RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO AMBROSETTI

Teoria di Lusternik-Schnirelman su varietà con bordo negli spazi di Hilbert

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 337-353

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__337_0>

TEORIA DI LUSTERNIK-SCHNIRELMAN SU VARIETÀ CON BORDO NEGLI SPAZI DI HILBERT

ANTONIO AMBROSETTI *)

La teoria dei punti critici con condizioni al contorno è stata studiata, mediante la teoria di Morse, da E. H. Rothe (cfr. [7]) che ha esteso al caso infinito-dimensionale i risultati ottenuti precedentemente da M. Morse - G. B. Van Schaack (cfr. [2]) in dimensione finita.

Ora è noto che per studiare i punti critici su varietà *senza bordo* si possono seguire essenzialmente due metodi: la teoria di Morse oppure quella di Lusternik-Schnirelman; quest'ultima ha un importante vantaggio: non è più necessario supporre che gli eventuali punti critici siano non degeneri.

Ho perciò ritenuto utile studiare anche la teoria dei punti critici con condizioni al bordo mediante la teoria di L-S.

I risultati ottenuti mediante questa via hanno un ulteriore vantaggio: permettono di valutare il numero dei punti critici di una funzione f in un aperto V di uno spazio di Hilbert tenendo conto *solo* delle proprietà omotopiche di V e di quella parte del bordo ∂V ove il grad f è diretto verso l'interno di V. Si osservi infine che le ipotesi sui punti critici « tangenziali » [1]) sono eliminate e sostituite da una condizione di carattere locale sui punti ove il grad f è « tangente » a ∂V.

§ 1. Premesse e posizione del problema.

Sia H uno spazio di Hilbert reale; per ogni u, v di H indicheremo (u, v) il prodotto scalare in H e con $\| u \| = (u, u)^{1/2}$ la norma di u

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « L. Tonelli », via Derna, Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R. per la matematica (contratto n. 115.3059.05177).

[1]) Cioè i punti di ∂V ove il grad f è « normale » a ∂V.

in H. Sia V un aperto di H, $S=\partial V$ la sua frontiera e $\overline{V}=V\cup S$ la chiusura di V. Sia Ω un aperto contenente V, f una funzione di classe C^2 definita in Ω e a valori in R. Per ogni $p\in\Omega$, considerando il differenziale $f'(p)$ come un operatore lineare di Ω in H, si può definire il grad $f(p)$ come l'unica funzione di classe C' di H in sè tale che (grad $f(p)$, $h)=f'(p)h$, per ogni $h\in H$. Diremo che $p\in V$ è un punto critico per f se grad $f(p)=0$; se invece grad $f(p)\neq 0$, diremo che p è un punto regolare. Indicheremo con K l'insieme di tutti i punti critici di f in V, con K_c l'insieme $K\cap f^{-1}(c)$ e con V_a l'insieme $V\cap f^{-1}(-\infty, a]$. Sulla f daremo innanzi tutto la seguente ipotesi di compattezza, introdotta da R. S. Palais e S. Smale in [5] e [6].

IPOTESI (P-S). *Diremo che f verificata su un insieme $A\subset H$ l'ipotesi (P-S) se per ogni successione $(p_n)\subset A$ tale che $(f(p_n))$ è limitata e $\|$ grad $f(p_n)\|$ converge a zero, si ha che (p_n) contiene una sottosuccessione convergente.*

Supporremo poi che la frontiera S di V sia « regolare »: con ciò si intederà quanto segue:

1.1. DEFINIZIONE. *Diremo che $S=\partial V$ è regolare se per ogni $x_0\in S$ esiste un intorno (aperto) $I(x_0)$ e una funzione Φ di $I(x_0)$ in R di classe C^1 a differenziale non nullo tale che*

a) $I(x_0)\cap S=\{x : \Phi(x)=0,\ x\in I(x_0)\}$.

b) per ogni $x\in I(x_0)\cap V$ si ha che $\Phi(x)<0$, mentre per ogni $x\in I(x_0)\cap(\Omega-\overline{V})$ si ha che $\Phi(x)>0$.

Sia $T(x_0)$ il nucleo di $\Phi'(x_0)$; per ogni $h\in T(x_0)$ si ha che $\Phi'(x_0)h=$ $=(\text{grad}\,\Phi(x_0), h)=0$; poniamo $n_0=n(x_0)=\|\text{grad}\,\Phi(x_0)\|^{-1}\,\text{grad}\,\Phi(x_0)$. È evidente dalla condizione *b*) della definizione 1.1 che *esiste un* $\lambda_0>0$ *tale che* $x_0-\lambda n_0\in V$ *per ogni* $\lambda\in(0, \lambda_0]$.

Chiameremo $T(x_0)$ lo spazio tangente ad S in x_0 ed $n_0=n(x_0)$ la normale esterna ad S in x_0.

OSSERVAZIONE. Si osservi che $n(x)$ è una funzione di classe C^0, visto che $\Phi(x)$ è di classe C^1.

Per studiare i punti critici di f in V distingueremo (seguendo M. Morse - G. B. Van Schaack e E. H. Rothe) due casi: diremo che f

verifica condizioni al bordo regolari se la frontiera S di V è regolare e se $\forall x \in S$, detta $n(x)$ la normale esterna ad S in x, si ha che $(\operatorname{grad} f(x), n(x)) > 0$.

Diremo invece che f *verifica a condizioni al bordo generali se la frontiera S di V è regolare e f non ha punti critici su S.*

Lo studio dei punti critici di f verrà fatto mediante la categoria di Lusternik-Schnirelman e la categoria sui compatti introdotta da F. E. Browder (cfr. [1]). Le definizioni e alcune proprietà di tali concetti verranno date nel § 3, dopo aver trattato nel § 2 alcune questioni preliminari (sulle equazioni differenziali) utili nel seguito. Nel § 4 verrà esaminato il caso che f verifica condizioni al bordo regolari, e si otterrà per il numero $N(f)$ dei punti critici di f in V una valutazione uguale al caso in cui V è una varietà regolare di Hilbert, Riemanniana, completa e *senza bordo*. Si vede con facili esempi (cfr. § 6), che in generale ciò non è più vero se f verifica condizioni al bordo generali: questo caso verrà studiato nel § 5 facendo un'ipotesi aggiuntiva sui punti $x \in S$ ove $(\operatorname{grad} f(x), n(x)) = 0$ (ipotesi 5.1). Infine nel paragrafo 6 vengono dati alcuni esempi per illustrare tale ipotesi.

§ 2. Preliminari sulle equazioni differenziali ordinarie.

In questo paragrafo verranno stabiliti alcuni lemmi che ci saranno nel seguito. In tutto il paragrafo F indicherà un'applicazione di Ω in H di classe C'. Sono note le seguenti proposizioni (cfr. J. T. Schwartz [9]):

2.1. Proposizione. *Sia F una funzione di classe C' definita in $\Omega \supset \overline{V}$ e a valori in H. Per ogni $p \in \Omega$ esiste una curva $t \to u(t, p)$ tale che siano verificate le seguenti condizioni:*

a) $\forall p \in \Omega$ *$u(t, p)$ è definita e di classe C' per $t^-(p) < t < t^+(p)$ con* $t^-(p) < 0 < t^+(p)$;

b) $\dfrac{du(t, p)}{dt} = F(u(t, p)), \qquad u(0, p) = p;$

c) *dato $p \in \Omega$, non esiste un'altra curva di classe C' definita su un intervallo contenente propriamente $(t^-(p), t^+(p))$ e soddisfacente a b).*

2.2. PROPOSIZIONE. *Per ogni* $p \in \Omega$ *sia* $u(t, p)$ *la curva soddisfacente alle condizioni a), b) e c) precedenti. Allora se* $t^+(p) < +\infty$, $u(t, p)$ *non ha punti-limite quando* t *tende a* $t^+(p)$.

2.3. LEMMA. *Supponiamo che la frontiera* S *di* V *sia regolare; dato* $\bar{x} \in S$ *indichiamo con* $\bar{n}$ *la normale esterna ad* S *in* $\bar{x}$. *Se* $(F(\bar{x}), \bar{n}) < 0$ *allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che la soluzione* $u(t, \bar{x})$ *di*

$$\frac{du}{dt} = F(u), \qquad u(0) = \bar{x} \tag{1}$$

appartiene a V *(rispettivamente a* $\bar{V}$) $\forall t$ *con* $0 < t < \delta$ *(risp.* $\forall t$ *con* $0 \leq t < \delta$) *mentre* $u(t, \bar{x}) \in \Omega - \bar{V}$ (risp. $u(t, \bar{x}) \in \Omega - V$) $\forall t$ *con* $-\delta < t < 0$ *(risp.* $\forall t$ *con* $-\delta < t \leq 0$). *Se invece* $(F(\bar{x}), \bar{n}) > 0$, *allora* $u(t, \bar{x}) \in \Omega - \bar{V}$ $\forall t$ *con* $0 < t < \delta$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo ad esempio il caso $(F(\bar{x}), \bar{n}) < 0$. Posto $\varphi(t) = \Phi(u(t, \bar{x}))$, si ha che $\varphi(0) = \Phi(u(0, \bar{x})) = \Phi(\bar{x}) = 0$; inoltre

$$\varphi'(0) = (\text{grad}\, \Phi(\bar{x}),\ u'(0)) = \|\, \text{grad}\, \Phi(\bar{x})\, \|\, (\bar{n},\ F(\bar{x})) < 0;$$

quindi esiste un $\delta > 0$ tale che $\varphi(t) = \Phi(u(t, \bar{x})) < 0$ $\forall t$ con $0 < t < \delta$. Dalla *b*) della definizione 1.1. segue allora che $u(t, \bar{x}) \in V$ per tali valori di t. In modo analogo si dimostrano le altre affermazioni. Q.E.D.

2.4. LEMMA. *Supponiamo che la frontiera* S *di* V *sia regolare; per ogni* $x \in S$, *detta* $n(x)$ *la normale esterna ad* S *in* x, *sia* $(F(x), n(x)) < 0$. *Allora* $\forall p \in V$, *la curva* $u(t, p)$ *verificante la proposizione* 2.1 *appartiene a* V $\forall t \in [0, t^+(p))$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \in V$ indichiamo con $\bar{\tau}(p)$ l'estremo superiore dei numeri τ con $0 \leq \tau < t^+(p)$, tali che la soluzione $u(t, p)$ di

$$\frac{du}{dt} = F(u) \qquad u(0) = p \in V \tag{2}$$

appartiene a V $\forall t \in [0, \tau]$. Dobbiamo dimostrare che $\bar{\tau}(p) = t^+(p)$. Supponiamo per assurdo che $\bar{\tau}(p) < t^+(p)$. Allora, posto $\bar{p} = u(\bar{\tau}(p), p)$, si ha che $\bar{p} \in \bar{V}$. Se $\bar{p} \in V$ esiste un intorno $I(\bar{p})$ di $\bar{p}$ con $I(\bar{p}) \subset V$ e

$u(t, p) \in I(\bar{p})$ per $t > \bar{\tau}(p)$ e sufficientemente piccolo. Se invece $\bar{p} \in S$ si ha per ipotesi $(F(\bar{p}), n(\bar{p})) < 0$; allora per il Lemma 2.3. esiste un $\delta > 0$ tale che la soluzione $u(t, p)$ di (2) appartiene a $\Omega - V$ $\forall t \in (\bar{\tau}(p) - \delta, \bar{\tau}(p))$. In ambedue i casi si ottiene un assurdo per come è stato definito $\tau(p)$. Q.E.D.

2.5. Lemma. *Siano verificate le ipotesi del lemma* 2.4. *Inoltre supponiamo che esista un* M *tale che* $\| F(u) \| \leq M$ $\forall u \in V$. *Allora* $\forall p \in V$ *la curva* $u(t, p)$ *verificante la proposizione* 2.1 *è definita in un insieme contenente la semiretta* $[0, +\infty)$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $t^+(p) = +\infty$ $\forall p \in V$. Se per assurdo fosse $t^+(p) < +\infty$ per qualche $p \in V$, detta t_n una successione di numeri positivi che tende crescendo a $t^+(p)$, dalla diseguaglianza

$$\| u(t_i, p) - u(t_j, p) \| \leq M \, | t_i - t_j |$$

segue che la successione $(u(t_n, p))$ è di Cauchy. Inoltre, essendo verificate le ipotesi del Lemma 2.4, si ha che $u(t_n, p) \in V$ $\forall n$ e quindi il $\lim\limits_n u(t_n, p)$ esiste ed appartiene a $\bar{V}$. E questo è assurdo per la proposizione 2.2. Q.E.D.

2.6. Lemma. *Sia* W *un insieme chiuso di* H *ed* f *una funzione di classe* C^2, *definita in un aperto* $\Omega \supset W$ *e a valori reali. Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\frac{du}{dt} = -\operatorname{grad} f(u), \qquad u(0) = p \in W \tag{3}$$

e supponiamo che siano verificate le seguenti condizioni:

a) f *verifichi su* W *l'ipotesi* $(P-S)$;

b) f *sia inferiormente limitata su* W;

c) *la soluzione di* (3) *sia in* W $\forall t \in [0, t^+(p))$.

Allora si ha che:

i) $t^+(p) = +\infty$;

ii) *esiste il* $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t, p) = u_0$ *e* $\operatorname{grad} f(u_0) = 0$.

OSSERVAZIONE. Si osservi che non viene fatta nessuna ipotesi di regolarità sulla frontiera di W; inoltre le condizioni al bordo sono sostituite dall'ipotesi c).

La dimostrazione segue la traccia di quella dei Teoremi 1.1. e 1.2. del lavoro di F. E. Browder [1]; ne diamo un rapido cenno per completezza.

CENNO DELLA DIMOSTRAZIONE. La funzione $g(t)=f(u(t))$ è monotona non decrescente, perchè risulta

$$g'(t)=(\operatorname{grad} f(u(t)),\ u'\ (t))=-\|\operatorname{grad} f(u(t))\|^2\leq 0$$

Poichè l'inf $f(u)$ è maggiore di $-\infty$ segue che

$$\int_0^t \|\operatorname{grad} f(u(s))\|^2\, ds=f(u(0))-f(u(t))\leq M$$

avendo posto $M=f(u(0))-\inf f(u)$. Se per assurdo fosse $t^+(p)<+\infty$ per qualche $p\in W$, allora presa una successione di numeri positivi t_n che tende crescendo a $t^+(p)$, si avrebbe che

$$\|u(t_n\,,\ p)-u(t_m\,,\ p)\|\leq \int_{t_n}^{t_m} \|\operatorname{grad} f(u(s))\|\, ds\leq |\,t_n-t_m\,|^{1/2}\, M^{1/2}.$$

Quindi la successione $u(t_n\,,\ p)$ è di Cauchy e per l'ipotesi c) essa converge ad un punto di W. Questo è assurdo per la proposizione 2.2.

Resta da dimostrare la ii): fissato p in modo arbitrario, poichè

$$\int_0^\infty \|\operatorname{grad} f(u(s))\|^2\, ds<\infty$$

esiste una successione $p_n=u(t_n\,,\ p)$ tale che $\|\operatorname{grad} f(p_n)\|\to 0$, per $n\to+\infty$; inoltre risulta, per quanto visto in precedenza: $f(u(0))\geq$ $\geq f(p_n)>-\infty$; quindi per l'ipotesi $(P-S)$ è possibile estrarre una sottosuccessione che converge ad un punto critico di f. Q.E.D.

§ 3. Categoria di Lusternik-Schnirelman e categoria dei compatti.

Sia X uno spazio topologico, A un sottoinsieme di X. Si dice che A è contrattile ad un punto in X se l'applicazione identica $i : A \to X$ è omotopa ad una costante. Diremo inoltre che B è il risultato di una deformazione di A (in X) se esiste un'applicazione $\varphi : A \to X$, con $\varphi(A) = B$ tale che φ è omotopa all'immersione $i : A \to X$.

3.1. Definizione. *La categoria di Lusternik-Schnirelman di A rispetto ad X : cat $(A; X)$, è il più piccolo intero n tale che A può essere ricoperto da n sottoinsiemi chiusi di X, ognuno dei quali contrattile ad un punto in X. Se un tale intero non esiste si pone* $\operatorname{cat}(A; X) = +\infty$. *Si pone anche* $\operatorname{cat}(X) = \operatorname{cat}(X; X)$.

3.2. Lemma. *Sono vere le seguenti proprietà:*

i) *se* $A \subseteq B$ *allora* $\operatorname{cat}(A; X) \leq \operatorname{cat}(B; X)$;

ii) *per ogni A e B in X si ha* $\operatorname{cat}(A \cup B; X) \leq \operatorname{cat}(A; X) + \operatorname{cat}(B; X)$;

iii) *se A è chiuso in X e se b è il risultato di una deformazione di A (in X) allora* $\operatorname{cat}(A; X) \leq \operatorname{cat}(B; X)$;

iv) *se X è un ANR* [2]) *e se $A \subseteq X$, allora esiste un intorno U di A in X tale che* $\operatorname{cat}(\overline{U}; X) = \operatorname{cat}(A; X)$;

v) *se $X \subseteq Y$, allora per ogni $A \subseteq X$ si ha che* $\operatorname{cat}(A; X) \geq \operatorname{cat}(A; Y)$.

Dimostrazione. Vedi R. S. Palais [3] e J. T. Schwartz [8].

3.3. Definizione. *Sia X uno spazio topologico e poniamo* $\operatorname{cat}_k(X) = \sup\{\operatorname{cat}(K; X) : K$ *sottoinsieme compatto di* $X\}$. *Chiameremo $\operatorname{cat}_k(X)$ la categoria sui compatti di X.* (Cfr. F. E. Browder [1]).

---

[2]) Si ricordi che lo spazio metrizzabile X è un ANR se dato un sottoinsieme chiuso A di uno spazio metrizzabile Y e una applicazione continua $f : A \to X$ esiste un intorno U di A in Y e un'applicazione continua $F : U \to X$ che estende f. Ad esempio è noto (cfr. R. S. Palais [4]) che : « *uno spazio metrizzabile è un ANR se ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un convesso di uno SVTLC* » e che « *una varietà (con bordo) metrizzabile è un ANR* ».

3.4. LEMMA. *Sia X uno spazio topologico d Hausdorff. Sono vere le seguenti proprietà*:

i) *se X è l'unione di una successione crescente di insiemi aperti X_i, allora si ha* $\operatorname{cat}_k(X) \leq \liminf \operatorname{cat}_k(X_i)$;

ii) *sia $Y \subseteq X$; se $\varphi : X \to X$ è un'applicazione omotopa all'identità (in X), con $\varphi(X) = Y$, allora si ha* $\operatorname{cat}_k(X) = \operatorname{cat}_k(Y)$;

iii) *se $X = X_1 \cup X_2$ con X_1 e X_2 chiusi in X, allora si ha* $\operatorname{cat}_k(X) \leq \operatorname{cat}_k(X_1) + \operatorname{cat}_k(X_2)$;

iv) sia *X un ANR; se $X = X_1 \cup X_2$ e X_1 è chiuso in X, allora risulta* $\operatorname{cat}_k(X) \leq \operatorname{cat}_k(X_1) + \operatorname{cat}_k(X_2)$.

DIMOSTRAZIONE. Per i), ii) e iii) vedi F. E. Browder [1]. Dimostriamo la iv). Sia K un compatto generico di X; posto $K_1 = K \cap X_1$, poichè per ipotesi X_1 è chiuso, si ha che K_1 è un compatto contenuto in X. Poichè X è un ANR, per il lemma 3.2-iv) esiste un intorno U di K_1 in X tale che $\operatorname{cat}(\overline{U}; X) = \operatorname{cat}(K_1; X)$. Indichiamo con K_2 l'insieme $K - U$. Ovviamente $K_2 \subseteq K$ e quindi K_2 è un insieme compatto; inoltre $K_2 = K - U \subseteq K - K_1 \subseteq X_2$. Essendo inoltre $K \subset \overline{U} \cup K_2$ si ha (lemma 3.2-ii):

$$(4) \quad \operatorname{cat}(K; X) \leq \operatorname{cat}(\overline{U}; X) + \operatorname{cat}(K_2; X) = \operatorname{cat}(K_1; X) + \operatorname{cat}(K_2; X).$$

Poichè $X \supseteq X_1 \supseteq K_1$ e $X \supseteq X_2 \supseteq K_2$, dal lemma 3.2-v) segue che

$$(5) \qquad \operatorname{cat}(K_1; X) \leq \operatorname{cat}(K_1; X_1), \qquad \operatorname{cat}(K_2; X) \leq \operatorname{cat}(K_2; X_2).$$

Da (4) a (5) si ha che

$$\operatorname{cat}(K; X) \leq \operatorname{cat}(K_1; X_1) + \operatorname{cat}(K_2; X_2) \leq \operatorname{cat}_k(X_1) + \operatorname{cat}_k(X_2).$$

Da tale relazione segue che

$$\operatorname{cat}_k(X) \leq \operatorname{cat}_k(X_1) + \operatorname{cat}_k(X_2)$$

perchè K è un arbitrario compatto di X. Q.E.D.

OSSERVAZIONI. Si osservi che per la categoria sui compatti non è vera una proprietà analoga alla 3.2-1) (monotonia); tale proprietà, d'altra parte, viene già a mancare quando si consideri la $\operatorname{cat}(A) = \operatorname{cat}(A;\ A)$ e $\operatorname{cat}(B) = \operatorname{cat}(B;\ B)$ in luogo di $\operatorname{cat}(A;\ X)$ e $\operatorname{cat}(B;\ X)$. Inoltre per dimostrare una proposizione simile alla 3.2-ii) (subadditività) occorre fare alcune ipotesi supplementari (vedi lemma 3.4-iii) e iv)). D'altro canto si noti che nel lemma 3.2-iii) l'ipotesi che A sia chiuso non è eliminabile (come si vede con semplici esempi). Può allora essere utile la categoria sui compatti, dato che nell'analogo lemma 3.4-ii) non si richiede più che A sia chiuso.

§ 4. Studio dei punti critici: condizioni al bordo regolari.

In questo paragrafo supporremo sempre, salvo avviso contrario, che f sia una funzione definita su un aperto $\Omega \supset \overline{V}$, di classe C^2 che verifica su V l'ipotesi $(P-S)$ e condizioni al bordo regolari (vedi § 1).

Si osservi che, poichè f verifica l'ipotesi $(P-S)$, l'insieme K_c è un insieme compatto per ogni c. Poichè f verifica condizioni al bordo regolari, non ci sono sulla frontiera S di V punti critici; allora si ha che $K_c \subset V$ per ogni c. Poichè V è un ANR, per il Lemma 3.2-iv) esiste un intorno U di K_c tale che $\overline{U} \subset V$ e che $\operatorname{cat}(K_c;\ V) = \operatorname{cat}(\overline{U};\ V)$. Riuniamo questi risultati in un lemma:

4.1. LEMMA. *Nelle ipotesi fatte sulla f si ha che: $\forall c$ K_c è un insieme compatto ed esiste un intorno U di K_c tale che $\overline{U} \subset V$ e che* $\operatorname{cat}(K_c;\ V) = \operatorname{cat}(\overline{U};\ V)$.

4.2. LEMMA. *Sia $\alpha(t)$ una funzione definita per $t \geq 0$, a valori reali, di classe C^∞ tale che $\alpha(t) = 1$ per $0 \leq t \leq 1$, $\alpha(t)t^2$ sia monotona crescente ed $\alpha(t)t^2 = 2$ per $t \geq 2$. Detta $F(p) = -\alpha(\|\operatorname{grad} f(p)\|) \operatorname{grad} f(p)$, si ha che $\forall p \in V$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\frac{du}{dt} = F(u) \qquad u(0) = p \tag{6}$$

è definita per $t \in [0, +\infty)$ e $u(t, p) \in V$ per ogni $p \in V$ e per ogni $t \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. È evidente che $F(p)$ è limitata inoltre poichè f verifica condizioni al bordo regolari, per ogni $x \in S$ si ha ($n(x)$ indica come al solito la normale esterna ad S in x):

$$(F(x),\ n(x)) = -\alpha(\|\operatorname{grad} f(x)\|)(\operatorname{grad} f(x),\ n(x)) < 0.$$

Quindi F verifica le ipotesi dei lemmi 2.4 e 2.5. Da questi lemmi discende allora la tesi voluta. Q.E.D.

Mediante i due lemmi ora dimostrati si possono provare facilmente, ripetendo gli stessi argomenti usati da J. T. Schwartz in [8], i seguenti teoremi:

4.3. TEOREMA. *Sia $\Omega \supset \overline{V}$ un aperto di H, f una funzione di classe C^2, definita su Ω e a valori reali. Supponiamo che f verifichi su V l'ipotesi $(P-S)$ e condizioni al bordo regolari. Per ogni $n \leq \operatorname{cat}(V;\, V)$ indichiamo con $G_n(V) = G_n$ la classe degli insiemi chiusi $A \subseteq V$ tali che* $\operatorname{cat}(K_c;\, V) \geq n$ *e poniamo*

$$c_n = \inf_{A \in G_n} (\sup (f(p) : p \in A)).$$

Allora se (per $n \leq m$) è $-\infty < c_n = c_m = c < +\infty$, si ha che $\operatorname{cat}(K_c;\, V) \geq$ $\geq m - n$.

4.4. TEOREMA. *Supponiamo che le ipotesi del Teorema* 4.3 *siano verificate. Se inoltre f è inferiormente limitata, allora il numero $N(f)$ dei punti critici di f in V è non minore di* $\operatorname{cat}(V)$.

Nel seguente teorema, che ci sarà utile nel prossimo paragrafo, l'ipotesi che S sia regolare viene soppressa e la condizione che f verifichi condizioni al bordo regolari viene sostituita da un'ipotesi che permette di usare il Lemma 2.6.

4.5. TEOREMA *Sia W un insieme chiuso di H ed f una funzione di classe C^2 definita su un aperto $\Omega \supset W$. Supponiamo che f sia inferiormente limitata e che verifichi su W l'ipotesi $(P-S)$. Supponiamo inoltre che $\forall p \in W$ il problema di Cauchy*

$$\frac{du}{dt} = -\operatorname{grad} f(u), \qquad u(0) = p$$

abbia soluzione $u(t,\, p) \in W$ $\forall t \in [0,\, t^+(p))$. Allora $N(f) \geq \operatorname{cat}_k(W)$, ove si è indicato con $N(f)$ il numero dei punti critici di f in W.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue lo schema di quella data da F. E. Browder in [1], tenuto conto che nelle ipotesi attuali è possibile applicare il Lemma 2.6.

§ 5. Studio dei punti critici: condizioni al bordo generali.

In questo paragrafo supporremo sempre che f verifichi condizioni al bordo generali e soddisfi su $\overline{V}$ *all'ipotesi* $(P-S)$.

Poniamo $S^{-}=\{x \in S : (\operatorname{grad} f(x), n(x)) \leq 0\}$ e indichiamo con S^{+} l'insieme $S-S^{-}$. Faremo la seguente ipotesi:

5.1. Ipotesi. *Per ogni punto* $x \in S$ *ove* $(\operatorname{grad} f(x), n(x))=0$, *considerato il problema di Cauchy*

$$\frac{du}{dt}=-\operatorname{grad} f(u) \qquad u(0)=x \qquad t \in (t^{-}(x), t^{+}(x)) \tag{7}$$

con $t^{-}(x)<0<t^{+}(x)$, *sia verificata la seguente condizione*: $\forall \varepsilon>0$ *esiste* $\delta>0$, *tale che* $u(t, x) \in \Omega-\overline{V}$ *per ogni* $t \in (0, \delta)$.

Nel paragrafo seguente faremo alcuni esempi per illustrare meglio tale ipotesi e daremo una condizione sufficiente perchè essa sia verificata.

L'ipotesi 5.1 ci permette di provare il seguente lemma:

5.2. Lemma. *Supponiamo che* f *sia inferiormente limitata in* $\overline{V}$, *verifichi su* $\overline{V}$ *l'ipotesi* $(P-S)$, *condizioni al bordo generali e l'ipotesi* 5.1. *Se in* $\overline{V}$ *non ci sono punti critici della* f, *allora* $\overline{V}$ *è deformabile in* S^{-}.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\frac{du}{dt}=-\operatorname{grad} f(u) \qquad u(0)=p \in \overline{V}, \tag{8}$$

e indichiamo con $u(t, p)$ la soluzione di (8). Poniamo:

$$T(p)=\begin{cases} \sup\{\tau : \tau<t^{+}(p),\ \forall t \in (0, \tau),\ u(t, p) \in V\} & \text{per } p \in V \cup S^{+} \\ 0 & \text{per } p \in S^{-} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $0 \leq T(p)<t^{+}(p)<+\infty$. Inoltre la funzione $T(p)$ soddisfa le seguenti proprietà:

i) $T(p)=0$ *se e solo se* $p \in S^{-}$. Se $p \in S^{-}$ per definizione

$T(p)=0$. Viceversa, basterà mostrare che $\forall p \in V \cup S^+$ si ha $T(p)>0$. Questo è ovvio se $p \in V$; se poi $p \in S^+$ la tesi discende dal lemma 2.3, perchè posto $F(u) = -\text{grad} f(u)$ si ha

$$(F(p), n(p)) = -(grad\, f(p), n(p)) < 0.$$

ii) $u(T(p), p) \in S^-$. Se $T(p)=0$ allora segue che $p \in S^-$ e quindi $u(0, p) = p \in S^-$. Se $p \in V \cup S^+$ e se fosse $u(T(p), p) \in V$, poichè V è aperto la soluzione di (8) potrebbe essere prolungata per $t > T(p)$ restando sempre in V: questo è assurdo vista la definizione di $T(p)$. Se infine fosse $u(T(p), p) \in S^+$, allora per il lemma 2.3 la soluzione di (8) starebbe in $\Omega - V$ $\forall t \in (T(p) - \delta, T(p))$ per qualche $\delta > 0$: questo è assurdo per come è stato definito $T(p)$.

iii) $u(t, p) \in \overline{V}$ $\forall t \in [0, T(p)]$ *e* $\forall p \in \overline{V}$. Segue immediatamente dalla definizione.

Dimostriamo ora che l'applicazione $p \to T(p)$ *di* $\overline{V}$ *in* R *è continua.* Fissiamo dapprima $p_0 \in V \cup S^+$ (che è un insieme aperto relativamente a $\overline{V}$) e poniamo $q_0 = u(T(p_0), p_0) \in S^-$. Fissato $\varepsilon > 0$ $\exists t_1$, con $t_1 > T(p_0) - \varepsilon$ tale che $q_1 = u(t_1, p_0) \in V$. Inoltre in corrispondenza a tale ε $\exists t_2 < T(p_0) + \varepsilon$ tale che $q_2 = u(t_2, p_0) \in \Omega - \overline{V}$: la cosa è ovvia se $(\text{grad} f(q_0), n(q_0)) < 0$ (vedi Lemma 2.3); se invece $(\text{grad} f(q_0), n(q_0)) = 0$ essa discende dall'ipotesi 5.1. Esiste perciò un $\sigma > 0$, tale che l'intorno $I_\sigma(q_1)$ di centro q_1 e raggio σ è tutto contenuto in V, mentre l'intorno $I_\sigma(q_2)$ è tutto contenuto in $\Omega - \overline{V}$. In corrispondenza a tale σ $\exists \delta > 0$, tale che $\forall p \in I_\delta(p_0) \cap \cap \overline{V} \subset V \cup S^+$ si ha che $u(t_1, p) \in I_\sigma(q_1) \subset V$ e $u(t_2, p) \in I_\sigma(q_2) \subset \Omega - \overline{V}$. Quindi $\forall p \in I_\sigma(p_0) \cap \overline{V} \subset V \cup S^+$ si ha che $T(p) < t_2$. Per dimostrare che $T(p) > t_1$ per tali p, si osservi che $\forall t \leq t_1$ la curva $t \to u(t, p_0)$ descrive un insieme compatto contenuto in V (vedi definizione di $T(p)$). Perciò si può prendere l'intorno $I_\delta(p_0)$ in modo che $u(t, p) \in V$ per ogni $t \leq t_1$ e per ogni $p \in I_\delta(p_0) \cap \overline{V} \subset V \cup S^+$. Consideriamo ora il caso che p_0 sia in S^-. Ricordata l'ipotesi 5.1 e il lemma 2.3, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t_2$ con $t_2 < \varepsilon$ tale che $u(t_2, p_0) = q_2 \in \Omega - \overline{V}$. Preso un intorno $I_\sigma(q_2) \subset \Omega - \overline{V}$ $\exists I_\delta(p_0)$ tale che $\forall p \in I_\delta(p_0) \cap \overline{V}$ si ha $u(t_2, p) \in I_\sigma(q_2)$. Quindi in ogni caso si ha $T(p) < \varepsilon$ per tali p.

Dimostriamo infine che $\overline{V}$ *è deformabile in* S^-: *per ogni* $p \in \overline{V}$ *definiamo* la funzione $\varphi(p)$ ponendo $\varphi(p) = u(T(p), p)$. Per quanto visto in precedenza $\varphi(p)$ è un'applicazione continua di $\overline{V}$ in S^- omotopa all'applicazione identica (l'omotopia è $h(s, p)=u(s\cdot T(p), p)$ $\forall s\in[0, 1]$, $\forall p\in\overline{V}$). Q.E.D.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

5.3. TEOREMA. *Sia f una funzione di classe C^2 definita su un aperto $\Omega\supset\overline{V}$. Supponiamo che f sia inferiormente limitata su $\overline{V}$, verifichi l'ipotesi $(P-S)$ su $\overline{V}$, soddisfi a condizioni al bordo generali e all'ipotesi* 5.1. *Allora se* $\operatorname{cat}(S^-; \overline{V})<\operatorname{cat}(\overline{V}; \overline{V})$, *la f ha in $\overline{V}$ almeno un punto critico.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per assurdo: se in $\overline{V}$ la f non avesse punti critici, allora, per il lemma 5.2, $\overline{V}$ potrebbe essere deformato in S^-; allora (lemma 3.2-iii)) si avrebbe che $\operatorname{cat}(S^-; \overline{V})\geq\operatorname{cat}(\overline{V}; \overline{V})$, e questo è assurdo. Q.E.D.

Ci proponiamo ora di dimostrare un teorema che ci dia un'informazione sul *numero* dei punti critici di f in $\overline{V}$. A questo scopo indichiamo con M l'insieme dei punti $p\in\overline{V}$ tali che, considerata la soluzione $u(t, p)$ di (8), si ha che esiste un t' tale che $u(t', p)\in\Omega-\overline{V}$. Dimostriamo i seguenti lemmi:

5.4. LEMMA. *Se f verifica condizioni al bordo generali e l'ipotesi* 5.1, *allora sono vere le seguenti affermazioni*:

i) *M è un insieme aperto relativamente a $\overline{V}$;*

ii) *in M non vi sono punti critici per f;*

iii) $M\supseteq S^-$.

DIMOSTRAZIONE. i) sia $p'\in M$ e $q'=u(t', p')\in\Omega-\overline{V}$. Preso un intorno $I(q')\subset\Omega-\overline{V}$, esiste un intorno $J(p')$ di p' tale che $\forall p\in J(p')$ si ha $u(t', p)\in I(q')\subset\Omega-\overline{V}$. Quindi $J(p')\cap\overline{V}$ è contenuto in M, come richiesto.

ii) Se $p_0\in M$ fosse un punto critico per f, allora il problema di Cauchy (8) con punto iniziale p_0 avrebbe per (unica) soluzione $u(t)=p_0$; e questo è assurdo.

iii) Il risultato voluto segue dal lemma 2.3 e dall'ipotesi 5.1. Q.E.D.

5.5. LEMMA. *Se f verifica condizioni al bordo generali, l'ipotesi $(P-S)$ su V, l'ipotesi* 5.1 *ed è inferiormente limitata, allora M è deformabile in S^-.*

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma precedente in M non ci sono punti critici di f. Allora, viste anche le ipotesi poste, si possono ripetere (con facili modifiche) i ragionamenti fatti per dimostrare il lemma 5.2. Ad esempio si porrà per $p\in S^-$ $T(p)=0$ e per $p\in M-S^-$ $T(p)=\sup\{\tau : \forall t\in(0,\tau)\ u(t,p)\in M-S\}$. Si osservi anche che $M-S$ è un aperto e che $M-S^-$ è un insieme aperto relativamente a $\bar V$. Q.E.D.

5.6. TEOREMA. *Sia f una funzione di classe C^2 di Ω in R; supponiamo che f verifichi condizioni al bordo generali, l'ipotesi $(P-S)$ su $\bar V$, l'ipotesi* 5.1 *ed è inferiormente limitata. Allora, detto $N(f)$ il numero dei punti critici di f in $\bar V$, si ha:*

$$N(f)\geq \mathrm{cat}_k(\bar V)-\mathrm{cat}_k(S^-).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia M l'insieme introdotto nel lemma 5.4. Allora $W=\bar V-M$ è un insieme chiuso (lemma 5.4-i)). In vista di applicare il teorema 4.5, verifichiamone le ipotesi. La f è inferiormente limitata, e poichè verifica su $\bar V$ l'ipotesi $(P-S)$, verifica tale ipotesi anche sull'insieme chiuso W. Dimostriamo che $\forall p\in W$ la soluzione di (8) è in W $\forall t\in[0,t^+(p))$. Ragioniamo per assurdo: per qualche $p\in W$, $\exists t^*$ tale che $q^*=(t^*,p)\notin W$; se $q^*\in\Omega-\bar V$ allora $p\in M$ per come è stato definito questo insieme. Se invece $q^*\in\bar V-W=M$, allora $\exists t'>t^*$ tale che $u(t',p)\in\Omega-\bar V$; quindi anche in questo caso si avrebbe $p\in M$, e questo è assurdo.

Applicando il teorema 4.5 si ha allora che

$$N(f)\geq \mathrm{cat}_k(W). \tag{9}$$

Valutiamo perciò la $\mathrm{cat}_k(W)$. Si ha $\bar V=W\cup M$ con W chiuso. Poichè $\bar V$ è un ANR, per il lemma 3.3-iv), si ha che

$$\mathrm{cat}_k(\bar V)\leq \mathrm{cat}_k(W)+\mathrm{cat}_k(M). \tag{10}$$

D'altra parte (lemma 5.4-iii)) $M\supseteq S^-$ e inoltre M è deformabile in S^-

(lemma 5.5). Allora per il lemma 3.4-ii) si ha

$$\operatorname{cat}_k(M) = \operatorname{cat}_k(S^-). \tag{11}$$

Da (9) (10) e (11) si ha quindi

$$N(f) \geq \operatorname{cat}_k(W) \geq \operatorname{cat}_k(\overline{V}) - \operatorname{cat}_k(S^-). \qquad \text{Q.E.D.}$$

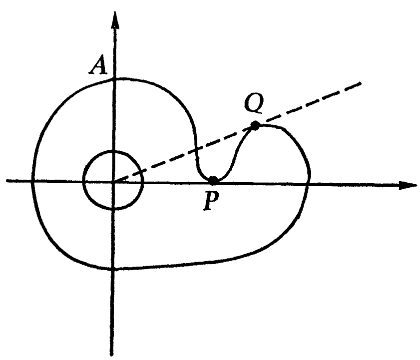
§ 6. Osservazioni finali ed esempi.

Mostriamo con questo primo esempio come nel teorema 5.3 non può essere soppressa l'ipotesi 5.1.

6.1. Esempio. Sia $H = R^2$, $V = \{(x_1, x_2) : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\}$ e $f(x_1, x_2) = x_2$. Allora $\operatorname{cat}(S^-; \overline{V}) = 1$, $\operatorname{cat}(\overline{V}; \overline{V}) = 2$, ma f non ha punti critici in V. Si osservi che nei punti $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ non è verificata l'ipotesi 5.1.

Il seguente esempio mostra che la tesi del teorema 5.5 non è più vera se non è verificata l'ipotesi 5.1.

6.2. Esempio. Sia $H = R^2$, V l'insieme abbozzato in figura, $f(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Allora è $S^- = \widehat{PAQ}$, e quindi $\operatorname{cat}_k(S^-) = 1$, mentre $\operatorname{cat}_k(\overline{V}) = 2$; f non ha però punti critici in $\overline{V}$. Nel punto P non è verificata l'ipotesi 5.1.



Anzi si può mostrare facilmente che nel caso particolare che: $H=R^2$, V è del tipo di una corona circolare, S^- è un arco e gli unici punti ove il grad f è tangente a S sono gli estremi P e Q di tale arco; allora l'ipotesi 5.1 è verificata non appena si sappia che la curva soluzione di (8) con valore iniziale P (o Q) non appartiene a V per $t<0$.

Vogliamo infine dare una condizione sufficiente perchè l'ipotesi 5.1 sia verificata. Sia $x \in S$ e sia $(\text{grad} f(x), n(x))=0$. Supponiamo che sia $\Phi(x)=0$ l'equazione di S, valida in un opportuno intorno $I(x)$ di x (cfr. Definizione 1.1) e supponiamo che Φ sia di classe C^2. Allora $\forall x \in I(x) \cap \cap (\Omega - \overline{V})$ si ha che $\Phi(x)>0$. Indicata con $u(t)=u(t, x)$ la soluzione di (7), si consideri la funzione $g(t)=\Phi(u(t))$ che è una funzione reale di classe C^2. Se $g(t)$ ha un minimo relativo proprio per $t=0$, essendo $g(0)=\Phi(u(0))=\Phi(x)=0$, risulterà $g(t)>0$ $\forall t \neq 0$ e abbastanza piccolo. D'altra parte se $\Phi(u(t))$ è positivo, ciò significa per la condizione *b*) della definizione 1.1 che $u(t) \in \Omega - \overline{V}$ ($\forall t \neq 0$ e sufficientemente piccolo): quindi *se $g(t)$ ha un minimo relativo proprio per $t=0$, allora l'ipotesi 5.1 è verificata.* Una condizione sufficiente perchè $g(t)$ abbia un tale minimo è che $g'(0)=0$, $g''(0)>0$. La prima dà la condizione di tangenza, mentre la seconda darà una condizione esprimibile mediante i differenziali di Φ e di f.

BIBLIOGRAFIA

[1] Browder, F. E.: *Infinite dimensional manifolds and non linear elliptic eigenvalue problems,* Ann. Math., *82* (1965), 459-477.

[2] Morse, M. - Van Schaack, G. B.: *The critical point theory under general boundary conditions,* Ann. Math., *35* (1934), 545-571.

[3] Palais, R. S.: *Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds,* Topology, *5* (1966), 115-132.

[4] Palais, R. S.: *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds,* Topology, *5* (1966), 1-16.

[5] Palais, R. S.: *Morse theory on Hilbert monifolds,* Topology, *2* (1963), 299-340.

[6] Palais, R. S. - Smale, S.: *A generalized Morse theory,* Bull. Amer. Math. Soc., *70* (1964), 165-171.

[7] Rothe, E. H.: *Critical point theory in Hilbert space under general boundary conditions,* Jour. Math. Anal. Appl., *11* (1965), 357-409.

[8] SCHWARTZ, J. T.: *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, Comm. Pure Appl. Math., *17* (1964), 307-315.

[9] SCHWARTZ, J. T.: *Non linear functional analysis*, Gordon an Breach Science Publishers.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 gennaio 1971.