:

$$h_0^Q \leqslant \frac{q-1}{n} + 1. \tag{4.7}$$

La (4.7), se $q \equiv 0$ (*mod* n) diviene:

$$h_0^Q \leqslant \frac{q}{n}, \tag{4.8}$$

mentre, se $q \equiv -1$ (*mod* n) porta a:

$$h_0^Q \leqslant \frac{q+1}{n}. \tag{4.9}$$

Con queste premesse, mostriamo ora che ogni arco della classe $\mathfrak{B}_0$ è completo. Innanzi tutto per ogni punto non appartenente a $\mathfrak{C}$ di una

n-secante passano esattamente $\frac{q}{n}$ rette 0-secanti. Ciò segue dalla prima delle (4.6) e dalla (4.8) quando si ricordi che su una n-secante vi sono esattamente $q-n+1$ punti non appartenenti a $\mathfrak{C}$. Supponiamo che $\mathfrak{C}\in\mathfrak{B}_0$ sia incompleto. Esiste allora un solo punto $P\notin\mathfrak{C}$, per cui non passano n-secanti. Se infatti ve ne fossero almeno due, P e Q, si è già dimostrato che la retta per P e Q è una $(n-1)$-secante. Su di essa vi sono al più $q-n$ punti non di $\mathfrak{C}$ e per i quali passa qualche n-secante. Poichè per ciascuno di tali punti passano $\frac{q}{n}$ 0-secanti si ottiene:

$$(q-n)\frac{q}{n}\geqslant H_0=(q-n+1)\frac{q}{n}$$

e ciò è assurdo.

Sia ora r una $(n-2)$-secante per P. Per ciascuno dei $q-n+2$ punti di r non appartenenti a $\mathfrak{C}$ e diversi da P passano delle n-secanti, per quanto appena dimostrato. Si ha allora:

$$(q-n+2)\frac{q}{n}=H_0=(q-n+1)\frac{q}{n}.$$

L'assurdo prova che $\mathfrak{C}$ non può essere incompleto.

Sia infine $\mathfrak{C}$ incompleto e appartenente a $\mathfrak{B}_{-1}$. Se vi fossero due punti, P e Q, per cui non passano n-secanti a $\mathfrak{C}$, dalla (4.9) e dalla prima delle (4.6), scritta nella forma:

$$H_0=\frac{(q-n)(q+1)}{n}+1,$$

ricordando che la retta per P e Q è una $(n-1)$-secante, si ottiene:

$$\frac{(q-n)(q+1)}{n}\geqslant\frac{(q-n)(q+1)}{n}+1$$

e dunque anche in questo caso esiste un solo punto $P\notin\mathfrak{C}$ per cui non passano n-secanti.

Aggregando a $\mathfrak{C}$ l'unico punto P si ottiene un $\{q(n-1)+2;\ n\}$-arco completo.

5. I risultati ottenuti nel paragrafo precedente danno una classificazione degli *LS*-archi regolari in relazione alla loro completezza.

Come si è visto, ogni *LS*-arco regolare $\mathfrak{C}$ è completo a meno che esso non appartenga alla classe $\mathfrak{A}$ o alla classe $\mathfrak{B}$. Ciascuna di tali classi è costituita da tre sottoclassi disgiunte:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{A}_{-1} \cup \mathfrak{A}^*$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B}_{-1} \cup \mathfrak{B}^*$$

dove $\mathfrak{A}^*$ e $\mathfrak{B}^*$ sono rispettivamente quei sottoinsiemi di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, vuoti se si fa l'ipotesi $(n, q) = 1$ *oppure n,* i cui elementi sono gli *LS*-archi regolari di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ per i quali è:

$$q(q+1) \equiv 0 \ (mod\ n)$$

senza che sia:

$$q \equiv 0 \ (mod\ n) \text{ nè } q \equiv -1 \ (mod\ n).$$

Lo schema seguente illustra la classificazione suddetta. I punti interrogativi indicano che non si sono ottenuti risultati precisi sulla completezza delle classi di archi a cui si riferiscono.

LS-archi regolari

- Classe $\mathfrak{A}$; $\rho_1 = 1$; $\rho_{n-1} = q(n-1)$
  - Classe $\mathfrak{A}_0$; $q \equiv 0 (mod\ n)$ — (incompleti)
  - Classe $\mathfrak{A}_{-1}$; $q \equiv -1 (mod\ n)$
    - $n = q + 1$ — (incompleti)
    - $n \leq q$ — (completi)
  - Classe $\mathfrak{A}^*$; $q(q+1) \equiv 0 (mod\ n)$ ($\mathfrak{A}^* = \emptyset$ se $(n, q) = 1$ o n) — (?)
- Classe $\mathfrak{B}$; $\rho_{n-2} = (n-2)^2$; $\rho_{n-1} = (n-1)(q-n+3)$
  - Classe $\mathfrak{B}_0$; $q \equiv 0 (mod\ n)$ — (completi)
  - Classe $\mathfrak{B}_{-1}$; $q \equiv -1 (mod\ n)$ — [Gli archi incompleti si completano univocamente in $\{q(n-1)+2;\ n\}$-archi] — (?)
  - Classe $\mathfrak{B}^*$; $q(q+1) \equiv 0 (mod\ n)$ ($\mathfrak{B}^* = \emptyset$ se $(n, q) = 1$ o n) — (?)
- *LS*-archi regolari non appartenenti alle classi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. — (completi)

BIBLIOGRAFIA

[1] Barlotti, A: *Some topics in finite geometrical structures,* University of North Carolina, Ist. of Statist. Mimeo Series, N° 439.

[2] Bose, R. C.: *On the application of finite projective geometry for deriving a certain series of balanced Kirkman arrangements,* The golden jubilee commemoration volume (1958-59). Calcutta Mathematical Society.

[3] Denniston, R. H. F.: *Some maximal arcs in finite projective planes,* Journal of Combinatorial Theory, 6 (1969), pp. 317-319.

[4] Lunelli, L. e Sce, M.: *Considerazioni aritmetiche e risultati sperimentali sui $(k, n)_q$-archi,* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. 98 (1964), pp. 3-52.

[5] PIPER, F.: *Polarities of finite projective planes* (Da pubblicare).

[6] TALLINI SCAFATI, M.: *(k, n)-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri,* Roma Accademia Nazionale dei Lincei (1966). Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 aprile 1971.