Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

M. Miranda

Un principio di Massimo Forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 355-366

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__355_0>

UN PRINCIPIO DI MASSIMO FORTE PER LE FRONTIERE MINIMALI E UNA SUA APPLICAZIONE ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DELLE SUPERFICI DI AREA MINIMA

M. MIRANDA *)

Introduzione.

La presente nota è composta di tre paragrafi e un'appendice. Nel primo paragrafo si introduce il concetto di insieme localmente pseudoconvesso, che è la generalizzazione al caso di frontiere lipschitziane del concetto di insieme con frontiera avente curvatura media non negativa. Nel secondo paragrafo si prova un principio di massimo forte per frontiere minimali. Nel terzo paragrafo si applica detto principio di massimo forte alla risoluzione del problema al contorno, con dato continuo, per l'equazione delle superfici di area minima, con o senza ostacoli. Nell'appendice si verificano due diseguaglianze utilizzate nel corso della nota e si prova la regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione delle superfici di area minima. Quest'ultimo fatto, ad alcuni noto come conseguenza della maggiorazione a priori del gradiente delle soluzioni dell'equazione delle superfici di area minima, non mi risulta essere già nella letteratura.

1. Definiamo il concetto di insieme localmente pseudoconvesso e verifichiamo che, nel caso regolare, esso può esprimersi in termini della curvatura media della frontiera dell'insieme.

DEFINIZIONE. Un insieme $\Omega \subset R^n$ dicesi pseudoconvesso in un punto $x \in \partial\Omega$ se $\exists$ un aperto $A \ni x$ tale che:

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università di Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R. nell'anno accademico 1970-71.

a) $\partial\Omega \cap A$ può rappresentarsi come grafico di una funzione lipschitziana di $(n-1)$ variabili,

b) $\forall E \subset R^n$ misurabile limitato con $\overline{E} \subset A$ vale la diseguaglianza

$$|D\varphi_\Omega|(A) \leq |D\varphi_{\Omega \cup E}|(A), \text{[1]} \tag{1}$$

Ω sarà detto localmente pseudoconvesso se è pseudoconvesso in ogni punto $x \in \partial\Omega$.

La (1) può essere scritta in maniera più classica. Supposto che esista un aperto $B \subset R^{n-1}$ ed una funzione lipschitziana $f: B \to R$, con

$$\{x \in B \times R;\ x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})\} \subset A,$$

tale che

$$\Omega \cap A = \{x \in A \cap (B \times R),\ x_n > f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}. \tag{2}$$

In questo caso avremo (cfr. [5], Teo. 1.10, pag. 525).

$$|D\varphi_\Omega|(A) = \int_B \sqrt{1+|Df|^2}\, dx_1, \ldots, dx_{n-1}, \tag{3}$$

quindi la (1) implica, $\forall \psi \in C_0^1(B)$, $\psi \leq 0$ e sufficientemente piccola,

$$\int_B \sqrt{1+|Df|^2}\, dx_1, \ldots, dx_{n-1} \leq \int_B \sqrt{1+|D(f+\psi)|^2}\, dx_1, \ldots, dx_{n-1}, \tag{4}$$

da cui segue

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_B \frac{D_i f \cdot D_i \psi}{\sqrt{1+|Df|^2}}\, dx_1, \ldots, dx_{n-1} \leq 0, \quad \forall \psi \in C_0^1(B),\ \psi \leq 0. \tag{5}$$

---

[1]) Con φ_Ω indichiamo la funzione caratteristica di Ω e con $|D\varphi_\Omega|(A)$ la variazione totale del gradiente di φ_Ω su A che è ben definita per ogni insieme misurabile Ω dalla relazione:

$$|D\varphi_\Omega|(A) = \sup\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i g_i(x)dx;\ g_i \in C_0^1(A),\ |g(x)| \leq 1,\ \forall x \in A\}.$$

La (5) è equivalente, per quanto provato in [5] (cfr. Teorema 2.3, p. 531) e per la stretta convessità del funzionale dell'area, alla (1).

Nel caso di $f \in C^2(B)$ la (5) risulta equivalente alla diseguaglianza puntuale

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} D_i \frac{D_i f(x)}{\sqrt{1+|Df(x)|^2}} \geq 0, \qquad \forall x \in B.$$

La (6) esprime la non negatività della curvatura media di $\partial\Omega \cap A$.

La condizione (6) è stata introdotta da Jenkins e Serrin (cfr. [4]) nello studio del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima. Pertanto gli insiemi localmente pseudoconvessi possono considerarsi la generalizzazione, al caso di insiemi con frontiera lipschitziana, degli insiemi considerati da Jenkins e Serrin. Sono poi ovviamente insiemi localmente pseudoconvessi tutti gli insiemi convessi.

2. Dimostriamo una proposizione che può essere vista come una generalizzazione del classico principio del massimo forte valido per le soluzioni dell'equazione delle superfici di area minima [2]).

PROPOSIZIONE. *Sia $\Omega \subset R^n$ pseudoconvesso in $x_0 \in \partial\Omega$. Sia E un insieme con frontiera minimale in un aperto $A \ni x_0$* [3]) *e sia*

$$E \cap A \subset \overline{\Omega} \cap A, \qquad x_0 \in \partial\overline{\Omega} \cap \partial E \text{ }^{4)}.$$

Allora esiste un aperto A', $x_0 \in A' \subset A$, tale che $\partial E \cap A' = \partial\Omega \cap A'$ e $\partial E \cap A'$ è grafico di una funzione analitica reale di $n-1$ variabili soluzione dell'equazione delle superfici di area minima.

---

[2]) Principio del massimo forte (cfr. [11], pag. 326)

« Siano u, $v \in C^2(G)$, $G \subset R^m$ aperto connesso, soluzioni dell'equazione delle superfici di area minima. Sia $u(x) \geq v(x)$ $\forall x \in G$ ed esista $x_0 \in G$ con $u(x_0) = v(x_0)$ allora $u(x) = v(x)$ $\forall x \in G$.

[3]) E la frontiera minimale in A se $|D\varphi_E|(A) < +\infty$ e se $\forall K \subset A$ compatto e $M \subset A$ misurabile con $M - K = E - K$ vale la diseguaglianza

$$|D\varphi_E|(A) \leq |D\varphi_M|(A), \text{ (v. anche [13] o [14]).}$$

[4]) Con ∂E intendiamo la frontiera essenziale di E (cfr. Def. 3.1, pag. 44 di [8] cioè

$$x \in \partial E \Leftrightarrow \forall \rho > 0,\ 0 < \text{mis}\{y \in E;\ |y-x| < \rho\} < \text{mis}\{y;\ |y| < \rho\}.$$

Alla dimostrazione della proposizione ora enunciata premettiamo il seguente

LEMMA. *Se* $f: B_\rho = \{x \in R^{n-1};\ |x| < \rho\} \to (-\delta, \delta)$ *è lipschitziana, se* $E \subset R^n$ *ha frontiera minimale in* $A = B_\rho \times (-\delta, \delta)$ *e verifica*

$$E \subset \{x \in B_\rho \times R;\ \delta > x_n \geq f(x_1, \ldots, x_{n-1})\},$$

allora $\forall \sigma < \rho$, *detta* f_σ *la funzione continua* f_σ *su* B_ρ *coincidente con* f *in* $B_\rho - B_\sigma$, *e soluzione dell'equazione delle superfici di area minima in* B_σ [5]) *si ha anche*

$$E \subset \{x \in B_\rho \times R;\ x_n \geq f_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\sigma < \rho$ indichiamo con L_σ l'insieme

$$\{x \in B_\rho \times R;\ \delta > x_n \geq f_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Per una nota diseguaglianza (cfr. [6], pag. 17 oppure l'appendice a questo lavoro) si ha

$$(7) \qquad |D\varphi_{E \cup L_\sigma}|(A) + |D\varphi_{E \cap L_\sigma}|(A) \leq |D\varphi_E|(A) + |D\varphi_{L_\sigma}|(A).$$

D'altra parte, per le proprietà di minimo di E e L_σ abbiamo,

$$(8) \qquad |D\varphi_E|(A) \leq |D\varphi_{E \cap L_\sigma}|(A),$$

$$(9) \qquad |D\varphi_{L_\sigma}|(A) \leq |D\varphi_{E \cup L_\sigma}|(A).$$

Quindi nelle (7), (8) e (9) deve valere il segno di eguaglianza. L'eguaglianza in (9) amplica (cfr. [5], Teo. 2.3, pag. 531 e [2], Teo. 9.1, pag. 245) [6]) $E \cup L_\sigma = L_\sigma$ quindi $E \subset L_\sigma$. c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE. Supponiamo per semplicità che $x_0 = 0$ e che esista

$$f: B_\rho = \{x \in R^{n-1};\ |x| < \rho\} \to (-\delta, \delta)$$

[5]) Per l'esistenza di f_σ si veda [2] (Teor. 7.1, p. 243) e si tenga conto di [3].

[6]) Osserviamo che nel Teor. 9.1 di [2] la continuità di g non è necessaria.

lipschitziana con

$$\Omega \cap [B_\rho \times (-\delta, \delta)] = \{x \in B_\rho \times R;\ \delta > x_n \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\},$$

e che E abbia frontiera minimale in $B_\rho \times (-\delta, \delta)$.

Fissato $\sigma < \rho$, applicando il lemma e osservato che deve risultare $f_\sigma \geq f$ (f è subsoluzione dell'equazione delle superfici di area minima, v. anche la seconda diseguglianza dell'appendice), per la condizione $0 \in \partial E$ dovrà essere $f_\sigma(0) = f(0) = 0$ e quindi il punto 0 deve risultare regolare per ∂E (cfr. [12], Teor. 2, pag. 36). Esisterà quindi $\sigma_0 \leq \rho$ e $\delta_0 \leq \delta$ tali che

$$E \cap [B_{\sigma_0} \times (-\delta_0, \delta_0)] = \{x \in B_{\sigma_0} \times (-\delta_0, \delta_0);\ x_n \geq u(x_1, \ldots, x_{n-1})\},$$

dove $u : B_{\sigma_0} \to (-\delta_0, \delta_0)$ è una funzione reale analitica soluzione dell'equazione delle superfici di area minima su B_{σ_0}. Avremo quindi, per il classico principio del massimo forte applicato a u e f_σ, $\forall \sigma \leq \sigma_0$, che $u(x) = f_\sigma(x)$, $\forall \, |x| \leq \sigma \leq \sigma_0$. Quindi anche $u(x) = f(x)$, $\forall \, |x| \leq \sigma_0$.

c.v.d.

3. Applichiamo il principio del massimo forte per le frontiere minimali, provato nel paragrafo precedente, alla risoluzione del problema al contorno, con dato continuo, per l'equazione delle superfici di area minima su aperti limitati e localmente pseudoconvessi. Proveremo il seguente

TEOREMA 1. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto, limitato e localmente pseudoconvbesso e sia $g : \partial\Omega \to R$ continua. Allora esiste unica $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, soluzione dell'equazione delle superfici di area minima in Ω ed eguale a g su $\partial\Omega$.*

Prima di dare la dimostrazione del teorema 1 osserviamo che esso contiene i risultati noti di Miranda [2] e Jenkins e Serrin [4] i quali riguardavano i casi di aperti uniformemente convessi e localmente pseudoconvessi di classe C^2, rispettivamente. Il teorema 1, rispetto al risultato di Jenkins e Serrin, indebolisce soltanto la ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$ arrivando così a contenere il caso di un insieme convesso qualunque. Riteniamo però che l'interesse del teorema 1 non stia tanto in questa generalizzazione quanto nel metodo di dimostrazione, che è completamente nuovo rispetto a quello di Miranda e Jenkins-Serrin. Questa nuova tecnica, sembra applicabile anche al problema al contorno per le superfici di area minima parametriche in presenza o meno di ostacoli.

Dimostrazione del teorema 1. Indicata con B una sfera di R^n contenente nel suo interno $\bar{\Omega}$ ed estesa g a tutta B in modo da risultare continua su B e con derivate prime sommabili su B (cfr. [1], pag. 304) si consideri la classe $\mathfrak{F}$ delle funzioni sommabili con le loro derivate prime su B e coincidenti con g in $B-\Omega$. Nella classe $\mathfrak{F}$ si consideri il funzionale

$$\mathfrak{L}(f)=\int_B \sqrt{1+|Df|^2}\,dx, \qquad f\in\mathfrak{F}. \tag{10}$$

Il funzionale $\mathfrak{L}$ è estendibile univocamente alla classe $\mathfrak{F}^*$ delle funzioni sommabili su B ed aventi derivate prime misure finite su B, coincidenti con g in $B-\Omega$.

In $\mathfrak{F}^*$ il funzionale $\mathfrak{L}$ è dotato di minimo (questo risultato è una semplice conseguenza del teorema di compattezza, Teo. 1.7, pag. 34 di [8], v. anche [13] o [7]). Detta u una funzione di $\mathfrak{F}^*$ su cui $\mathfrak{L}$ assume il suo valore minimo avremo (cfr. Teo. 3 dell'appendice) che u è reale analitica in Ω ed ivi soluzione dell'equazione delle superfici di area minima. Ovviamente è $u=g$ in $B-\bar{\Omega}$. Vogliamo ora verificare che $u\in C(\bar{\Omega})$ e che $u=g$ su $\partial\Omega$. Per questo osserviamo innanzitutto che, detto E l'insieme di R^{n+1} definito da

$$E=\{x\in B\times R;\ x_{n+1}<u(x)\}.$$

E ha frontiera minimale in $\Omega\times R$ (v. [9], Pro. 2.3, pag. 635), più precisamente si ha

$$\begin{gathered}|D\varphi_E|(\bar{\Omega}\times R)\leq|D\varphi_M|(\bar{\Omega}\times R),\\ \forall M\subset R^{n+1}\ \text{con}\ (M-E)\cup(E-M)\subset\bar{\Omega}\times R.\end{gathered} \tag{11}$$

Per provare che $u\in C(\bar{\Omega})$ e che $u|_{\partial\Omega}=g$ basta, essendo u limitata, provare che se

$$x_h\in\Omega,\ x_h\to x\in\partial\Omega,\ f(x_h)\to l\Rightarrow l=g(x).$$

Per fare ciò supponiamo per assurdo che $l>g(x)$. Essendo Ω pseudoconvesso in x ed essendo $l>g(x)$ avremo che $\exists A \ni (x, l)$ aperto in R^{n+1} tale che $\Omega \times R$ è pseudoconvesso in A e $E \cap A \subset \overline{\Omega} \times R$. D'altra parte la (11) insieme con il fatto che $\Omega \times R$ è pseudoconvesso in A implica che E ha frontiera minimale in A (v. anche la seconda diseguaglianza dell'appendice di questo lavoro). Si osservi infine che

$$(x_h, f(x_h)) \in \partial E \Rightarrow (x, l) \in \partial E$$

e siamo perciò nelle ipotesi della proposizione del § 2. Dovrebbe allora essere $\partial E = \partial\Omega \times R$ in un intorno di (x, l), ciò che è impossibile perché $(x_h, f(x_h)) \notin \partial\Omega \times R$, $\forall h$. c.v.d.

La tecnica di dimostrazione ora illustrata insieme con il risultato contenuto in [12] (v. Teo. 2, pag. 36), riguardante l'esistenza e regolarità delle frontiere minimali con un ostacolo di classe C^1 permettono di enunciare il seguente

TEOREMA 2. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto, limitato e localmente pseudoconvesso, sia $g: \partial\Omega \to R$ continua e $\psi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ con $\psi \leq g$ su $\partial\Omega$. Allora esiste unica $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $f = g$ su $\partial\Omega$, $f \geq \psi$ su Ω e*

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2}\,dx \leq \int_\Omega \leq \sqrt{1+|Dw|^2}\,dx, \qquad \forall w \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C(\Omega),$$

$w = g$, su $\partial\Omega$, $w \geq \psi$ su Ω.

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella del teorema 1. c.v.d.

OSSERVAZIONE. Per un risultato di Giaquinta e Pepe (v. Teo. 2.1 di [15]) si ha che, se alle ipotesi del teorema 2 si aggiunge

$$\psi \in C^2(\Omega) \text{ allora } f \in C^{1,\alpha}(\Omega),\ \forall \alpha < 1.$$

Appendice.

Nel corso del presente lavoro abbiamo utilizzato due diseguaglianze riguardanti le frontiere di insieme ed abbiamo assunto come vero che le soluzioni deboli dell'equazione delle superfici di area minima sono analitiche. Verificheremo subito le due diseguaglianze e poi proveremo il risultato di regolarità a molti noto, come conseguenza della maggiorazione a priori del gradiente delle soluzioni dell'equazione delle superfici di area minima, provata in [3], ma che non si trova nella letteratura, a quanto mi risulta.

I DISEGUAGLIANZA. Siano E, L due insiemi misurabili di R^n e sia $A \subset R^n$ aperto, vale allora

$$|D\varphi_{E\cup L}|(A)+|D\varphi_{E\cap L}|(A)\leq|D\varphi_E|(A)+|D\varphi_L|(A).$$

VERIFICA. Dalla definizione di $|D\varphi_E|$ e $|D\varphi_L|$ (cfr. [10]) si ha che $\exists\varphi_h$, ψ_h in $C^1(A)$ convergenti puntualmente su A a φ_E e φ_L rispettivamente, verificanti $0\leq\varphi_h\leq 1$, $0\leq\psi_h\leq 1$ e

$$\lim_{h\to\infty}\int_A |D\varphi_h|\,dx=|D\varphi_E|(A), \qquad \lim_{h\to\infty}\int_A |D\psi_h|\,dx=|D\varphi_L|(A).$$

Avremo allora anche $\varphi_h+\psi_h-\varphi_h\psi_h$ convergente puntualmente su A verso $\varphi_{E\cup L}$ e $\varphi_h\psi_h$ verso $\varphi_{E\cap L}$. Varrà quindi

$$|D\varphi_{E\cup L}|(A)\leq \min_{h\to\infty}\lim\int_A |D(\varphi_h+\psi_h-\varphi_h\psi_h)|\,dx,$$

$$|D\varphi_{E\cap L}|(A)\leq \min_{h\to\infty}\lim\int_A |D(\varphi_h\psi_h)|\,dx,$$

e poichè valgono ovviamente

$$|D(\varphi_h+\psi_h-\varphi_h\psi_h)|\leq(1-\varphi_h)|D\psi_h|+(1-\psi_h)|D\varphi_h|,$$

$$|D(\varphi_h\psi_h)|\leq\varphi_h|D\psi_h|+\psi_h|D\varphi_h|,$$

segue l'asserto. c.v.d.

II DISEGUAGLIANZA. Sia $\Omega\subset R^n$ pseudoconvesso nell'aperto $A\subset R^n$ e sia E misurabile con $E-\Omega$ limitato contenuto in A con la sua chiusura allora vale

$$|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A)\leq|D\varphi_E|(A).$$

VERIFICA. Poichè le $|D\varphi_E|$ e $|D\varphi_{E\cap\Omega}|$ sono prolungabili come misure su tutti i boreliani di R^n avremo

$$|D\varphi_E|(A)=|D\varphi_E|(A\cap\Omega)+|D\varphi_E|(A-\Omega),$$

$$|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A)=|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A\cap\Omega)+|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A-\Omega).$$

ed essendo ovviamente

$$|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A\cap\Omega)=|D\varphi_E|(A\cap\Omega)$$

si tratterà di verificare che

$$(12)\qquad |D\varphi_E|(A-\Omega)\geq|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A-\Omega)=|D\varphi_{E\cap\Omega}|(\partial\Omega\cap A).$$

Dall'ipotesi di pseudoconvessità di Ω in A si ha

$$|D\varphi_{E\cup\Omega}|(A)=|D\varphi_{E\cup\Omega}|(A-\Omega)\geq|D\varphi_\Omega|(A)=|D\varphi_\Omega|(A\cap\partial\Omega).$$

Per provare la (12) si scrivano le

$$|D\varphi_E|(A-\Omega)=|D\varphi_E|(A-\overline{\Omega})+|D\varphi_E|(A\cap\partial\Omega),$$

$$|D\varphi_{E\cup\Omega}|(A-\Omega)=|D\varphi_E|(A-\overline{\Omega})+|D\varphi_{E\cup\Omega}|(A\cap\partial\Omega),$$

da cui si ha che la (12) è verificata se vale la

$$|D\varphi_\Omega|(A\cap\partial\Omega)+|D\varphi_E|(A\cap\partial\Omega)\geq$$
$$\geq|D\varphi_{E\cup\Omega}|(A\cap\partial\Omega)+|D\varphi_{E\cap\Omega}|(A\cap\partial\Omega),$$

che è conseguenza immediata della 1ª diseguaglianza verificata in questa appendice. c.v.d.

Regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione delle superfici di area minima.

Intendiamo provare il seguente

TEOREMA 3. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto, limitato e $f \in L^1(\Omega)$ abbia derivate prime misure finite su Ω. L'insieme $E = \{x \in \Omega \times R;\ x_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n)\}$ abbia frontiera minimale in $\Omega \times R$, allora f è funzione analitica reale in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che f è localmente limitata in Ω. Per questo si consideri un aperto $\Omega' \subset \Omega$ con $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$.

Verifichiamo che non può esservi una successione

$$x^{(h)} \in \partial E \cap (\Omega' \times R) \text{ con } |x_{n+1}^{(h)}| \to +\infty.$$

In tal caso infatti potremmo supporre

$$|x^{(h)} - x^{(h')}| > \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega),\ \forall h \neq h',$$

e così, per $2\rho < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ avremmo (cfr. [13] pag. 18 form. (63) oppure [14] pag. 640 Teor. 3.8)

$$+\infty > |D\varphi_E|(\Omega \times R) \geq \sum_h |D\varphi_E|(B_\rho(x^{(h)})) \geq \sum_h \omega_n \rho^n = +\infty.$$

Quindi, fissato Ω', esiste $\lambda > 0$ tale che

$$(\Omega' \times R) \cap \partial E \subset \Omega' \times (-\lambda, \lambda),$$

da cui segue

$$\operatorname{mis}_{n+1}[E \cap \Omega' \times (\lambda, +\infty))] = 0,$$

$$\operatorname{mis}_{n+1}[(R^{n+1} - E) \cap (\Omega' \times (-\infty, -\lambda))] = 0,$$

quindi $|f|$ è essenzialmente limitata in Ω' da λ.

Vogliamo ora provare che f è analitica. Per questo cominciamo col ricordare che (cfr. [13] o [14] pag. 664 Teor. 6.5) esiste $A \subset \Omega \times R$ aperto con $H_n(\Omega \times R - A) = 0$ e $\partial E \cap A$ è varietà analitica reale n dimensionale. Detta Ω_0 la proiezione di A su R^n avremo (cfr. [9] pag. 637 Lem. 3.1) che $f|_{\Omega_0}$ è analitica e $\mathrm{mis}_n(\Omega - \Omega_0) = 0$. Fissato $x \in \Omega$ indichiamo con $B_\rho = B_\rho(x)$ una sfera di centro x con

$$\rho < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \quad \text{e} \quad H_{n-1}(\partial B_\rho \cap (\Omega - \Omega_0)) = 0.$$

Indichiamo con Ω_h una successione crescente di aperti relativamente compatti in Ω_0 con $\bigcup_h \Omega_h = \Omega_0$. Per ogni h indichiamo con v_h una funzione continua su Ω eguale a f su Ω_h. Possiamo supporre che la $\{v_h\}$ sia equilimitata su ∂B_ρ (avendo già verificato che f è limitata sui compatti di Ω). Indichiamo con u_h la successione di funzioni analitiche reali su B_ρ, continue su $\overline{B}_\rho$ ed eguali a v_h su ∂B_ρ e soluzioni dell'equazione delle superfici minimali. Possiamo supporre, essendo le u_h equilimitate su B_ρ, che la successione u_h converga puntualmente su B_ρ verso una funzione analitica reale u soluzione dell'equazione delle superfici di area minima (ciò grazie alla maggiorazione a priori del gradiente delle soluzioni dell'equazione delle superfici di area minima provata in [3]).

D'altra parte, fissato $y \in \partial B_\rho \cap \Omega_0$, $\exists h_0$ tale che $y \in \Omega_h$ $\forall h \geq h_0$ e perciò esistono due iperpiani di R^{n+1} (non paralleli all'asse x_{n+1}) passanti per $(y, f(y))$ che sono rispettivamente al disopra e al disotto dei grafici su ∂B_ρ delle $v_h (h \geq h_0)$. Tali iperpiani sono ancora al disopra e al disotto dei grafici su B_ρ delle $u_h (h \geq h_0)$ e quindi del grafico su B_ρ di u.

Pertanto avremo

$$\lim_{B_\rho \; z \to y} u(z) = f(y).$$

Le funzioni u e f hanno quindi la stessa traccia su ∂B_ρ e minimizzano entrambe l'area. Esse pertanto coincidono (v. [2], Teorema 9.1, p. 245 e la nota (7) di questo articolo). c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gagliardo, E.: *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili,* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXVII (1957).

[2] Miranda, M.: *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili,* Ann. Scuola N. Sup., Pisa, vol. XIX (1965).

[3] BOMBIERI, E., DE GIORGI, E., MIRANDA, M.: *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche,* Arch. Rat. Mech. Analysis, vol. 32 (1969).

[4] JENKINS, H., SERRIN, J.: *The Dirichlet Problem for the minimal surface equation in higher dimensions,* J. Reine Ang. Math. 229 (1968).

[5] MIRANDA, M.: *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani,* Ann. Scuola N. Sup., Pisa, vol. XVIII (1964).

[6] DE GIORGI, E.: *Complementi alla teoria della misura* $(n-1)$*-dimensionale,* Sem. Mat. Sc. N. Sup., Pisa, Anno Acc., 1960-61.

[7] SANTI, E.: *Sul problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima su domini limitati qualunque* (in corso di stampa).

[8] MIRANDA, M.: *Distribuzioni aventi derivate prime misure, insiemi di perimetro localmente finito,* Ann. Sc. N. Sup., Pisa, vol. XVIII (1964).

[9] MIRANDA, M.: *Analiticità delle superfici di area minima in* R^4, Rend. Acc. Naz. Lincei, S. VIII, vol. XXXVIII (1965).

[10] DE GIORGI, E.: *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni,* Ann. Mat. Pura e Appl., Serie IV, Tomo XXXVI (1954).

[11] COURANT, R., HILBERT, D.: *Methods of mathematical Physics,* vol. 2, Interscience, New York (1962).

[12] MIRANDA, M.: *Frontiere minimali con ostacoli,* Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, vol. XVI (1971).

[13] DE GIORGI, E.: *Frontiere orientate di misura minima,* Sem. Mat. Sc. N. Sup. Pisa, Anno Acc., 1960-61.

[14] MIRANDA, M.: *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione,* Ann. Sc. N. Sup. Pisa, vol. XIX (1965).

[15] GIAQUINTA, M. PEPE, L.: *Esistenza e regolarità per il problema dell'area minima con ostacoli in n variabili,* (in corso di stampa sugli Annali Sc. N. Sup. di Pisa).

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 marzo 1971.