RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MARTINO

Elementi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo localmente nilpotente

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 81-93

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__81_0>

ELEMENTI DISTRIBUTIVI NEL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI D'UN GRUPPO LOCALMENTE NILPOTENTE

ENRICO MARTINO *)

Introduzione.

Ricordiamo le seguenti definizioni:

Un elemento a di un reticolo L dicesi neutro se, per ogni x, $y \in L$, il sottoreticolo $\langle a, x, y \rangle$ di L è distributivo.

È noto che l'elemento $a \in L$ è neutro se e solo se soddisfa alle seguenti condizioni:

(i) $a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y)$

(ii) $a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y)$

(iii) $\left.\begin{array}{l} a \cup x = a \cup y \\ a \cap x = a \cap y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

per ogni coppia x, $y \in L$.

Un elemento $a \in L$ dicesi un elemento $\cap$-*distributivo* (abbr. $\cap$-d.) se soddisfa alla (i), un elemento $\cup$-*distributivo* ($\cup$-d.) se soddisfa alla (ii), un *u.c.r.-elemento* (elemento con unico complemento relativo) se soddisfa alla (iii). Quest'ultima denominazione è dovuta al fatto che la (iii) esprime che a, in ogni intervallo che lo contiene, ammette al più un unico complemento.

Infine, l'elemento $a \in L$ dicesi $\cap$-*quasi distributivo* ($\cap$-q.d.) se la (i) è soddisfatta per ogni copia x, $y \in L$ tale che sia $a \cap x = a \cap y$. Dualmente, si ha la nozione di elemento $\cup$-quasi distributivo ($\cup$-q.d.).

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Diversi autori si sono proposti di caratterizzare alcuni dei suddetti elementi nel reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi d'un gruppo G. Higman, Sato e Zappa hanno determinato in modo completo gli elementi $\cup$-d. di $\mathfrak{L}(G)$ [6]. Curzio e Napolitani hanno provato che gli elementi $\cup$-q.d. di $\mathfrak{L}(G)$ coincidono con quelli $\cup$-d. [1] [3]. Zappa ha determinato gli elementi $\cap$-d. e gli elementi neutri di $\mathfrak{L}(G)$ quando G è un gruppo finito [6]. Infine, Napolitani ha determinato gli u.c.r.-elementi e gli elementi $\cap$-q.d. di $\mathfrak{L}(G)$ sempre nel caso che G sia finito [4].

Nella presente nota dimostreremo che, ove G sia un gruppo localmente nilpotente, i vari tipi di elementi di $\mathfrak{L}(G)$ di cui sopra coincidono tutti fra loro, di guisa che per essi vale la già nota caratterizzazione degli elementi $\cup$-d.

Dedurremo infine che, qualora G sia in più privo di torsione, la presenza in $\mathfrak{L}(G)$ di uno dei suddetti elementi non banale implica che G è localmente ciclico.

I simboli usati saranno quelli usuali della teoria dei gruppi Se G è un gruppo periodico, indicheremo con $\omega(G)$ l'insieme dei divisori primi (ivi compreso il numero 1) degli ordini degli elementi di G. Nel seguito, per comodità di linguaggio, parleremo di u.c.r.-sottogruppi, di sottogruppi neutri ecc. di G anzichè di u.c.r.-elementi, di elementi neutri ecc. di $\mathfrak{L}(G)$.

1. In questo numero stabiliremo il predetto risultato nel caso d'un gruppo localmente nilpotente periodico.

PROPOSIZIONE 1. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) del gruppo periodico G, allora N è caratteristico in G.*

DIMOSTRAZIONE. Come nel caso dei gruppi finiti [4] si prova che, se N contiene un elemento d'ordine primo p, allora esso contiene il sottogruppo $M_1^{(p)}$ generato dagli elementi d'ordine p di G.

Consideriamo ora la catena ascendente di sottogruppi caratteristici

$$M_1^{(p)} \subseteq M_2^{(p)} \subseteq \ldots \subseteq M_i^{(p)} \subseteq \ldots$$

così definita $M_1^{(p)}$ ha il significato già dichiarato e, induttivamente, $M_i^{(p)}$ è il sottogruppo generato da $M_{i-1}^{(p)}$ e dagli elementi d'ordine p mod. $M_{i-1}^{(p)}$.

Sia $h \in N$ un p-elemento: indicato con τ il minimo indice tale che $h \in M_\tau^{(p)}$, mostriamo che è $M_\tau^{(p)} \subseteq N$.

Ciò è vero se $|h|=p$, possiamo dunque procedere per induzione rispetto ad n, essendo n definito dalla $|h|=p^n$.

Dall'ipotesi su τ segue l'esistenza di un elemento $h^{p^{n'}} \in N$ $(1 \leq n' \leq n)$ tale che il primo $M_i^{(p)}$ cui esso appartiene sia $M_{\tau-1}^{(p)}$. Poichè $|h^{p^{n'}}|<p^n$, per l'ipotesi induttiva è $M_{\tau-1}^{(p)} \subseteq N$.

$N/M_{\tau-1}^{(p)}$ è un u.c.r-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) di $G/M_{\tau-1}^{(p)}$ e contiene l'elemento $h \in M_{\tau-2}^{(p)}$ d'ordine p, dunque contiene il sottogruppo $M_\tau^{(p)}/M_{\tau-1}^{(p)}$ generato dagli elementi d'ordine p di $G/M_{\tau-1}^{(p)}$; di conseguenza $N \supseteq M_\tau^{(p)}$. Ora, poichè $M_\tau^{(p)}$ è caratteristico in G, ogni automorfismo di G lascia h in N e quindi, essendo ogni elemento di N esprimibile come prodotto di p-elementi, trasforma N in sè, onde N è caratteristico in G.

Ricordiamo le seguenti definizioni [5]:

Dicesi *gruppo dei quetornioni d'ordine* $2^n (n \geq 3)$ il gruppo

$$Q^{(n)} = \langle a,\ b / a^{2^{n-1}} = e,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ b^2 = a^{2^{n-2}} \rangle.$$

Dicesi *gruppo infinito dei quaternioni* il gruppo

$$Q^{(\infty)} = \langle b,\ a_n (n=1,\ 2\ \ldots) / b^2 = a_1\ ,\ a_n{}^b = a_n^{-1},\ a_{n+1}^2 = a_n\ ,\ a_1{}^2 = e \rangle.$$

Nel seguito, parlando di gruppo dei quaternioni senza ulteriori specificazioni, intenderemo indifferentemente un gruppo finito o infinito dei quaternioni.

LEMMA 2. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo non banale del p-gruppo localmente finito H, allora H è localmente ciclico oppure è un gruppo dei quaternioni; in quest'ultimo caso è $|N|=2$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia K un sottogruppo finito di H. Scelti in H due elementi a, b tali che sia $e \neq a \in N$, $b \notin N$, il sottogruppo $K' = K \cup \langle a, b \rangle$ è finito e $K' \cap N$ ne è un u.c.r.-sottogruppo non banale, perciò K' è ciclico o dei quaternioni [4] e tale è quindi anche K. Ne segue che H ha rango speciale finito, quindi è un p-gruppo di Cernikov ([2], pag. 231) e come tale soddisfa alla condizione del normalizzante. Inoltre, H ha un solo sottogruppo d'ordine p, perciò esso è localmente ciclico o dei quaternioni ([5], pag. 193). In questultimo caso è poi $|N|=2$, chè altrimenti esisterebbe un sottogruppo finito di H dei quaternioni dotato di un u.c.r.-sottogruppo non banale d'ordine diverso da 2, cosa assurda [4].

OSSERVAZIONE 3. *Ferme le ipotesi e le notazioni del Lemma precedente, N è confrontabile con ogni sottogruppo di H, sicchè N è neutro in H.*

TEOREMA 4. *Sia N un sottogruppo del gruppo periodico localmente nilpotente G.*

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) *N è un u.c.r.-sottogruppo di G.*

b) *N è normale in G e, per ogni $p \in \omega(N) \cap \omega(G/N)$, il p-sottogruppo di Sylow S_p di G è localmente ciclico o dei quaternioni, in quest'ultimo caso essendo $|S_p \cap N|=2$.*

c) *N è un sottogruppo neutro di G.*

d) *N è un sottogruppo $\cap$-q.d. di G.*

e) *N è un sottogruppo $\cup$-q.d. di G.*

DIMOSTRAZIONE. *a)* $\Rightarrow$ *b)*.

Già si è provato che $N \triangleleft G$ (Teorema 1). Quanto al resto, essendo G localmente finito, basta provare che $T_p = S_p \cap N$ è sottogruppo non banale di S_p per concludere in virtù del Lemma 2.

Invero, poichè $p \in \omega(N)$ e G è un S-gruppo, è $T_p \neq e$.

Essendo poi $p \in \omega(G/N)$, esiste un p-elemento a di G non contenuto in N, onde $a \in S_p$ e quindi $S_p \cap N \neq S_p$.

b) $\Rightarrow$ *c)*.

Per ogni $p \in \omega(G)$, se S_p è il p-sottogruppo di Sylow di G, $S_p \cap N$ è neutro in S_p (Osservazione 3), onde, essendo $G = \prod_{p \in \omega(G)} S_p$, N è neutro in G ([6], pag. 79).

c) $\Rightarrow$ *d)*, *c)* $\Rightarrow$ *e)*.

Evidente.

$d) \Rightarrow a)$, $e) \Rightarrow a)$.

Ragionando come nel caso dei gruppi finiti [4], si riconosce che un sottogruppo normale $\cap$-q.d. ($\cup$-q.d.) d'un gruppo G è un u.c.r.-sottogruppo di G; donde la conclusione.

2. In questo numero estenderemo il Teorema 4 al caso che G sia un gruppo localmente nilpotente qualsiasi.

PROPOSIZIONE 5. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) del gruppo G. Se g ed a sono due elementi permutabili di G con $e \neq a \in N$, allora g ha ordine finito mod. N.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che N sia un u.c.r.-sottogruppo, analogamente procedendosi se esso è $\cap$-q.d.

Supposto, per assurdo, che g abbia ordine finito mod. N, si verifica direttamente che

(1) $$\langle g \rangle \neq \langle ga \rangle,$$

(2) $$\langle g \rangle \cap N = \langle ga \rangle \cap N = e,$$

(3) $$\langle g \rangle \cup N = \langle ga \rangle \cup N.$$

Le (1), (2), (3) contraddicono l'ipotesi su N; donde l'asserto.

PROPOSIZIONE 6. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) del gruppo G. Se g ed a sono due elementi permutabili di G con $e \neq a \in N$, $g \notin N$ e se $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = e$, allora a ha ordine finito e primo con l'ordine di g mod. N.*

DIMOSTRAZIONE. Sia N un u.c.r.-sottogruppo di G. Detto n l'ordine di g mod. N, poniamo

$$V_1 = \langle g, a^n \rangle, \qquad V_2 = \langle ga, a^n \rangle.$$

Si verifica direttamente che

$$N \cap V_1 = N \cap V_2, \qquad N \cup V_1 = N \cup V_2,$$

talchè dall'ipotesi su N si trae $V_1 = V_2$.

Ne segue che $ga \in V_1$, donde facilmente la conclusione.

Dalla proposizione precedente discende immediatamente il seguente corollario che nel seguito sfrutteremo sistematicamente:

COROLLARIO 7. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) del gruppo G. Se g ed a sono due elementi permutabili di G con $e \neq a \in N$, $g \notin N$ e se a è aperiodico, allora è $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle \neq e$.*

PROPOSIZIONE 8. *Sia H un sottogruppo normale del gruppo G. Se N è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) di G ed $H \cap N = e$, allora NH/H è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) di G/H.*

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo, come al solito a considerare il caso che N sia un u.c.r.-sottogruppo di G.

Siano V_1/H, V_2/H due sottogruppi di G/H tali che

$$\frac{NH}{N} \cap \frac{V_1}{H} = \frac{NH}{H} \cap \frac{V_2}{H} \tag{1}$$

$$\frac{NH}{H} \cup \frac{V_1}{H} = \frac{NH}{H} \cup \frac{V_2}{H}. \tag{2}$$

Dalla (1) si trae

$$V_1 \cap NH = V_2 \cap NH$$

e quindi

$$(V_1 \cap N)H = (V_2 \cap N)H.$$

Da questa segue poi facilmente

$$V_1 \cap N = V_2 \cap N$$

mentre dalla (2) segue direttamente

$$V_1 \cup N = V_2 \cup N$$

di guisa che l'ipotesi su N implica $V_1 = V_2$ e quindi $V_1/H = V_2/H$; donde l'asserto.

LEMMA 9. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) del gruppo nilpotente G (di cui indicheremo con Z_k il k-esimo centro). Se Z_1 è periodico e inoltre $Z_1 \nsubseteq N$, $Z_1 \cap N \neq e$, allora G è periodico.*

DIMOSTRAZIONE. Supposto che sia periodico Z_{k-1}, proviamo che è periodico Z_k. Dal Corollario 7 segue intanto che è periodico N, di guisa che basta provare che ogni elemento di Z_k ha ordine finito mod. $N \cup Z_{k-1}$. Invero, supposto, per assurdo, che $z_k \in Z_k$ abbia ordine infinito mod. NZ_{k-1}, se $a \in N \cap Z_k$, $a \neq e$, si verifica facilmente che

(1) $$\langle z_k \rangle \neq \langle z_k a \rangle$$

(2) $$\langle z_k \rangle \cup N = \langle z_k a \rangle \cup N.$$

Si ha inoltre

(3) $$\langle z_k \rangle \cap N = \langle z_k a \rangle \cap N = e.$$

Infatti, se $x \in \langle z_k a \rangle \cap N$, si ha

$$x = (z_k a)^m = z_k{}^m a^m z_{k-1}$$

con m intero opportuno e $z_{k-1} \in Z_{k-1}$.

Ne segue che $z_k{}^m \in NZ_{k-1}$ onde è $m=0$ e quindi $x=e$.

Le (1), (2), (3) contraddicono l'ipotesi su N; donde la conclusione.

LEMMA 10. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$-q.d.) del gruppo localmente nilpotente G, allora N è normale in G.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che G sia addirittura nilpotente di classe n. Visto che il teorema è ovvio per i gruppi abeliani, possiamo supporre, induttivamente, che esso sia vero per i gruppi nilpotenti di classe $n-1$.

Distinguiamo i seguenti casi:

1) $Z_1 \subseteq N$.

N/Z_1 è un u.c.r-sottogruppo di G/Z_1 che è nilpotente di classe $n-1$, sicchè, per l'ipotesi induttiva, è $N/Z_1 \lhd G/Z_1$, onde $N \lhd G$.

2) $Z_1 \nsubseteq N$, $Z_1 \cap N \neq e$.

Se Z_1 è periodico anche G e periodico (Lemma 9), onde $N \lhd G$ (Proposizione 1).

Se Z_1 non è periodico, dal Corollario 7 segue l'esistenza d'uno $z_1 \in Z_1$ aperiodico tale che $z_1 \notin N$ e dalla Proposizione 5 segue che

$\langle z_1 \rangle \cap N \neq e$. Pertanto, sempre dal Corollario 7 si deduce facilmente che ogni elemento di G ha ordine finito mod. $\langle z_1 \rangle \cap N$, talchè $G/\langle z_1 \rangle \cap N$ è periodico, onde $N/\langle z_1 \rangle \cap N \lhd G/\langle z_1 \rangle \cap N$ e quindi $N \lhd G$.

3) $Z_1 \cap N = e$.

Dalla Proposizione 8 segue che NZ_1/Z_1 è un u.c.r.-sottogruppo di G/Z_1 sicchè, per l'ipotesi induttiva, è $NZ_1/Z_1 \lhd G/Z_1$ onde $NZ_1 \lhd G$ e quindi, essendo $\omega(N) \cap \omega(Z_1) = 1$ (Proposizione 6), risulta $N \lhd G$.

Il lemma si estende poi in modo ovvio al caso che G sia localmente nilpotente.

PROPOSIZIONE 11. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo normale non identico del gruppo G, allora G/N è periodico.*

DIMOSTRAZIONE. Supposto, per assurdo, che $g \in G$ abbia ordine infinito mod. N, se $a \in N$, $a \neq e$, si verifica facilmente che

$$\langle g \rangle \neq \langle ga \rangle \tag{1}$$

$$\langle g \rangle \cap N = \langle ga \rangle \cap N = e \tag{2}$$

$$\langle g \rangle \cup N = \langle ga \rangle \cup N \tag{3}$$

contro l'ipotesi su N; donde l'asserto.

COROLLARIO 12. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo non identico del gruppo nilpotente G. Se $N \cap Z_1 = e$, allora G è periodico.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Corollario 7 segue che N è periodico, dal Lemma 10 e dalla Proposizione 11 che G/N è periodico; donde la conclusione.

Dal corollario precedente e dal Lemma 9 segue poi immediatamente il

COROLLARIO 13. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo non identico del gruppo nilpotente G. Se Z_1 è periodico e $Z_1 \not\subseteq N$, allora G è periodico.*

LEMMA 14. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo non banale del gruppo localmente nilpotente non periodico G. Se g, h sono elementi aperiodici di G, allora è $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$; inoltre, la parte periodica di G è contenuta in N.*

DIMOSTRAZIONE. Se G è abeliano esiste, in virtù della Proposizione 11, un elemento $a \in N$ aperiodico e, se $g \notin N$, risulta $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle \neq e$ (Corollario 7), donde facilmente la conclusione.

Se G è nilpotente di classe n, possiamo supporre, induttivamente, che il lemma valga per i gruppi nilpotenti di classe $n-1$. Distinguiamo i seguenti casi:

1) *Z_1 è periodico.*

È $Z_1 \subsetneqq N$, chè altrimenti G sarebbe periodico (Corollario 13 e Proposizione 11), perciò N/Z_1 è un u.c.r.-sottogruppo non banale del gruppo non periodico G/Z_1 nilpotente di classe $n-1$. Se ora g ed h sono due elementi aperiodici di G, per l'ipotesi induttiva risulta $\langle gZ_1 \rangle \cap \langle hZ_1 \rangle \neq Z_1$, da cui $g^r = h^s z_1$ (con r ed s interi opportuni, $z_1 \in Z_1$) talchè, detto t l'ordine di z_1, si ha $g^{rt} = h^{st}$.

Inoltre, se g è un elemento di G tale che $g \notin N$, per l'ipotesi induttiva gZ_1 è un elemento aperiodico di G/Z_1, onde g è un elemento aperiodico di G.

2) *Z_1 non è periodico.*

Se $Z_1 \not\subset N$ (potendo essere eventualmente $Z_1 = N$), si conclude facilmente applicando il Corollario 7.

Se $Z_1 \subsetneqq N$, dal Corollario 7 discende che ogni elemento $g \notin N$ ha ordine finito mod. Z_1, cioè che gZ_1 è un elemento periodico di G/Z_1, talchè dalla ipotesi induttiva si trae che G/Z_1 è periodico, dopo di che l'asserto discende ancora facilmente dal Corollario 7.

È poi immediato estendere il lemma al caso che G sia un qualunque gruppo localmente nilpotente.

LEMMA 15. *Se G è un gruppo nilpotente finitamente generato non periodico tale che, per ogni coppia g, h di elementi aperiodici, sia $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$, allora ogni sottogruppo non periodico di G contiene un sottogruppo non periodico normale in G.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = \langle y_1, y_2, \dots, y_k \rangle$ con gli $y_1, \dots, y_k$ d'ordine infinito e sia H un sottogruppo non periodico di G. Allora $\langle y_1 \rangle \cap \langle y_2 \rangle \cap \dots \cap \langle y_k \rangle \cap H$ è il sottogruppo richiesto.

TEOREMA 16. *Sia N un sottogruppo non banale del gruppo localmente nilpotente G.*

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) *N è un u.c.r.-sottogruppo di G.*

b) 1) *N è normale in G.*

2) *G/N è periodico.*

3) *Per ogni eventuale coppia di elementi aperiodici $g, h \in G$ $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$.*

4) *Se G non è aperiodico la parte periodica di G è contenuta in N.*

5) *Se H è un sottogruppo di G, fissato comunque un sottogruppo $K \subseteq H \cap N$ normale in H tale che H/K sia periodico, per ogni $p \in \omega\left(\frac{H}{H \cap N}\right) \cap \omega\left(\frac{H \cap N}{K}\right)$ il p-sottogruppo di Sylow S_p di H/K è localmente ciclico o dei quaternioni, in quest'ultimo caso essendo $\left|S_p \cap \frac{H \cap N}{K}\right| = 2$.*

c) *N è un sottogruppo neutro di G.*

d) *N è un sottogruppo $\cap$-q.d. di G.*

e) *N e un sottogruppo $\cup$-q.d. di G.*

DIMOSTRAZIONE.

a) $\Rightarrow$ *b)*.

Le 1), 2), 3), 4), sono state dimostrate rispettivamente nel Lemma 10, nella Proposizione 11 e nel Lemma 14.

Quanto alla 5), basta osservare che $H \cap N/K$ è un u.c.r-sottogruppo del gruppo periodico H/K ed applicare a questo il Teorema 4.

b) $\Rightarrow$ *c)*.

Detti V_1, V_2 due sottogruppi qualsiasi di G, dimostriamo che

(i) $N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$.

Allo scopo, basta provare che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) \subseteq (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$$

l'inclusione inversa essendo evidente.

Se $x \in N \cap (V_1 \cup V_2)$, siano $V'_1 \subseteq V_1$ e $V'_2 \subseteq V_2$ due sottogruppi finitamente generati tali che $x \in N \cap (V'_1 \cup V'_2)$. Per concludere che $x \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$ basta allora provare che

(ii) $N \cap (V'_1 \cup V'_2) = (N \cap V'_1) \cup (N \cap V'_2)$.

All'uopo distinguiamo i seguenti casi:

j) *V'_1 e V'_2 sono entrambi periodici.*

Essendo G un S-gruppo, è periodico anche $H = V'_1 \cup V'_2$, perciò, essendo $H \cap N$ un u.c.r.-sottogruppo di H, dal Teorema 1 segue che esso è un sottogruppo $\cap$-d. di H, donde la (ii).

jj) *V'_1 e V'_2 sono entrambi non periodici.*

In tal caso, per la 2) N è non periodico, sicchè per la 3) tale è anche $N \cap V'_1 \cap V'_2$ onde questo, in virtù del Lemma 16, ammette un sottogruppo K non periodico normale in $H = V'_1 \cup V'_2$. Per la 2) H/K è periodico, perciò la 4), in virtù del Teorema 4, porge che $N \cap H/K$ e un sottogruppo $\cap$-d. di H/K, di guisa che risulta

$$\frac{N \cap H}{K} \cap \left(\frac{V'_1}{K} \cap \frac{V'_2}{K}\right) = \left(\frac{N \cap H}{K} \cup \frac{V'_1}{K}\right) \cup \left(\frac{N \cap H}{K} \cap \frac{V'_2}{K}\right),$$

donde la (ii).

jjj) *V'_1 è periodico e V'_2 è non periodico.*

In tal caso è $V'_1 \subseteq N$ mentre $V'_2 \cap N$ è non periodico, talchè, tenendo conto di jj), si ha

$$\begin{aligned} N \cap (V'_1 \cup V'_2) &= N \cap (V'_1 \cup (N \cap V'_2) \cup V'_2) = \\ &= \{N \cap [V'_1 \cup (N \cap V'_2)]\} \cup (N \cap V'_2) = \\ &= V'_1 \cup (N \cap V'_2) = (N \cap V'_1) \cup (N \cap V'_2). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che

$$N \cup (V_1 \cap V_2) = (N \cup V_1) \cap (N \cup V_2)$$

onde N è neutro.

$c) \Rightarrow d)$, $c) \Rightarrow e)$.

Evidente.

$d) \Rightarrow a)$, $e) \Rightarrow a)$.

Seguono dalla normalità di N (Lemma 10).

OSSERVAZIONE. *Se, in particolare, G è abeliano, la* b) *del teorema precedente si può così esprimere:*

1) *G ed N hanno lo stesso rango che vale* 0 *oppure* 1, *nel quale ultimo caso la parte periodica di G è contenuta in N.*

2) *Fissato comunque un sottogruppo $H \subseteq N$ tale che G/H sia periodico, per ogni $p \in \omega(N/H) \cap \omega(G/N)$, il p-sottogruppo di Sylow di G/H è localmente ciclico.*

COROLLARIO 18. *Sia G un gruppo localmente nilpotente privo di torsione ed N un suo sottogruppo non banale. N è neutro se e solo se G è localmente ciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Sia N neutro Per concludere basta provare che G è abeliano perchè allora, in virtù dell'Osservazione 17, esso ha rango 1 e quindi è localmente ciclico.

Orbene, se $g, h \in G$, è $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$ (Lemma 14), talchè risulta $g^m h = h^m g$ con m intero opportuno, ma allora, poichè G nelle ipotesi attuali è un R-gruppo (cioè ogni suo elemento ha al più una radice n-esima), è anche $gh = hg$ [2].

Viceversa, se G è localmente ciclico $\mathfrak{L}(G)$ è, come noto, distributivo e quindi ogni suo elemento è neutro.

BIBLIOGRAFIA

[1] CURZIO, M.: *Elementi $\cup$-quasi distributivi in alcuni reticoli di gruppi*, Ric. di matematica, vol. XIII, 1964.

[2] KUROSH, A. G.: *The theory of groups*, New York, 1955.

[3] NAPOLITANI, F.: *Elementi $\cup$-quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo*, Ric. di matematica, vol. XIV, 1965.

[4] Napolitani, F.: *Elementi $\cap$-quasi distributivi ed u.c.r.-elementi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito*, Ric. di matematica, vol. XVIII, 1968.

[5] Schenkman, E.: *Group theory*, New York, 1965.

[6] Suzuki, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroup*, Springer Verlag, Berlin, 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 aprile 1970.