RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Distribuzioni funtoriali in una variabile quasi periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 315-326

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__315_0>

DISTRIBUZIONI FUNTORIALI IN UNA VARIABILE QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI *)

§ **1.** Seguendo la definizione di distribuzione data da N. Popa, [2], pag. 677, (in questo lavoro tali distribuzioni sono dette funtoriali), si introduce il concetto di distribuzione funtoriale quasi periodica.

Si ottiene: nel § 2, l'integrazione dell'equazione $T'=S$, S distribuzione funtoriale, (estensione del procedimento di L. Schwartz, [3], pag. 52), utile per la dimostrazione che il valor medio di una distribuzione funtoriale quasi periodica è una distribuzione funtoriale costante; nel § 3, il teorema di unicità dello sviluppo di Fourier per le distribuzioni funtoriali quasi periodiche e il teorema di numerabilità dei loro coefficienti di Fourier.

§ **2.** Gli spazi vettoriali topologici considerati sono sul corpo complesso $\boldsymbol{C}$; $\mathfrak{C}$ sia la categoria degli spazi di Hausdorff, localmente convessi, completi; $\mathfrak{C}(F)$, la categoria degli spazi di Fréchet.

DEF. 1. *Un funtore F (covariante) di $\mathfrak{C}(F)$ in $\mathfrak{C}$ è lineare e fortemente continuo se la mappa*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_b(E;\ G) \to F(\varphi) \in \mathrm{Hom}_b(F(E);\ F(G))$$

è lineare e continua (b su Hom $(H;\ K)$ *è la topologia dell'uniforme convergenza sui limitati di H).*

Se $\mathfrak{D}$ è il dominio delle distribuzioni scalari, il funtore $\varepsilon_{\mathfrak{D}}$ di $\mathfrak{C}(F)$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

in $\mathcal{C}$ così definito:

$$\varepsilon_{\mathfrak{D}}(E)=\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E,\quad \varepsilon_{\mathfrak{D}}(\varphi)=1_{\mathfrak{D}}\,\hat{\otimes}_\varepsilon\,\varphi,$$

$$\varphi\in \operatorname{Hom}(H;\ K),\quad 1_{\mathfrak{D}}\,\hat{\otimes}_\varepsilon\,\varphi\in \operatorname{Hom}(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon H;\ \mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon K),$$

è lineare e fortemente continuo, [2], pag. 672, e [4], pag. 46.

Se il funtore F è come in Def. 1,

DEF. 2. *Una distribuzione funtoriale T in $\mathcal{C}(F)$ a valori in F è un morfismo funtoriale di $\varepsilon_{\mathfrak{D}}$ in F con, $\forall E\in\mathcal{C}(F)$, $T^E:\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E\to F(E)$ lineare e continua.*

Lo spazio di tali distribuzioni è indicato con $\{\varepsilon_{\mathfrak{D}}\to F\}$; su di esso, la topologia (vettoriale) b, ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}}\to F\}$, è la topologia limite proiettivo della famiglia

$$(\operatorname{Hom}_b(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E)),\ v^E),\quad E\in\mathcal{C}(F),$$

$$v^E:\{\varepsilon_{\mathfrak{D}}\to F\}\to \operatorname{Hom}_b(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E)),\quad v^E(T)=T^E.$$

PRELEMMA. *Se E e $G\in\mathcal{C}$ e $\varphi\in\operatorname{Hom}(E;\ G)$, $\tilde{I}(\varphi):\mathfrak{D}\otimes_\varepsilon E\to G$, $\langle\tilde{I}(\varphi)\cdot g(x)\rangle=\varphi(\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt)$, è lineare e continua, ($I(\varphi):\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E\to G$, sarà l'estensione per continuità di $\tilde{I}(\varphi)$).*

DIMOSTRAZIONE. Se $1:\mathfrak{D}\to\boldsymbol{C}$ è la distribuzione costante $\langle 1\cdot g(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt$, e $i:\boldsymbol{C}\otimes_\varepsilon G\to G$ è l'isomorfismo canonico, risulta, facilmente, $\tilde{I}(\varphi)=i\circ(1\otimes_\varepsilon\varphi)$.

LEMMA 1. *Siano E e G come nel prelemma; $S\in\operatorname{Hom}(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ G)$. Esiste $T_0\in\operatorname{Hom}(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ G)$ con $T'_0=S$; ogni $T\in\operatorname{Hom}(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ G)$ con $T'=S$ è del tipo $T=T_0+I(\varphi)$. (La mappa $\chi:\operatorname{Hom}_b(E;\ G)\to\operatorname{Hom}_b(\mathfrak{D}\,\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ G)$, $\chi(\varphi)=T_0+I(\varphi)$, è un omeomorfismo sulle primitive di S).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $g_0(x)\in\mathfrak{D}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}g_0(x)dx=1$. Se $g(x)\in\mathfrak{D}\otimes_\varepsilon E$ e se $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx=u\in E$, posto $\chi(x)=g(x)-g_0(x)\otimes u$, poichè $\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x)dx=0$, esiste, unica, $\psi(x)\in\mathfrak{D}\otimes_\varepsilon E$ con $\psi'(x)=\chi(x)$.

Sia $\tilde{T}_0 : \mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E \rightarrow G$, $\langle \tilde{T}_0 \cdot g(x) \rangle = -\langle S \cdot \psi(x) \rangle$: $\tilde{T}_0$ è continua; il suo prolungamento, per continuità, T_0, è la mappa richiesta nella prima parte del lemma, (si tiene presente che l'operatore di derivazione p-esima, $\tilde{D}^{(p)} : \mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E \rightarrow \mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E$, $\langle \tilde{D}^{(p)} \cdot g(x) \rangle = g^{(p)}(x)$, coincide con $D^{(p)} \otimes_\varepsilon i$, $D^{(p)} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, $i : E \rightarrow E$, identità).

Sia $T \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{D} \,\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\; G)$, $T' = 0$. $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(E;\; G)$ sia così definita: $\varphi(u) = \langle T \cdot g_0(x) \otimes u \rangle$. Risulta: $\tilde{I}(\varphi) \equiv T$ su $\mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E$. Nel fatto: $\langle \tilde{I}(\varphi) \cdot$ $\cdot g(x) \otimes u \rangle = \varphi[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt \cdot u] = \langle T \cdot g_0(x) \otimes \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt\, u \rangle = \langle T \cdot g(x) \otimes u \rangle$; allora, su tutto $\mathfrak{D} \,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $I(\varphi) \equiv T$.

(Facilmente, $\chi : \mathrm{Hom}_b\,(E;\; G) \rightarrow \mathrm{Hom}_b\,(\mathfrak{D} \,\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\; G)$ è biunivoca e continua; dimostriamo che è relativamente aperta. Se A è limitato in E, $B = \{g_0(x) \otimes u,\ \forall u \in A\}$ è limitato in $\mathfrak{D} \,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$. Allora:

$$\begin{aligned} \chi[\varphi_1 + \mathfrak{U}(A,\ V)] &= T_0 + I(\varphi_1) + I(\mathfrak{U}(A,\ V) = T_0 + I(\varphi_1) + \\ &+ \{\mathfrak{U}(B,\ V) \cap I(\mathrm{Hom}_b\,(E;\ G))\} = \\ &= \{T_0 + I(\varphi_1) + \mathfrak{U}(B,\ V)\} \cap \chi(\mathrm{Hom}_b\,(E;\ G))). \end{aligned}$$

Il lemma è concluso.

DEF. 3. *Sia* $\mathfrak{U} \subset X\{\mathrm{Hom}\,(E;\ F(E)),\ E \in \mathfrak{C}\}$, *tale che*: *se* $\{\varphi_E\} \in \mathfrak{U}$, $\forall \psi \in \mathrm{Hom}\, L(E;\ G)$, $F(\psi) \circ \varphi_E = \varphi_G \circ \psi$. *Si indica con* $I(\Phi)$ *l'elemento di* $X\{\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{D} \,\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E)),\ E \in \mathfrak{C}\}$, *di componente E-esima*, $I(\Phi)^E$, *coincidente con* $I(\varphi_E)$, $\{\varphi_E\} \in \mathfrak{U}$.

LEMMA 2. $I(\Phi) \in \{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\}$ *e* $I(\Phi)' = 0$. *Ogni* $T \in \{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \rightarrow F\}$, *con* $T' = 0$ *è del tipo*: $T = I(\Phi)$.

DIMOSTRAZIONE. Che $I(\Phi)$ sia un morfismo funtoriale si ha in base alla def. 3; nel fatto: se E e $G \in \mathfrak{C}$ e $\psi \in \mathrm{Hom}\,(E;\ G)$, $F(\varphi) \circ \tilde{I}(\varphi_E) =$ $= \tilde{I}(\varphi_G) \circ (1 \otimes_\varepsilon \psi)$; ne segue $F(\psi) \circ I(\varphi_E) = I(\varphi_G) \circ (1 \,\widehat{\otimes}_\varepsilon \psi)$. $I(\Phi)'$ ha come componente E-esima $I(\varphi_E)'$; su $\mathfrak{D} \otimes_\varepsilon E$,

$$\langle I(\varphi_E)' \cdot g \otimes u \rangle = -\varphi_E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) \otimes u dt \right] = -\varphi_E(0);$$

dunque $I(\Phi)' \equiv 0$.

La seconda parte del lemma segue dal lemma 1.

TEOREMA. *L'equazione $T'=S$ ha soluzioni in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \to F\}$. Se T_0 è una soluzione di $T'=S$ in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}} \to F\}$, ogni altra soluzione è del tipo: $T_0+I(\Phi)$, $I(\Phi)$ come nella definizione 3.*

DIMOSTRAZIONE. Dal lemma 1, se S^E è la E-esima componente di S, esiste $T_0^E \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{D} \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} E;\ F(E))$ con $T_0^E)'=S^E$. $T_0 \in X\{\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{D} \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} E;\ F(\mathrm{E})),\ E \in \mathcal{C}\}$, $v^E(T_0)=T_0^E$, è un morfismo funtoriale di $\varepsilon_{\mathfrak{D}}$ in F. Nel fatto: se $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(E;\ G)$,

$$F(\varphi)\langle T_0^E \cdot g(x) \otimes u\rangle = -$$

$$F(\varphi)\langle S^E \cdot \int_{-\infty}^{x} g(t) \otimes u dt - \left(\int_{-\infty}^{x} g_0(t)dt \otimes u\right) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt\rangle = -$$

$$-\langle S^G \cdot \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \otimes \varphi(u) - \left(\int_{-\infty}^{x} g_0(t)dt \otimes \varphi(u)\right) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt\rangle =$$

$$= \langle T_0^G \circ 1 \otimes_\varepsilon \varphi \cdot g(x) \otimes u\rangle.$$

Sicchè: $F(\varphi) \circ T_0^E = T_0^G \circ (1 \otimes_\varepsilon \varphi)$; ne risulta: $F(\varphi) \circ T_0^E = T_0^G \circ (1 \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} \varphi)$.

Il lemma 2 conclude il teorema.

§ 3. Se $\mathfrak{D}_{L^1}$ è definito come in [3], pag. 199, $\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} : \mathcal{C}(F) \to \mathcal{C}$, $\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}$ definito come $\varepsilon_{\mathfrak{D}}$, è ancora lineare e fortemente continuo.

DEF. 1. *Se $F : \mathcal{C}(F) \to \mathcal{C}$ è un funtore lineare e fortemente continuo, ogni $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ si dice una distribuzione funtoriale limitata.*

DEF 2. *Se $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$, T si dice quasi periodica se e solo se $\{\tau_h T\}$, $h \in R$, è relativamente compatto in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to \mathrm{F}\}$.*

Si ha:

a) se $g(x) : R \to G$ è $\mathcal{C}^\infty$ e quasi periodica assieme ad ogni sua derivata, e se $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ è quasi periodica, $Q=g(x)T$ è quasi periodica;

b) se T è quasi periodica, anche $T^{(n)}$, $\forall n \in N$;

c) se $Q = \lim_j T_j$, limite in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$, T_j quasi periodica, Q è quasi periodica.

DIMOSTRAZIONE. *a)* Se $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to B\}$ è quasi periodica, $\forall E \in \mathcal{C}(F)$ $T^E : \mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E \to F(E)$ è tale che $\{\tau_h T^E\}$ è relativamente compatto in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$. Poichè $g(x)T$ ha componente E-esima $g(x)T^E$, ne segue: $\{\tau_h(g(x)T^E)\}$ relativamente compatto in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$. Vista la topologia su $\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$, $\{\tau_h(g(x)T)\}$ è relativamente compatto in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$.

b) b) segue dal fatto che se $\tau_{h_i} T^E \to Q$, anche $(\tau_{h_i} T^E)^{(n)} \to Q^{(n)}$.

c) Se $Q = \lim_j T_j$, $Q^E = \lim_j T_j^E$; allora $\tau_h Q^E = \lim_j (\tau_h T_j^E)$, uniformemente rispetto a $h \in R$.

Sia $T : \mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E \to G$, $E \in \mathcal{C}(F)$, G completo, lineare e continua. La mappa $\theta_T(h) : R \to \mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E; G)$, $\theta_T(h) = \tau_h T$, è continua (è sufficiente tener presente che se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E$, e se la successione reale $h_i \to h_0$, $g(x+h_i) \to g(x+h_0)$ in $\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E$, uniformemente rispetto a $g(x) \in A$).

Si può considerare, allora, visto che $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ è completo, l'integrale, $k \in R$, $k > 0$, $1/k \int_0^k (\tau_h T)dh$. Si ha:

PRELEMMA. *Se $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ e se $\varphi \in \mathrm{Hom}(E; G)$,*

$$F(\varphi) \circ \left(1/k \int_0^k (\tau_h T^E) dh \right) = 1/k \int_0^k (\tau_h T^G) dh \circ 1 \hat{\otimes}_\varepsilon \varphi.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $g(x) \in \mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E$, l'applicazione (lineare) $g(x)$: $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)) \to F(E)$, $g(x)(T) = \langle T \cdot g(x) \rangle$ è ovviamente continua. Se $g(x) \otimes u \in \mathfrak{D}_{L^1} \otimes E$,

$$F(\varphi)\left[\langle 1/k \int_0^k (\tau_h T^E) dh \cdot g(x) \otimes u \rangle \right] =$$

$$=F(\varphi)\left[\langle 1/k\int_0^k \langle T^E\cdot g(x+h)\otimes u\rangle dh\rangle\right]=$$

$$=1/k\int_0^k \langle F(\varphi)\circ T^E\cdot g(x+h)\otimes u\rangle dh=\langle 1/k\int_0^k (\tau_h T^G)dh\cdot g(x)\otimes\varphi(u)\rangle$$

poichè $F(\varphi)\circ T^E=T^G\circ 1\,\widehat{\otimes}_\varepsilon\,\varphi$.

Sia F un funtore di $\mathcal{C}(F)$ in sè soddisfacente la seguente proprietà:

1)′ $F(\boldsymbol{C})=B_1$, $\boldsymbol{C}$ il corpo complesso, B_1 di Banach;

Si ha il seguente:

Lemma Fondamentale. *$\forall T\in{}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}\to F\}$ quasi periodica, se $T^E:\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E\to F(E)$ è la sua E-esima componente, esiste il*

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k(\tau_h T^E)dh$$

in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$ e tale limite coincide con qualche $I(\varphi)$, (prelemma § 1), $\varphi\in\mathrm{Hom}(E;\ F(E))$.

Dim. Se $T\in{}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}\to F\}$ è quasi periodica e $T^E:\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E\to F(E)$ è la sua E-esima componente, detto A un limitato di $\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ e $\{\alpha\}$ un equicontinuo di $F(E)'$, le funzioni $g_{\alpha,k}(x):R\to\boldsymbol{C}$, $g_{\alpha,k}(x)=$ $=\langle\alpha\circ T_h{}^E\cdot k(x-h)\rangle$, $\forall k(h)\in A$, $\forall\alpha\in\{\alpha\}$, sono: *a*) equilimitate; *b*) equiuniformemente continue; *c*) equinormali ($\forall\{h_i\}$ sequenza di reali esiste $\{h_{i_j}\}$ sottosequenza di h_i con la proprietà: $\lim_j g_{\alpha,k}(x+h_{i_j})=f_{\alpha,k}(x)$ uniformemente rispetto a $x\in R$, uniformemente rispetto a α e k).

Una tale famiglia di funzioni è relativamente compatta[1]) in $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(R;\ \boldsymbol{C})$, spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate di R in

---

[1]) Che la famiglia $g_{\alpha,k}(x)$ sia relativamente compatta in $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(R;\ \boldsymbol{C})$ si vede applicando il teorema di Amerio, Rend. Sem. Mat. di Padova, 1960, pag. 293. Nel fatto: sia $\{f_n(x)\}$, $n\in N$, una successione di funzioni equilimitate, equicontinue,

$\boldsymbol{C}$ con la topologia della convergenza su R. È facile vedere che tali funzioni sono equiconvergenti al loro valor medio. Nel fatto: indicata la famiglia in questione con $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\forall\varepsilon>0$ esiste

$$V(\varepsilon)=\{l(x)\in\mathcal{C}(R;\ \boldsymbol{C}) : |l(x)|\leq\varepsilon\}$$

tale che

$$\{f_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}\subset \bigcup_1^n{}_i\, f_{\gamma_i}(x)+V(\varepsilon).$$

Detto k_0 un reale con, $\forall k_1\geq k_2\geq k_0$,

$$\left|\frac{1}{k_1}\int_0^{k_1} f_{\gamma_i}(x)dx-\frac{1}{k_2}\int_0^{k_2} f_{\gamma_i}(x)dx\right|\leq\varepsilon,\quad 1\leq i\leq n,\ \text{risulta, } \forall\gamma\in\Gamma,$$

$$\left|\frac{1}{k_1}\int_0^{k_1} f_\gamma(x)dx-\frac{1}{k_2}\int_0^{k_2} f_\gamma(x)dx\right|\leq 3\varepsilon;$$

sicchè:

$$\left|\frac{1}{k_1}\int_0^{k_1} f_\gamma(x)dx-M(f_\gamma)\right|\leq 3\varepsilon,\quad \Gamma\forall\in\gamma,\quad \forall k_1\geq k_0 .$$

Si può dimostrare, facilmente, che la rete

$$\left\{\frac{1}{k}\int_0^{k}(\tau_h E^E)dh,\ k\geq 1,\ k\in R\right\}$$

è di Cauchy in $\mathrm{Hom}_b\,(\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$.

Sia $Q^E=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k}\int_0^k(\tau_h T^E)dh.$

---

equinormali, di R in $\boldsymbol{C}$; la funzione $f(x)=\{f_n(x)\}$ di R in $\mathcal{C}^\infty$ è quasi periodica; ciò implica: le $f_n(x)$ equiquasiperiodiche. Poichè sono equicontinue (ed equilimitate) dalla $\{f_n(x)\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}\mathfrak{X}}(R;\ \boldsymbol{C})$.

Per la seconda parte si ha: la topologia su $\mathrm{Hom}_b\{\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))\}$ non è meno fine della topologia su $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$, poichè i limitati di $\mathfrak{D}\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ sono limitati anche in $\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ (la topologia che $\mathfrak{D}_{L^1}$ induce su $\mathfrak{D}$ è meno fine dell'originale). Sicchè: se la rete $\frac{1}{k}\int_0^k(\tau_h T^E)dh$ è di Cauchy in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$ essa è di Cauchy anche in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$, ($T^E$, ristretta a $\mathfrak{D}\widehat{\otimes}_\iota E$, resta continua). Se S^E è una primitiva di T^E in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}\otimes_\varepsilon E;\ F(E))$, si ha:

$$\int_0^k(\tau_h T^E)dh=S^E-\tau_k S^E.$$

Nel fatto: se $F(E)\equiv\boldsymbol{C}$ e se $g(x)\otimes u\in\mathfrak{D}\otimes E$, sia:

$$\langle\int_0^k(\tau_h T^E)dh\cdot g(x)\otimes u\rangle\neq\langle S^E\cdot g(x)\otimes u\rangle-\langle S^E\cdot g(x+k)\otimes u\rangle.$$

Il primo membro coincide con $\langle\int_0^k\langle T^E\cdot g(x+h)\otimes u\rangle dx\rangle$; per $k=0$, le funzioni di destra e sinistra coincidono e hanno la stessa derivata. Per il teorema di Hahn-Banach, segue:

$$\langle\int_0^k(\tau_h T^E)dh\cdot g(x)\otimes u\rangle=\langle S^E\cdot g(x)\otimes u\rangle-\langle S^E\cdot g(x+k)\otimes u\rangle,$$

vero qualunque sia $F(E)$. Se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E$, anche $A'=$ $=\{g'(x),\ \forall g(x)\in A\}$; ne segue: $(Q^E)'=\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\langle T^E-\tau_k T^E\rangle$; poichè se $\{\alpha\}$ è equicontinuo in $F(E)$, $\{\alpha\circ T^E\}$ è limitato in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ \boldsymbol{C})$ si ha:

$$\left|\frac{1}{k}\langle\alpha\circ T^E\cdot A\rangle-\frac{1}{k}\langle\alpha\circ T^E\cdot\tau_k A\rangle\right|\leq 1$$

se $k\geq k_0$, k_0 conveniente. Ciò significa che $(Q^E)'\in\mathfrak{U}(A,\{\alpha\})$ intorno di zero arbitrario di $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$. Allora $Q^{E'}\equiv 0$ e, su $\mathfrak{D}\widehat{\otimes}_\varepsilon E$, lemma 1, § 2, $Q^E = I(\varphi)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(E; F(E))$. Poichè $\mathfrak{D} \otimes E$ è denso in $\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E$, $Q^E = I(\varphi)$ anche su $\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E$. $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(E; F(E))$ si ha: $F(\varphi) \circ Q_k{}^E = Q_k{}^G \circ 1 \hat{\otimes}_\varepsilon \varphi$, $Q_k{}^E = \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_k T^E) dh$; l'eguaglianza mantenendosi per $k_{\to +\infty}$, $F(\varphi) \circ Q^E = Q^G \cdot 1 \otimes_\varepsilon \varphi$.

Il lemma dimostrato permette la:

DEF. 3. *Se $T \in \{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ è quasi periodica, si dice valor medio, $M(T)$, di T la distribuzione funtoriale costante $I(\Phi) \in_b \{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$,*

$$I(\varphi)^E = I(\varphi_E) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k (\tau_h T^E) dh,$$

integrazione e limite in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$, $\varphi_E \in \mathrm{Hom}(E; F(E))$.

In base ad *a*) del § 3, se $\lambda \in R$.

DEF. 4. *Si dice spettro di T, $Sp.(T)$, $T \in_b \{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$, quasi periodica, l'insieme dei $\lambda \in R$ tali che il valor medio di $(e^{-i\lambda x} T)$ è diverso da zero.*

Le distribuzioni funtoriali costanti $I(\Phi)_\lambda(T) = M(e^{-i\lambda x} T)$ diconsi coefficienti di Fourier della distribuzione quasi periodica T.

Si hanno i seguenti teoremi:

TEOREMA 1 (di unicità). *Sia T una distribuzione funtoriale quasi periodica in $\mathcal{C}(F)$ a valori nel funtore F soddisfacente la proprietà* 1)'.

Se $I(\Phi)_\lambda(T) = 0$ $\forall \lambda \in R$, $T \equiv 0$.

TEOREMA 2 (di numerabilità). *Nelle ipotesi di Teorema 1 per T e F, $Sp.(T)$ è numerabile.*

DIMOSTRAZIONE T. 1. Si supponga, $E \in \mathcal{C}(F)$, $T^E \neq 0$. Esiste $g(x) \otimes \otimes u \in \mathfrak{D} \otimes E$, $\alpha \in F(E)'$ con,

$$\langle \alpha \circ T^E \cdot g(x+h) \otimes u \rangle : R \to \mathbf{C}$$

funzione quasi periodica non identicamente nulla. Esiste $\lambda_0 \in R$ con

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k e^{-i\lambda_0 h}\langle\alpha\circ T^E\cdot g(x+h)\otimes u\rangle dh\neq 0.$$

Per l'ipotesi su T, risulta:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k \tau_h(e^{i\lambda_0 x}T^E)dh=0=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k \tau_h(e^{i\lambda_0 x}\alpha\circ T^E)dh=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k e^{-i\lambda_0 h}[e^{i\lambda_0 x}\tau_h(\alpha\circ T^E)]dh=e^{i\lambda_0 x}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k e^{-i\lambda_0 h}(\tau_h\alpha\circ T^E)dh.$$

Ciò implica:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k e^{-i\lambda_0 h}(\tau_h\alpha\circ T^E)dh=0.$$

Ma allora:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k e^{-i\lambda_0 h}\langle\alpha\circ T^E\cdot g(x+h)\otimes u\rangle dh=0.$$

Assurdo.

Per la dimostrazione del teorema 2, si premette il

LEMMA 1. *Se $T\in{}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1}\to F\}$ è quasi periodica e*

$$\mathrm{Sp.}\,(T^E)=\left\{\lambda\in R:\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\int_0^k \tau_h(e^{-i\lambda x}T^E)dh\neq 0\right\},$$

$\mathrm{Sp.}\,(T^E)\equiv\mathrm{Sp.}\,(T^G)$, *$T^E$, al solito, la E-esima componente di T.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\lambda_0\in R$, $\lambda_0\in\mathrm{Sp.}\,(T^G)$, $\lambda_0\notin\mathrm{Sp.}\,(T^E)$.

$$I(\varphi_G)(\lambda_0)=\lim_k\frac{1}{k}\int_0^k(\tau_h T^G)dh\neq 0,$$

$\varphi_G \in \mathrm{Hom}(G;\ F(G))$; $I(\varphi_E)(\lambda_0)=0$. $\forall\psi\in \mathrm{Hom}(E;\ G)$ deve essere:

$$F(\psi)\circ I(\varphi_E)(\lambda_0)=I(\varphi_G)(\lambda_0)\circ 1\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ \psi.$$

Si può trovare $g(x)\otimes v\in \mathfrak{D}_{L^1}\otimes G$ con: $\langle I(\varphi_G)(\lambda_0)\cdot g(x)\otimes v\rangle\neq 0$ e $\psi_1\in \mathrm{Hom}(E;\ G)$ con $\psi_1(u)=v$. Ne risulta:

$$F(\psi_1)\circ I(\varphi_E)(\lambda_0)[g(x)\otimes u]=0=\langle I(\varphi_G)(\lambda_0)\cdot g(x)\otimes \psi_1(u)\rangle\neq 0.$$

Invertendo il ruolo di E e G si ha la tesi.

Dimostrazione del teorema 2. Se $\lambda_0\notin \mathrm{Sp.}(T)$, $\lambda_0\notin \mathrm{Sp.}(T^E)$. Poichè $\mathrm{Sp.}(T^{\boldsymbol{C}})$, $\boldsymbol{C}$ corpo complesso, è numerabile, $\mathrm{Sp.}(T)$ è numerabile.

Si conclude il presente § con l'esempio di un funtore non di Schwartz, def. 1, [2], pag. 672, soddisfacente la proprietà 1)′ di questo §.

$(\ )^{**}: \mathcal{C}(B)\to\mathcal{C}(B)$ sia così definito: $E\in\mathcal{C}(B)$, $(E)^{**}=E^{**}$, biduale di E (con topologia forte);

$$\varphi\in \mathrm{Hom}_b(E;\ G)\to(\varphi)^{**}={}^{tt}\varphi\in \mathrm{Hom}_b(E^{**};\ G^{**}),$$

${}^{tt}\varphi$ bitrasposta della φ. Il funtore $(\ )^{**}$ è lineare e fortemente continuo; se esistesse $K\in\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}$ come in [2] pag. 671, si avrebbe, se fosse $\varepsilon_K\equiv(\ )^{**}$, $K\widehat{\otimes}_\varepsilon\boldsymbol{C}\cong\boldsymbol{C}$. Ne deriva $\widehat{K}\cong\boldsymbol{C}$, $\widehat{K}$ completamento di K e quindi $K\cong\boldsymbol{C}$. Scelto E non riflessivo, si avrebbe: $E^{**}\cong\boldsymbol{C}\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ E\cong E$, ($E$ completo). Assurdo.

Il biduale (forte di $\boldsymbol{C}$ è isomorfo a $\boldsymbol{C}$ (verifica di 1)′).

[Nel caso di $F=(\ )^{**}$, $\mathcal{B}'_{\mathrm{q.p.}}$, [3], pag. 206, si può immergere nello spazio delle distribuzioni funtoriali quasi periodiche. È sufficiente, per vederlo, tener presente che: se $T\in\mathcal{B}'_{\mathrm{q.p.}}$, $T\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ E\to E^{**}$, v_E mappa di valutazione di E in E^{**}, è lineare e continua e, $\forall\varphi\in \mathrm{Hom}(E,\ G)$,

$${}^{tt}\varphi\circ T\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ v_E=T\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ v_G\circ 1\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ \varphi;$$

inoltre:

$$\chi:\ \mathcal{B}'_{\mathrm{q.p.}}\to \mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1}\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ E;\ E^{**}),$$

$\chi(T)=T\ \widehat{\otimes}_\varepsilon\ v_E$, è lineare continua.

Ciò implica che $T \otimes v \in \{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to (\ )^{**}\}$, $(T \otimes v)^E = T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E$, è senz'altro quasi periodica poichè $\{\tau_h(T \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E\} \equiv \{(\tau_h T) \widehat{\otimes}_\varepsilon v_E\}$ è relativamente compatto in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ E^{**})$.

L'autore non sa se questa immersione (algebrica e continua) è anche suriettiva].

BIBLIOGRAFIA

[1] BRATTI, G.: *Un altro modo di costruire la serie di Fourier delle distribuzioni di una variabile quasi periodiche.*

[2] POPA, N.: *Quelques applications de la théorie des catégories dans la théorie des distributions,* Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées, 1968.

[3] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions,* Hermann, 1966.

[4] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles,* Ann. Ist. Fourier, Tomo 7, 1957.

[5] SCHWARTZ, L. : *Espaces des fonctions differentiables à valeurs vectorielles,* Journal d'analyse mathématiques, 1953.

[6] TREVES, F.: *Linear topological spaces, distribution and Kernels,* Academic Press, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 dicembre 1970.