Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuliano Bratti

Un'osservazione su un criterio di compattezza per le funzioni vettoriali quasi periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 101-105

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__101_0>

UN'OSSERVAZIONE SU UN CRITERIO DI COMPATTEZZA PER LE FUNZIONI VETTORIALI QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI *)

Questa osservazione ha come oggetto l'estensione di un criterio di compattezza per le funzioni quasi periodiche (q.p.) di variabile reale a valori vettoriali, formulato la prima volta nel caso delle funzioni q.p. a valori complessi da L. Amerio [1], p. 293, in un criterio di compattezza per le funzioni debolmente quasi periodiche (d.q.p.) definite su gruppi abeliani localmente compatti (LCA) a valori vettoriali. A tale scopo è necessaria una nuova dimostrazione poichè in quella originale, così come in quella di [2], p. 143, si fa uso *essenziale* del fatto che R, i reali, è spazio topologico separabile (contiene un sottoinsieme numerabile e denso). Qui si farà uso della caratterizzazione di A. Weil delle funzioni q.p. e del teorema di G. Ascoli [3], p. 233.

Sia G un LCA; $\overline{G}$ la sua compattificazione di Bohr; $\beta : G \to \overline{G}$ l'isomorfismo (algebrico) continuo tale che $\beta(G)$ è denso in $\overline{G}$. E sia uno spazio vettoriale topologico sui complessi $\boldsymbol{C}$, localmente convesso e di Hausdorff; E_σ sia E con la sua topologia debole.

DEF. 1. *$\mathcal{C}(G; E_\sigma) = \{f : G \to E_\sigma$ continue e limitate$\}$. $f \in \mathcal{C}(G; E_\sigma)$ è d.q.p. se $\{f(x+h)\}_{h \in G}$ è relativamente compatto in $\mathcal{C}(G; E_\sigma)$ quando quest'ultimo ha la topologia dell'uniforme convergenza su G.*

TEOREMA. *$f \in \mathcal{C}(G; E_\sigma)$ è d.q.p. se e solo se esiste $\varphi : \overline{G} \to E_\sigma$ continua con $\varphi[\beta(x)] = f(x)$, $\forall x \in G$.* (Si fornisce una facile dimostrazione di

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

questo teorema, di A. Weil, dalla quale è possibile ricavare l'estensione ai gruppi *LCA* di un altro teorema di L. Amerio [1], p. 294).

DIMOSTRAZIONE. La condizione sufficiente è subito provata non appena si osservi che se $\varphi : \overline{G} \to E_\sigma$ è continua, poichè $\overline{G}$ è un gruppo compatto, φ è uniformemente continua [3], p. 198. Se h_J è una rete in G, $h_J \supseteq h_{J_i}$ con $\beta(h_{J_i}) \to z_0$ in $\overline{G}$. Allora: $\varphi(z+\beta(h_{J_i})) \to \varphi(z+z_0)$ uniformemente rispetto a $z \in G$, sicché $f(x+h_{J_i}) \to \varphi[\beta(x)+z_0]$ uniformemente rispetto a $x \in G$. Per la condizione necessaria si ha: Se $z \in \overline{G}$, esiste una rete $x_J \in G$ tale che $\beta(x_J) \to z$ in $\overline{G}$. La rete $f(x_J)$ ha, in E_σ, un unico punto di chiusura; se è anche $\beta(y_J) \to z$ in $\overline{G}$, la rete $f(y_J)$ ha lo stesso punto di chiusura della rete $f(x_J)$. Nel fatto: se $f(x_{J_i}) \to s$ e $f(y_{J_l}) \to t$ in E_σ e se $s \neq t$, esiste $\alpha \in E'$ con $\alpha(s) \neq \alpha(t)$. $\alpha \circ f : G \to \boldsymbol{C}$ è q.p.; esiste $\varphi_\alpha : G \to \boldsymbol{C}$ continua con $\varphi_\alpha[\beta(x)] = \alpha \circ f(x)$ $\forall x \in G$.

$$\varphi_\alpha(z) = \lim_i \varphi_\alpha[\beta(x_{J_i})] = \lim_l \varphi_\alpha[\beta(y_{J_l})] = \alpha(s) = \alpha(t).$$

Assurdo. La dimostrazione che la rete $f(x_J)$ ha un unico punto di chiusura è simile a quella già fatta. È ben definita, allora la mappa $\varphi : \overline{G} \to E_\sigma$, $\varphi(z) =$ all'unico punto di chiusura delle reti $f(x_J)$ tali che $\beta(x_J) \to z$ in $\overline{G}$; risulta, inoltre, $\varphi[\beta(x)] = f(x)$ $\forall x \in G$. Rimane da provare la continuità della φ. Sia $\alpha \in E'$; poichè $\alpha \circ f : G \to \boldsymbol{C}$ è q.p., esiste $\varphi_\alpha : \overline{G} \to \boldsymbol{C}$ continua che fattorizza $\alpha \circ f$. Se $z \in \overline{G}$

$$\alpha \circ \varphi[z] = \lim_i \alpha \circ f(x_{J_i}) = \lim_i \varphi_\alpha[\beta(x_{J_i})] = \varphi_\alpha(z)$$

poichè se $\beta(x_J) \to z$ in $\overline{G}$ anche $\beta(x_{J_i})$. In definitiva $\alpha \circ \varphi \equiv \varphi_\alpha$ $\forall \alpha \in E'$: φ è debolmente continua.

OSSERVAZIONE 1. Se $f : G \to E$ è d.q.p. secondo Amerio [1]) e $f(G)$ è relativamente compatto in E si può definire la φ di sopra ponendo $\varphi(z) =$ all'unico punto di chiusura (forte) delle reti $f(x_J)$ se $\beta(x_J) \to z$ in $\overline{G}$ (l'unicità di questo punto è garantita dal fatto che f è d.q.p.). φ

---

1) $f : G \to E$ è d.q.p. secondo Amerio se $\forall \alpha \in E'$ $\alpha \circ f$ è continua e q.p. secondo Bohr.

risulterà ancora debolmente continua; inoltre, poichè $\varphi(\overline{G})\subseteq f(G)^-$ φ risulterà fortemente continua. Allora f è q.p.

DEFINIZIONE 2. *$l^\infty(E)=[\{u_i\}_{i\in N}$ con: $u_i\in E$, $\{u_i\}_{i\in N}$ limitato in $E]$. Su $l^\infty(E)$ la topologia vettoriale abbia una base di intorni di zero negli $U(V)=\{\{u_i\}_{i\in N} : u_i\in V, \forall i\in N\}$, V intorno di zero in E_σ.*

$l^\infty(E)$ è localmente convesso e di Hausdorff ($\forall k\in N$, $P_k : l^\infty(E)\to E_\sigma$, $P_k[\{u_i\}_{i\in N}]=u_k$ è continua).

LEMMA. *Sia $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ lo spazio delle funzioni $f : G\to E_\sigma$* d.q.p. *con topologia relativa da $\mathcal{C}(E; E_\sigma)$. Se la sequenza $f_i(x)\in\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ è tale che:*

a) le $f_i(x)$ sono equicontinue;

b) le $f_i(x)$ sono equinormali[2]*;*

c) se $\varphi_i(z)$ è l'estensione di $f_i(x)$ a $\overline{G}$, $\forall z\in\overline{G}$ $\{\varphi_i(z)\}\subseteq E$ è debolmente relativamente compatto allora la sequenza $f_i(x)$ ha un punto di chiusura in $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$.

Dimostrato il lemma segue subito il criterio di compattezza:

Un sottoinsieme A di $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ è compatto se e solo se:

a_1) A con topologia relativa da $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ è spazio di Lindelöf, [3], pag. 50;

b_1) ogni sequenza in A ha le proprietà a), b) e c) del lemma.

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO. La condizione sufficiente segue subito dal lemma 4 di [3], pag. 137. Se A è compatto in $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ la proprietà a_1) è ovvia. Se A è compatto è totalmente limitato [4], pag. 60; se $\mathcal{U}=\mathcal{U}(G; V)$, V intorno di zero in E_σ, è intorno di zero in $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$, esistono f_{i_1}, f_{i_2}, ..., $f_{i_n}\in\{f_i\}_{i\in N}$ tali che:

---

[2]) La famiglia $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ è equinormale se da ogni rete $h_J\in G$ è possibile estrarre una sottorete h_{J_i} con $f(x+h_{J_i})\to g_f(x)$, uniformemente rispetto a $x\in G$, uniformemente rispetto a $f\in\mathcal{F}$.

$$\{f_i(x)\}_{i\in N}\in f_{i_1}(x)+\mathcal{U}\cup\ldots\cup f_{i_n}(x)+\mathcal{U}.$$

Se U è intorno di zero in E_σ, esiste V_1 intorno di zero in G con: se x' e $x''\in G$ e $x'-x''\in V_1$ $f_{i_h}(x')-f_{i_h}(x'')\in U$, $h=1, 2, \ldots, n$, (ciò perchè le $f_{i_h}(x)$, $h=1, 2, \ldots, n$, sono d.q.p.). Allora, $\forall i\in N$, se $x'-x''\in V_1$, $f_i(x')-$ $-f_i(x'')\in V+V+U$, da cui segue a) del lemma.

b) e c) saranno dimostrate dopo la dimostrazione del lemma.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. Si consideri la funzione $F(x)$: : $G\to l^\infty(E)$, $F(x)=\{f_i(x)\}_{i\in N}$: ciò è possibile a causa di c). $F(x)$ è continua: se $x_j\to x_0$ in G, $f_i(x_j)\to f_i(x_0)$ in E_σ uniformemente rispetto a $i\in N$, per a); allora $F(x_j)\to F(x_0)$ in $l^\infty(E)$. Per b) $F(x)$ è q.p.: esiste $\Phi(z):\overline{G}\to l^\infty(E)$ continua con $\Phi[\beta(x)]=F(x)$ $\forall x\in G$. Se $\Phi(z)=\{\varphi_i(z)\}_{i\in N}$, $\varphi_i(z):\overline{G}\to E_\sigma$, le $\varphi_i(z)$ sono le estensioni delle $f_i(x)$ e, poiché $\Phi(z)$ è continua su un gruppo compatto, le $\varphi_i(z)$ sono equicontinue su $\overline{G}$. Se $\{\varphi_i(z)\}^-$ è la chiusura in $\mathcal{C}(\overline{G}; E_\sigma)$ della sequenza delle $\{\varphi_i\}_{i\in N}$: a) $\{\varphi_i(z)\}^-$ è un insieme equicontinuo; b), a causa dell'ipotesi c), $\forall z_0\in\overline{G}$, $\{\varphi_i(z_0)\}^-$ è compatto in E_σ. In base al teorema di Ascoli, [3], pag. 233, $\{\varphi_i(z)\}^-_{i\in N}$ è compatto in $\mathcal{C}(\overline{G}; E_\sigma)$. Ne segue che la sequenza $\varphi_i(z)$ ammette un punto di chiusura, $\varphi(z)$: la restrizione di $\varphi(z)$ e G dà il punto di chiusura della sequenza $f_i(x)$.

Per la fine della dimostrazione di b_1) nella condizione necessaria del criterio si ha: poichè $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ e $\mathcal{C}(\overline{G}; E_\sigma)$ sono algebricamente e topologicamente isomorfi, se A è compatto in $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}(G; E_\sigma)$ il corrispondente di A in $\mathcal{C}(\overline{G}; E_\sigma)$ è compatto; sicchè se $\{f_i(x)\}_{i\in N}\in A$, le $\varphi_i(z)$ estensioni delle $f_i(x)$ sono equicontinue. Se h_j è una rete in G, $h_j\supseteq h_{ji}$ con $\beta(h_{ji})\to z_0$ in $\overline{G}$; ne segue: $f_i(x+h_{ji})\to\varphi_i(\beta(x)+z_0)$ uniformemente rispetto a $x\in G$. c) segue facilmente dal teorema di Ascoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMERIO, L.: *Funzioni debolmente quasi periodiche,* Rend. Sem. Mat., Padova, 1960.

[2] CORDUNEANU, C.: *Almost periodic functions,* Interscience Publishers, 1968.

[3] KELLEY, J. L.: *General Topology,* D. Van Nostrand Company, 1955.

[4] KELLEY, J. L., NAMIOKA, I.: *Linear topological spaces,* D. Van Nostrand Company, 1963.

[5] WEIL, A.: *L'integrations dans les groupes topologiques et ses applications,* Hermann, 1953.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 marzo 1971.