RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Un altro modo di costruire la serie di Fourier delle distribuzioni di una variabile quasi periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 305-313

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__305_0>

UN ALTRO MODO DI COSTRUIRE LA SERIE DI FOURIER DELLE DISTRIBUZIONI DI UNA VARIABILE QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI *)

§ **1.** Laurent Schwartz ha costruito la serie di Fourier di una distribuzione scalare quasi periodica utilizzando i seguenti risultati:

a) lo spazio vettoriale, $\mathcal{B}_{q.p.}$, delle funzioni quasi periodiche di classe $\mathcal{C}^\infty$ è denso nello spazio vettoriale $\mathcal{B}'_{q.p.}$ delle distribuzioni quasi periodiche con la topologia indotta dal duale forte di $\mathcal{D}_{L^1}$;

b) la mappa M di valor medio delle funzioni quasi periodiche è continua su $\mathcal{B}_{q.p.}$ quando quest'ultimo ha la topologia indotta da $\mathcal{B}'_{q.p.}$, [2], pag. 206.

Nella nota presente si dimostra come sia possibile costruire la serie di Fourier di una distribuzione quasi periodica a partire da una funzione, quasi periodica, « naturalmente » associata alla distribuzione; si ottiene il seguente risultato: *se* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ *è quasi periodica, i coefficienti (distribuzioni) di Fourier della funzione* $\theta_T(h): R \to \mathcal{D}'_{L^\infty} \subset \mathcal{D}'$, $\theta_T(h) = \tau_h T$, $\theta_T(h)$ *quasi periodica, coincidono con i termini della serie di Fourier della distribuzione* T.

Nel § 3 si esende il procedimento usato per le distribuzioni scalari alle distribuzioni vettoriali in uno spazio di Banach.

§ **2.** Seguendo L. Schwartz, [1], pag. 199, si indica con $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ il duale forte di $\mathcal{D}_{L^1}$.

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

Vale la seguente caratterizzazione: $T\in\mathfrak{D}'_{L^\infty}$ *è quasi periodica se e solo se la mappa* $\theta_T(h):R\to\mathfrak{D}'_{L^\infty}$, $\theta_T(h)=\tau_h T$, *soddisfa la proprietà di Bochner generalizzata (da ogni rete di funzioni del tipo* $\theta_T(h+k_j)$, $k_j\in R$, *è possibile estrarre una sottorete,* $\theta_T(h+k_{j'})$, *con, in* $\mathfrak{D}'_{L^\infty}$, $\lim_{j'}\theta_T(h+k_{j'})=g(h)$, *uniformemente rispetto ad* $h\in R$).

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente tener presente che: se si ha, in $\mathfrak{D}'_{L^\infty}$, $\lim_j T_j=Q$, si ha pure, $\lim_j \tau_h T_j=\tau_h Q$, uniformemente rispetto a $h\in R$.

Ciò a causa del fatto che se l'insieme $A\subset\mathfrak{D}_{L^1}$ è limitato, anche l'insieme $\{\tau_h A\}=\{\varphi(x+h),\ \forall\varphi\in A,\ \forall h\in R\}$ è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$.

TEOREMA. Sia $T\in\mathfrak{D}'_{L^\infty}$ quasi periodica.

a) in $\mathfrak{D}'$, *il* $\lim\limits_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k (\tau_h T)dh$ *esiste ed è una distribuzione costante* T_c ;

b) c *di* T_c *è il valore medio, secondo Schwartz, di* T : $c=M(T)$.

DIMOSTRAZIONE. $\forall\varphi(x)\in\mathfrak{D}$, sia

$$\langle Q\cdot\varphi\rangle=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle dh.$$

Q è lineare e continua su $\mathfrak{D}$. Nel fatto:

$$\langle Q\cdot A\rangle=\{\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle dh,\ \forall\varphi(x)\in A\}$$

è limitato in C se A è limitato in $\mathfrak{D}$. La rete

$$\{1/k\int_0^k(\tau_h T)dh,\ k\geq 1,\ k\in R\}$$

converge, in $\mathfrak{D}'$, debolmente a Q; poichè:

$$\{\{1/k\int_0^k(\tau_h T)dh,\ k\geq 1,\ k\in R\}\cup Q\}$$

è relativamente compatto in $\mathfrak{D}'$, ne segue:

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k(\tau_h T)dh=Q,$$

limite forte in $\mathfrak{D}'$, [4], pag. 358.

La prima parte di a) è dimostrata.

Per la seconda parte di a) si ha: se $S\in\mathfrak{D}'$ e $S'=T$,

$$1/k\int_0^k(\tau_h T)dh=1/k(S-\tau_k S);$$

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k(S-\tau_k S)'=Q';$$

poichè

$$1/k(S-\tau_k S)'=1/k(T-\tau_k T) \text{ e } T\in\mathfrak{D}'_{L^\infty}$$

ne segue: $Q'=0$. Q è costante.

Per la dimostrazione di b) si ha: sia $T=T_f$, $f(x)$ quasi periodica; $M(T)=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k f(x)dx$. Se si pone $a_k=1/k\int_0^k f(x)dx$ si ha, in $\mathfrak{D}'$, $\lim_{k\to+\infty} T_{a_k}=T_{M(T)}$.

Se

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt, \qquad 1/k\int_0^k(\tau_h f(x))dh=1/k(F(x)-\tau_k F(x));$$

risulta:

$$\lim_{k\to+\infty}\{\langle 1/k[F(x)-\tau_k F(x)]\cdot\varphi(x)\rangle-\langle T_{a_k}\cdot\varphi(x)\rangle\}=0, \quad \forall\varphi(x)\in\mathfrak{D}.$$

Nel fatto se $[a, b]$ è il supporto di $\varphi(x)$:

$$\lim_{k\to+\infty}\langle 1/k[F(x)-\tau_k F(x)]\cdot\varphi(x)\rangle=$$

$$=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_a^b F(x)\varphi(x)dx-\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_a^b F(x-k)\varphi(x)dx.$$

Il primo limite è nullo;

$$1/k\int_a^b F(x-k)\varphi(x)dx = 1/k[F(x-k)\int_a^x \varphi(t)dt]_a^b -$$

$$1/k\int_a^b f(x-k)\int_a^x \varphi(t)dtdx.$$

Il secondo termine del secondo membro ha limite nullo, poichè la funzione integranda è limitata, rimane da calcolare

$$-\lim_{k\to+\infty} 1/k\left[F(b-k)\int_a^b \varphi(t)dt\right].$$

Si ha:

$$-\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^{b-k} f(t)dt\cdot\int_a^b \varphi(t)dt;$$

con il cambiamento di variabile $u=t-b$ il limite diventa:

$$\left[-\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_{-b}^{0} f(u+b)du - \lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^{-k} f(u+b)du\right]\int_a^b \varphi(t)dt.$$

Il primo limite è nullo; il secondo è $m(f)\int_a^b \varphi(t)dt$.

Sia $T=T_g$, $g=f^k$, k intero >0, $f(x)$ quasi periodica, derivazione k-esima nel senso delle distribuzioni.

$M(T)=\lim_j (M[f_j^k])$, se in $\mathfrak{D}'_{L^\infty}$, $f_j(x)\to f(x)$, $f(x)\in\mathcal{C}^\infty$ quasi periodiche. Poichè $M[f_j^k]=0$, $M(T)=0$.

In $\mathfrak{D}'$,

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \theta_T(h)dh = \lim_{k\to+\infty} 1/k(f^{k-1}-\tau_k f^{k-1})=0,$$

poichè $f^{k-1}\in\mathfrak{D}'_{L^\infty}$.

Sia $T = \sum_1^n f_i^{k_i}$; poichè M è lineare è sufficiente ragionare per induzione su n.

Il teorema è completamente dimostrato.

In $\mathfrak{D}'$ sia, $\forall \lambda \in R$,

$$Q(\lambda) = \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \theta_T(h) e^{-i\lambda h} dh;$$

che il limite esista si ha con ragionamento analogo a quello in *a*) del teorema precedente.

Si ha:

a) $T_1 \equiv T_2$ *se e solo se* $Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda)$, $\forall \lambda \in R$;

b) $E \subset R$, $E = \{\lambda \in R : Q(\lambda) \neq 0\}$ *è un insieme numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. *a*) sia $Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda)$, $\forall \lambda \in R$.

Se $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$ si ha:

$$\langle Q_1(\lambda) \cdot \varphi(x) \rangle = \langle Q_2(\lambda) \cdot \varphi(x) \rangle =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \langle T_1 \cdot \varphi(x+h) \rangle e^{-i\lambda h} dh = \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \langle T_2 \cdot \varphi(x+h) \rangle e^{-i\lambda h} dh.$$

Le funzioni quasi periodiche $\langle T_1 \cdot \varphi(x+h) \rangle$ e $\langle T_2 \cdot \varphi(x+h) \rangle$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier: esse coincidono. Ne segue: $T_1 \equiv T_2$.

b) semplici calcoli danno:

$$\forall \lambda \in R, \ \tau_h(T e^{i\lambda x}) = e^{i\lambda x} \theta_T(h) e^{-i\lambda h}$$

Se

$$Q(\lambda) = \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \theta_T(h) e^{-i\lambda h} dh$$

si ha, pure,

$$Q(\lambda) e^{i\lambda x} = \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k e^{i\lambda x} \theta_T(h) e^{-i\lambda h} dh.$$

Ma l'ultimo limite coincide con:

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k \int_0^k \tau_h(e^{i\lambda x}T)dh$$

che, in virtù del teorema dimostrato, coincide con $Q_{[M(e^{i\lambda x}T)]}$.

Con la simbologia di Schwartz:

$$Q(\lambda)=Q_{a_{-\lambda}(T)}e^{-i\lambda x}, \qquad a_{-\lambda}(T)=M[e^{-i(-\lambda)x}T].$$

Se $\varphi(x)\in\mathfrak{D}$:

$$\langle Q(\lambda)\cdot\varphi(x)\rangle=a_{-\lambda}(T)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle e^{-i\lambda h}dh.$$

La funzione di variabile reale λ, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx$ è la subordinata, su R, di una funzione di variabile complessa, olomorfa intera [3], pag. 210.

Sia

$$E_1=\left\{\lambda\in R : a_{-\lambda}(T)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx\neq 0\right\}:$$

E_1 è numerabile poichè è l'insieme degli esponenti di Fourier della funzione quasi periodica $\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle$.

Sia

$$E_2=\left\{\lambda\in R : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=0\right\}:$$

E_2 è numerabile. Se $\lambda\notin E_1\cup E_2$

$$a_{-\lambda}(T)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=0$$

e, poichè $\lambda\notin E_2$, $a_{-\lambda}(T)=0$.

Allora $E' = \{\lambda : a_{-\lambda}(T) \neq 0\} \subset E_1 \cup E_2$: ne segue la tesi di b).

Osservazione. Nel corso della dimostrazione di b) si è provato: $Q(\lambda) = Q_{a_{-\lambda}(T)} e^{i(-\lambda)x}$; ciò significa: *I coefficienti (distribuzioni) di Fourier della funzione quasi periodica* $\theta_T(h) : R \to \mathfrak{D}'_{L^\infty} \subset \mathfrak{D}'$, *calcolati in* $\mathfrak{D}'$, *coincidono con i termini della serie di Fourier della distribuzione* T.

§ 3. Il procedimento fin qui usato si può estendere al caso delle distribuzioni vettoriali in uno spazio di Banach quasi periodiche.

Da [1], § 5, si ha: $L_{\text{q.p.}} \simeq \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}} \hat{\otimes}_\varepsilon B$, $L_{\text{q.p.}} \subseteq L_b(\mathfrak{D}_{L^1}; B)$, B spazio di Banach.

Se $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ e $u \in B$, $T \otimes u : \mathfrak{D}_{L^1} \to B$ è q.p., poichè

$$\lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \theta_T(h) dh = T_c$$

in $\mathfrak{D}'$,

$$\lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \theta_{T \otimes u}(h) dh = T_c \otimes u$$

in $L_b(\mathfrak{D}; B)$. Se $\varphi(T) = T_c$, la mappa lineare $\varphi : \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}} \to \mathfrak{D}'$ è continua; ne segue:

$$\varphi \otimes_\varepsilon i = \varphi_\varepsilon : \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}} \otimes_\varepsilon B \to \mathfrak{D}' \otimes_\varepsilon B \subset L_b(\mathfrak{D}; B)$$

è continua [4], pag. 439. È unica, allora, l'estensione, $\widehat{\varphi}_\varepsilon$, di φ_ε per continuità: $\widehat{\varphi}_\varepsilon : \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}} \hat{\otimes}_\varepsilon B \to L_b(\mathfrak{D}; B)$.

Se T è q.p. $T = \lim_j \Sigma^{(j)} T_k \otimes u_k$, limite in $L_{\text{q.p}}$, e

$$\tau_h T = \lim_j \Sigma^{(j)} (\tau_h T_k) \otimes u_k$$

uniformemente rispetto a $h \in R$.

$$\varphi_\varepsilon(\Sigma^{(j)} T_k \otimes u_k) = 1 \otimes v_j (^*) , \ \langle 1 \otimes v_j \cdot \varphi \rangle = v_j \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \in B.$$

---

*) $\varphi_\varepsilon[\Sigma_k^{(j)} T_k \otimes u_k] = (T_{b_1} \otimes u_1 + \dots + T_{b_n} \otimes u_u)^{(j)} = 1 \otimes v_j$ con $v_j = b_1 u_1 + \dots + b_u u_u$, $b_i = M(T_i) \in C$, $l \leq i \leq h$.

$\widehat{\varphi_\varepsilon}(T) = \lim_j 1 \otimes v_j$, $[\widehat{\varphi_\varepsilon}(T)]' = \lim_j [1 \otimes v_j]' = 0$; ne segue $\widehat{\varphi_\varepsilon}(T) = T_u$ per qualche $u \in B$,

$$\langle T_u \cdot \varphi \rangle = u \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \in B.$$

Si ha:

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(T) = \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k (\tau_h T) dh,$$

limite ed integrazione in $L_b(\mathfrak{D}; B)$.

Dimostrazione. Sia $A \subset \mathfrak{D}$, limitato

$$\langle T \cdot \varphi(x+h) \rangle = \lim_j \Sigma^{(j)} \langle T_k \cdot \varphi(x+h) \rangle u_k ,$$

uniformemente rispetto a $h \in R$, a $\varphi(x) \in A$. Allora:

$$1/k_1 \int_0^{k_1} \| \langle T \cdot \varphi(x+h) \rangle - \Sigma^{(j)} \langle T_k \cdot \varphi(x+h) \rangle u_k \| \, dh < \eta$$

se $j \geq j(\eta, A)$, $k_1 \in R_+$; dunque

$$\| \langle 1/k_1 \int_0^{k_1} (\tau_h T) dh - 1/k_1 \int_0^{k_1} \Sigma^{(j)} (\tau_h T_k) \otimes u_k dh \cdot A \rangle \| < \eta$$

se $j \geq j(\eta, A)$, $k_1 \in R_+$. Posto

$$Q = \lim_{k_1 \to +\infty} 1/k_1 \int_0^{k_1} (\tau_h T) dh$$

ne deriva $\| (Q - 1 \otimes v_j \cdot A \rangle \| < \eta$, come sopra; allora $Q = \lim_j 1 \otimes v_j = \widehat{\varphi_\varepsilon}(T)$.

La dimostrazione è compiuta.

Sia

$$Q(\lambda)=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k(\tau_h T)e^{-i\lambda h}dh,$$

limite ed integrazione in $L_b(\mathfrak{D}; B)$. Si ha, come in b) dell'ultimo teorema del § 2,

$$Q(\lambda)=T_{u(-\lambda)}e^{-i\lambda x}, \qquad u(-\lambda)=\widehat{\varphi}_\varepsilon[e^{-i(-\lambda)x}T]\in B.$$

Ragionamenti analoghi a quelli dell'ultimo teorema di § 2 danno: $u(\lambda)\neq 0$ per, al più, un'infinità numerabile di $\lambda\in R$.

Osservazione. Si vede facilmente come il valor medio calcolato, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)$, coincida con quello di S. Zaidman, [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] Bratti, G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. di Padova, 1970.

[2] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[3] Schwartz, L.: *Méthodes mathematiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1965.

[4] Treves, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Ac. Press, 1967.

[5] Zaidman, S.: *Corso C.I.M.E.*, 1961.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 dicembre 1970.