Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Angelo Favini

Sulla interpolazione di operatori compatti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 279-304

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__279_0>

SULLA INTERPOLAZIONE DI OPERATORI COMPATTI

ANGELO FAVINI *)

Introduzione.

Nel presente lavoro viene studiata la possibilità di dedurre dalla ipotesi che un operatore lineare continuo da uno spazio di Banach ad un altro spazio di Banach, ha una certa proprietà, (per esempio, è compatto oppure è nucleare), che tale operatore conserva questa proprietà se prolungato o ristretto ad altri spazi.

Si sono poi applicati risultati di questo genere alla descrizione di spazi più complessi degli spazi di Banach, come certi limiti proiettivi e limiti induttivi di spazi di Banach.

1. Richiami.

Siano E_0 ed E_1 due spazi vettoriali topologici localmente convessi (in breve, SVT l.c.). Diremo che E_1 è immerso (*densamente*) in E_0 se $E_1 \subset E_0$ con iniezione continua (e E_1 è *denso* in E_0).

Nel caso che E_i $(i=0, 1)$ sia uno spazio di Banach, parleremo di immersione *normale* se E_1 è denso in E_0 e $\forall x \in E_1$, $\| x \|_{E_0} \leq \| x \|_{E_1}$.

Se $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ sono due famiglie di SVT l.c., per cui E_β è immerso densamente in E_α e F_β è immerso in F_α, con $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha < \beta$, diremo che $\{E_\alpha\}$ ha la proprietà di *interpolazione* (di *interpolazione forte*) rispetto a $\{F_\alpha\}$, se ogni operatore lineare continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1, è continuo anche da E_α a F_α, $\alpha \in [0, 1]$; cioè:

(i) $$T \in L(E_0, F_0) \cap L(E_1, F_1) \Rightarrow T \in L(E_\alpha, F_\alpha).$$

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università di Bologna.

(se ogni operatore lineare continuo da E_α a F_α e da E_γ a F_γ, $\alpha<\gamma$, è continuo da E_β a E_β, $0\leq\alpha<\beta<\gamma\leq 1$; cioè:

$$\text{(ii)} \qquad T\in L(E_\alpha, F_\alpha)\cap L(E_\gamma, F_\gamma)\Rightarrow T\in L(E_\beta, F_\beta)$$

(cfr. [1], p. 106).

Nel caso che $\{E_\alpha\}$ e $\{F_\alpha\}$ siano famiglie di spazi di Banach, $\{E_\alpha\}$ ha la proprietà di interpolazione *normale* relativa a $\{F_\alpha\}$, se, oltre alla condizione (i), è verificata la seguente:

$$\text{(i)}' \qquad \| T \|_{E_\alpha\to F_\alpha}\leq[\| T \|_{E_0\to F_0}]^{1-\alpha}[\| T \|_{E_1\to F_1}]^{\alpha}.$$

Inoltre, $\{E_\alpha\}$ ha la proprietà di interpolazione *stretta* relativa a $\{F_\alpha\}$ se, vale la condizione (ii) e

$$\text{(ii)}' \quad \| T \|_{E_\beta\to F_\beta}\leq[\| T \|_{E_\alpha\to F_\alpha}]^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}[\| T \|_{E_\gamma\to F_\gamma}]^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \qquad 0\leq\alpha<\beta<\gamma\leq 1.$$

Nel seguito, supporremo per lo più, che le famiglie $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ godano di ulteriori proprietà. A questo proposito, ricordiamo che una famiglia $\{E_\alpha\}$ $(0\leq\alpha\leq 1)$ di spazi di Banach è una *scala normale continua* (di spazi di Banach) (cfr. [1], pp. 89, 97-98) se E_β è immerso normalmente in E_α, per $\alpha<\beta$, $x\in E_1$ implica che $\| x\|_{E_\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 1]{} \| x \|_{E_1}$ e, infine,

$$x\in E_1,\ 0\leq\alpha<\beta<\gamma\leq 1 \Rightarrow \| x \|_{E_\beta}\leq[\| x \|_{E_\alpha}]^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}[\| x \|_{E_\gamma}]^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Gli spazi localmente convessi che saranno considerati sono esempi di limiti proiettivi e di limiti induttivi.

Uno spazio limite *proiettivo stretto* (spazio LPS) E, è uno spazio l.c., separato, esprimibile come $E=\bigcap_I E_i$ (I intervallo della retta reale), munito della topologia proiettiva determinata dagli spazi di Banach E_i e tale che:

1) E è denso in ogni E_i;

2) $i<j\Rightarrow E_j$ è immerso in E_i con $\| x \|_{E_i}\leq\| x \|_{E_j}$, (cfr. [9], p. 40).

Uno spazio limite *induttivo stretto* (spazio LIS) F, è uno spazio l.c. e separato $F = \bigcup_n F_n$, dove F è munito della topologia induttiva definita dalla successione di spazi di Banach F_n soddisfacenti la condizione che F_i è incluso in F_j con immersione continua, per $i<j$, e la topologia indotta su F_i da quella di F_j è meno fine di quella iniziale su F_i.

Dati due spazi LPS, $E_0 = \bigcap_I E_{0,i}$, $E_1 = \bigcap E_{1,i}$ diciamo che E_1 è normalmente immerso in E_0 (cfr. [2], p. 362) se $E_{1,i}$ è immerso normalmente in $E_{0,i}$, $\forall i \in I$.

Inoltre, la famiglia $\{E_\alpha\}$ $(\leq \alpha \leq 1)$ di spazi LPS $E_\alpha = \bigcap E_{\alpha,i}$, forma una *scala normale continua* (di spazi LPS) (cfr. [2], p. 363), se E_β è immerso normalmente in E_α, per $\alpha < \beta$ e

$$x \in E_1 \Rightarrow \| x \|_{E_{\beta,i}} \leq [\| x \|_{E_{\alpha,i}}]^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} [\| x \|_{E_{\gamma,i}}]^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \qquad 0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1, \ \forall i \in I; \tag{1}$$

$$x \in E_1 \Rightarrow \| x \|_{E_{\alpha,i}} \xrightarrow[\alpha \to 1]{} \| E \|_{E_{1,i}}, \ \forall i \in I. \tag{2}$$

Esempi notevoli di spazi LPS sono i cosiddetti spazi numerabilmente normati completi (secondo Gelfand-Scilov). Un tale spazio è un limite proiettivo stretto di una successione di spazi di Banach: $\Phi = \bigcap_n \Phi_n$, e, inoltre, Φ_n è il completamento di Φ rispetto alla norma $\| \ \|_n$.

Le norme $\| \ \|_n$ devono, in ultimo, godere della seguente proprietà di compatibilità:

$\forall i, j \in N$, se $(x_n)_{n \in N}$ è una successione di Cauchy rispetto a $\| \ \|_i$ e a $\| \ \|_j$, convergente a zero rispetto a una di esse, allora $(x_n)_{n \in N}$ converge a zero anche rispetto all'altra norma, (cfr. [3], p. 16).

Nel caso che i Φ_n siano tutti spazi di Hilbert, si parla di spazio numerabilmente hilbertiano (cfr. [4], pp. 57-59).

Si danno definizioni corrispondenti per gli spazi LIS. Così diciamo che $E_1 = \bigcup_n E_{1,n}$ è immerso normalmente in $E_0 = \bigcup_n E_{0,n}$ se $E_{1,n}$ è immerso normalmente in $E_{0,n}$, per ogni naturale n (cfr. [2], p. 378).

Ancora, una famiglia $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ di spazi LIS $E_\alpha = \bigcup_n E_{\alpha,n}$ forma una *scala normale continua* (di spazi LIS) se, $\forall n \in N$, $\{E_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ è una scala normale continua di spazi di Banach, (cfr. [2], p. 379).

Ricordiamo che (cfr. [9], pp. 41, 43) valgono:

PROPOSIZIONE 1.1. *Siano* $E = \bigcap_I E_i$, $F = \bigcap_J F_j$ *due spazi LPS. Allora: Un operatore lineare* T *da* E *a* F *è continuo se e solo se* $\forall j \in J$ $\exists i \in J$ *tale che la estensione di* T *a* E_i *è continua da* E_i *a* F_j.

PROPOSIZIONE 1.2. *Siano* $L = \bigcup_n L_n$, $M = \bigcup_n M_n$ *due spazi limiti induttivi di successioni strettamente crescenti di spazi di Fréchet. Allora un operatore lineare* T *da* L *a* M *è continuo se e solo se:* $\forall j \in N$ $\exists i \in N$ *tale che la restrizione di* T *a* L_j *è continua da* L_j *a* M_i.

Se E e F sono due SVT, si dice che un operatore lineare T da E a F è *compatto* se esiste un intorno dello zero in E, U, tale che $T(U)$ è relativamente compatto in F.

Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert. Allora, (cfr, [4], p. 29), un operatore compatto da H_1 a H_2 ha la forma $A = UT$, dove T è un operatore compatto e positivo in H_1, e U è un operatore isometrico da $T(H_1)$ a H_2.

La decomposizione $A = UT$ è detta la *decomposizione polare* di A.

L'operatore T *è* $(A^*A)^{1/2}$, dove A^* è l'operatore aggiunto di A. Si ha (cfr. [4], p. 32 e [5], p. 90):

PROPOSIZIONE 1.A. *Siano* H_1, H_2 *due spazi di Hilbert, con prodotto interno* $(\ ,\ )_1$ *e* $(\ ,\ )_2$, *rispettivamente, e sia* A *un operatore compatto da* H_1 *a* H_2.

Allora A *ha la forma*:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\ , e_n)_1 h_n, \tag{(i)}$$

dove $e_1, e_2, \ldots$ *è un sistema ortonormale completo d'autovettori dell'operatore compatto positivo* $T = (A^*A)^{1/2}$, $\lambda_n > 0$, $\forall n \in N$, *i* λ_n *sono gli autovalori corrispondenti agli* e_n, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, *e* $h_n = Ue_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Viceversa, ogni serie della forma ((1)) *definisce un operatore compatto* A *per cui i* λ_n *sono gli autovalori dell'operatore* $(A^*A)^{1/2}$.

Infine,

$$\| A \|_{H_1 \to H_2} = \sup_n \lambda_n .$$

Seguendo Sebastião e Silva, (cfr. [10], pp. 396-397), diciamo che uno spazio LPS $E = \bigcap_n E_n$ è uno spazio M^* se:

$\forall n \in N \; \exists p \in N, \; p \geq n$ tale che la immersione di E_p in E_n è compatta.

Uno spazio LIS $E = \bigcup_n E_n$ è uno spazio LN^* se:

$\forall n \in N$, la immersione di E_n in E_{n+1} è compatta.

D'altra parte, per le proprietà della topologia limite induttivo, è sufficiente richiedere (cfr. [5], p. 132) che:

$\forall n \in N \; \exists p \geq n$ tale che la immersione in E_n in E_p è compatta.

Ritorniamo alla Proposizione 1.3. Nel caso che i numeri positivi λ_n che entrano nella espressione ((i)) dell'operatore compatto A, siano tali che $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$, l'operatore A si dice di tipo Hilbert-Schmidt, (cfr. [4], p. 49).

Se, invece, si ha: $\sum_n \lambda_n < +\infty$, allora l'operatore A è detto nucleare (cfr. [4], p. 49).

Il numero $[\sum_n \lambda_n^2]^{1/2} = |A|$, associato ad ogni operatore A di tipo Hilbert-Schmidt, è uno norma sullo spazio vettoriale di tali operatori. Quest'ultimo è, anzi, uno spazio di Hilbert.

Analogamente, il numero $\sum_n \lambda_n = |||A|||$ è una norma sullo spazio degli operatori nucleari da H_1 a H_2 e tale spazio è uno spazio di Banach.

Chiaramente, se A è nucleare da H_1 a H_2, allora:

$$\|A\|_{H_1 \to H_2} \leq |A| \leq |||A|||.$$

La definizione di operatore nucleare è stata data anche quando il dominio e il codominio dell'operatore sono spazi più generali degli spazi di Hilbert. Noi rimandiamo al libro di Maurin (Cfr. [13], pp. 161-162), oppure a quello di Treves (cfr. [6], pp. 477-487).

Ricordiamo che uno SVT l.c. e separato si dice *nucleare* se ogni operatore lineare continuo dallo spazio in questione a un qualunque spazio di Banach è nucleare.

Supponiamo che E sia uno spazio LPS, $E = \bigcap_I E_i$. Allora E è uno spazio nucleare se per ogni $i \in I$, esiste uno $j \in I$, $j \geq i$, tale che la immersione di E_j in E_i è nucleare, (cfr. [5], p. 148).

2. Operatori compatti, nucleari, di tipo Hilbert-Schmidt.

Punto fondamentale per lo sviluppo successivo è il seguente risultato di Krein e Petunin (cfr. [1], p. 112-113):

PROPOSIZIONE 2.1 *Sia* $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una famiglia di spazi di Banach tali che*:

1) $\alpha < \beta \Rightarrow F_\beta$ *è immerso densamente in* F_α ;

2) *esiste una successione* $(P_n)_{n \in N}$ *di operatori degeneri, cioè, di dimensione finita, definiti su* F_1 , *per cui*:

i) $\| P_n x - x \|_{F_1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \ \forall x \in F_1$;

ii) $\exists C > 0, \ \sup_n \| P_n \|_{F_0 \to F_0} \leq C$.

Se $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *è una famiglia di spazi di Banach avente la proprietà di interpolazione normale rispetto alla famiglia* $\{F_\alpha\}$ *e se* T *è un operatore lineare continuo da* E_0 *a* F_0 *e da* E_1 *a* F_1 , *compatto rispetto ad almeno una di queste coppie di spazi, allora* T *è compatto anche come operatore da* E_α *a* F_α , *per* $\alpha \in]0, 1[$.

TEOREMA 2.1. *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di spazi di Banach, e* E_0 , E_1 *siano spazi di Hilbert tali che la immersione di* E_1 *in* E_0 *è compatta. Allora esiste una successione di operatori lineari* $(P_n)_{n \in N}$, *di dimensione finita, soddisfacente alle condizioni* 2) i-ii *della Proposizione* 2.1.

DIMOSTRAZIONE. La prova procede analogamente a quella di un risultato di Browder sugli operatori non-espansivi (cfr. [11], pp. 398-399).

Dalla ipotesi che la immersione di E_1 in E_0 sia compatta segue che esiste un operatore compatto autoaggiunto L da E_1 a E_1 tale che:

$$\forall x, \ y \in E_1 \qquad (x, Ly)_{E_1} = (x, y)_{E_0} .$$

Se $x \neq 0$, $(x, Lx)_{E_1} = (x, x)_{E_0} > 0$. Quindi, per il Teorema della rappresentazione spettrale, esiste un sistema ortonormale completo di autovettori e_j , $j = 1, 2, \ldots$ di L in E_1 con autovalori λ_1 , λ_2 , ..., tutti positivi.

Nota: Gli spazi di Banach qui considerati sono supposti essere di dimensione infinita.

Sia F^n lo spazio vettoriale generato da $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. L'insieme $\bigcup_n F_n$ è denso in E_1.

Sia P_n la proiezione ortogonale di E_1 su F_n. Allora:

$$\forall x \in E_1, \qquad P_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)_{E_1} e_j \quad \text{e} \quad \| P_n \|_{E_1 \to F_1} = 1.$$

Inoltre $\| P_n x - x \|_{E_1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, per la definizione di P_n e la densità di $\bigcup_n F_n$ in E_1 (cfr. [14], p. 232).

Notiamo che $Le_k = \lambda_k e_k$, $\forall k \in N$ e

$$(e_j, e_k)_{E_0} = (e_j, Le_k)_{E_1} = \lambda_j \delta_k^j \quad (\delta_k^j = \text{simbolo di Kronecker}).$$

Segue:

$$\| P_n x \|_{E_0}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} (x, e_j)_{E_1} e_j, \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)_{E_1} e_j\right)_{E_0} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, | (x, e_j)_{E_1} |^2 .$$

D'altra parte,

$$(x, e_j)_{E_1} = \lambda_j^{-1} (x, Le_j)_{E_1} = \lambda_j^{-1} (x, e_j)_{E_0} .$$

Così:

$$\| P_n x \|_{E_0}^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, | (x, e_j)_{E_1} |^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \lambda_j^{-2} | (x, e_j)_{E_0} |^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1} \, | (x, e_j)_{E_0} |^2.$$

Poniamo $f_j = \lambda_j^{-1/2} e_j$, $j = 1, 2, ...$

$$(f_i, f_j)_{E_0} = (\lambda_i^{-1/2} e_i, \lambda_j^{-1/2} e_j)_{E_0} = \lambda_i^{-1/2} \lambda_j^{-1/2} (e_i, e_j)_{E_0} = \lambda_i^{-1/2} \lambda_j^{-1/2} \lambda_i \delta_j^i = 0$$

per $i \neq j$

$$(f_i, f_i)_{E_0} = \lambda_i^{-1/2} \lambda_i^{-1/2} \lambda_i = 1, \; i = 1, 2, ...$$

Dunque, $\{f_j\}$ è un sistema ortonormale di vettori in E_0 e

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1/2} | (x, e_j)_{E_0} |^2 = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^{-1/2})^2 \, | (x, e_j)_{E_0} |^2 = \sum_{j=1}^{n} \, | (x, \lambda_j^{-1/2} e_j)_{E_0} |^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} | (x, f_j)_{E_0} |^2 \leq \| x \|_{E_0}^2,$$

per la disuguaglianza di Parseval. Cioè:

$$\| P_n x \|_{E_0} \leq \| x \|_{E_0} .$$

TEOREMA 2.2 *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di* *spazi di Banach avente la proprietà di interpolazione stretta relativa alla scala* $\{H_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *dove* H_α *è lo spazio di Hilbert, corrispondente all'indice* α, *ottenuto da* H_0 *e* H_1 *col metodo complesso. Infine, supponiamo che* H_0 *e* H_1 *siano spazi di Hilbert e la immersione di* H_1 *in* H_0 *sia compatta.*

Allora, se T *è un operatore lineare continuo da* E_α *a* H_α *e da* E_γ *a* H_γ, $0 \leq \alpha < \gamma \leq 1$, *ed è compatto rispetto ad almeno una di tali coppie di spazi,* T *è compatto anche da* E_β *a* H_β, $\alpha < \beta < \gamma$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo (cfr. [12], Th. 16.2, p. 111), che, nelle condizioni enunciate, $0 \leq \alpha < \gamma \leq 1 \Rightarrow H_\gamma$ è immerso in H_α e la immersione di H_γ in H_α è anch'essa compatta.

A questo punto, si applica il Teorema 2.1 e la Proposizione 2.1.

TEOREMA 2.3. *Siano* H_0, H_1 *due spazi di Hilbert,* H_1 *denso in* H_0 *e la immersione di* H_1 *in* H_0 *sia compatta. Allora anche la immersione di* H_0' *in* H_1' *è compatta (qui gli spazi duali non vengono identificati con gli spazi originali, pur essendo definita su* H_i' $(i=0, 1)$ *una struttura di spazio di Hilbert).*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, l'operatore aggiunto di $I : H_1 \to H_0$, è un operatore lineare continuo da H_0' *a* H_1'.

D'altra parte, poichè l'aggiunto di un operatore compatto, è compatto, I' è compatto da H_0' a H_1'. Per definizione, infine,

$$\langle Ix, y' \rangle = y'(Ix) = y'(x) = \langle x, I'y' \rangle = (I'y')(x), \ \forall x \in H_1, \ y' \in H_0'.$$

Queste uguaglianze dicono che I' è la immersione di H_0' in H_1'.

TEOREMA 2.4. *Sia* $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una famiglia di spazi di Banach soddisfacenti alle condizioni* 1) *e* 2) *della Proposizione* 2.1.

Supponiamo che $\{F_\alpha\}$ *abbia la proprietà di interpolazione normale relativa a se stessa e* F_α *sia uno spazio riflessivo,* $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Allora, se T *è un operatore lineare e continuo da* F_i' *a* F_i' $(i=0, 1)$, *ed è compatto rispetto ad almeno una di tali coppie di spazi,* T *è compatto da* F_α' *a* F_α', $\alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che dalle ipotesi segue che $\{F_\alpha'\}$ ha la proprietà di interpolazione normale relativa a se stessa (cfr. [2], p. 383).

Quindi, T è lineare e continuo da F'_α a F'_α. È anche compatto; infatti:

Supponiamo che sia compatto da F'_0 a F'_0 e continuo da F'_1 a F'_1. Allora l'operatore duale T' di T è compatto da F_0 a F_0 e lineare continuo da F_1 a F_1. Tale affermazione è conseguenza della riflessività degli spazi in questione (quest'ultima proprietà implica anche che F'_0 è denso in F'_1 e quindi, T' come operatore da F_1 a F_1 coincide con la restrizione di T', come operatore aggiunto di $T : F'_0 \to F'_0$, a F_1), (cfr. [1], p. 101).

Quindi, T' è compatto da F_α a F_α. D'altra parte, anche $T'' : F'_\alpha \to F'_\alpha$ è compatto. Ma, per la riflessività di F_α, $T''=T$.

Teorema 2.5. *Siano* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *due scale normali continue di spazi di Hilbert. Supponiamo che* $\{H_\alpha\}$ *abbia la proprietà di interpolazione normale relativa a* $\{K_\alpha\}$. *Inoltre, gli spazi* K_0 *e* K_1 *abbiano la Proprietà* 2) *della Proposizione* 2.1.

Allora, se T *è un operatore lineare e continuo da* H_0 *a* K_0 *e da* H_1 *a* K_1, *ed è nucleare da* H_0 *a* K_0, T *è nucleare da* H_α *a* K_α, $\alpha \in]0, 1[$.

Dimostrazione. Poichè T è nucleare da H_0 a K_0, T è compatto, quindi, in base alla Proposizione 2.1, T è compatto da H_α a K_α, per $\alpha \in]0, 1[$. Ciò implica che $\| T \|_{H_\alpha \to K_\alpha} = \sup_n \lambda_{\alpha,n}$, dove i $\lambda_{\alpha,n}$ sono gli autovalori dell'operatore $(T^*T)^{1/2} : H_\alpha \to H_\alpha$.

D'altra parte, se $\lambda_{\alpha,n}$ è autovalore dell'operatore $(T^*T)^{1/2} : H_\alpha \to H_\alpha$, allora $\lambda_{\alpha,n}$ è autovalore di $(T^*T)^{1/2} : H_0 \to H_0$. Inoltre, la multiplicità (finita) di $\lambda_{\alpha,n}$ non può diminuire.

Ma, per ipotesi, se i $\lambda_{0,n}$ sono gli autovalori dell'operatore $(T^*T)^{1/2} : H_0 \to H_0$, si ha:

$$\sum_n \lambda_{0,n} < +\infty, \quad \lambda_{0,n} > 0 \quad \forall n \in N.$$

Quindi, anche $\sum_n \lambda_{\alpha,n} < +\infty$ e $T : H_\alpha \to K_\alpha$ è nucleare.

Teorema 2.6. *Siano* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *due scale normali continue di spazi di Hilbert, tali che le immersioni di* H_1 *in* H_0 *e di* K_1 *in* K_0 *siano compatte. Inoltre, la famiglia* $\{H_\alpha\}$ *abbia la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia* $\{K_\alpha\}$.

Se T *è un operatore lineare e continuo da* H_0 *a* K_0 *e da* H_1 *a* K_1, *ed è nucleare rispetto ad almeno una di tali coppie di spazi, allora* T *è nucleare da* H_α *a* K_α, $\forall \alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. Se T è nucleare da H_0 a K_0, allora la tesi è conseguenza immediata del Teorema 2.5 e del Teorema 2.1.

Sia ora T nucleare da H_1 a K_1. Allora T' è nucleare da K_1' a H_1', (cfr. [6], p. 483). Inoltre, T' è continuo da K_0' a H_0'.

Dal Teorema 2.3 segue che anche la immersione di H_0' in H_1' è compatta. Inoltre, la famiglia $\{K_\alpha'\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ ha la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia $\{K_\alpha'\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ (cfr. [2], p. 283).

Ora, T', essendo nucleare, è anche compatto da K_1' a H_1'; perciò, si può applicare la Proposizione 2.1 e il Teorema 2.1 per ottenere che T' è compatto da K_α' a H_α'.

D'altra parte, ora si ripete la situazione che occorre nella dimostrazione del Teorema 2.5. Quindi, si può affermare che T' è nucleare da K_α' a H_α', $\alpha \in]0, 1[$. Ciò implica che $T'' = T$ è nucleare da H_α a K_α.

TEOREMA 2.7. *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di spazi di Hilbert. Supponiamo che* $\{E_\alpha\}$ *abbia la proprietà di interpolazione normale relativa a se stessa e che* E_0 *ed* E_1 *abbiano la proprietà* 2) *della Proposizione* 2.1.

Allora, se T *è un operatore lineare e continuo da* E_0 *a* E_0 *e da* E_1 *a* E_1 *ed è nucleare rispetto ad almeno una di tali coppie di spazi,* T *è nucleare anche da* E_α *a* E_α, $\forall \alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che se $T \in L(E_0, E_0) \cap L(E_1, E_1)$ ed è nucleare da E_1 a E_1, allora T è nucleare da E_α a E_α, $\alpha \in]0, 1[$.

Poichè T è nucleare da E_1 a E_1, T è compatto da E_1 a E_1. Quindi, per la Proposizione 2.1, T è compatto anche da E_α a E_α, $\alpha \in]0, 1[$.

Ma allora, T' è compatto da E_α' a E_α'. Inoltre, dalla ipotesi segue che T' è nucleare come operatore da E_1' a E_1'.

Siano $\lambda_{\alpha,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, gli autovalori di $(T'^*T')^{1/2}$ come operatore da E_α' a E_α'. Ora, $E_\alpha' \subset E_1'$. Quindi, se $\lambda_{\alpha,n}$ è autovalore di $(T'^*T')^{1/2}$ come operatore da E_α' a E_α', $\lambda_{\alpha,n}$ è anche autovalore di $(T'^*T')^{1/2}$ come operatore da E_1' a E_1' e la sua multiplicità non può decrescere. Perciò, la norma nucleare di T', come operatore da E_α' a E_α', è minore o uguale della norma nucleare di T' come operatore da E_1' a E_1'; cioè, T', è nucleare da E_α' a E_α'. Ciò implica che anche $T'' = T$ è nucleare da E_α a E_α.

OSSERVAZIONE. I risultati ottenuti valgono quando si suppone che T sia un operatore di tipo Hilbert-Schmidt. Le dimostrazioni si fondano sulla valutazione della norma di un tale operatore come $[\sum_n \lambda_n^2]^{1/2}$, dove i λ_n sono gli autovalori dell'operatore $(T^*T)^{1/2}$.

Inoltre, vale il seguente:

COROLLARIO. *I teoremi 2.5-2.6-2.7 rimangono veri quando si sostituisce l'ipotesi che le famiglie di spazi abbiano la proprietà di interpolazione normale con quella che esse abbiano la proprietà di interpolazione stretta e la tesi con l'affermazione seguente:*

Se T è un operatore lineare continuo da H_α a K_α e da H_γ a K_γ, ed è nucleare rispetto ad almeno una delle coppie di spazi (rispettivamente, è nucleare da H_α a K_α, per il corrispondente del Teorema 2.5), allora T *è nucleare da H_β a K_β, $0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1$.*

TEOREMA 2.8. *Siano H_0, H_1 due spazi di Hilbert, H_1 immerso normalmente in H_0.*

Se T è un operatore lineare e compatto da H_0 a H_0 e da H_1 a H_1, allora:

$$\| T \|_{H_0 \to H_0} = \| T \|_{H_1 \to H_1} .$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè T è compatto da H_0 a H_0, $\| T \|_{H_0 \to H_0} = \sup_n \lambda_{0,n}$, dove i $\lambda_{0,n}$ sono gli autovalori dell'operatore definito positivo

$$(T^*T)^{1/2} : H_0 \to H_0 .$$

Analogamente, $\| T \|_{H_1 \to H_1} = \sup_n \lambda_{1,n}$. Come nella prova del Teorema 2.4, osserviamo che T^*, come operatore da H_0 a H_0, è una estensione di T^* come operatore da H_1 a H_1, per la densità di H_1 in H_0.

D'altra parte, se $\lambda_{1,n}$ è autovalore di $(T^*T)^{1/2} : H_1 \to H_1$, allora $\lambda_{1,n}$ è autovalore anche di $(T^*T)^{1/2} : H_0 \to H_0$, e quindi:

$$\text{(i)} \qquad \| T \|_{H_1 \to H_1} \leq \| T \|_{H_0 \to H_0} .$$

Ora, l'operatore duale T' di T, è, come conseguenza delle ipotesi, compatto da H_0' a H_0' e da H_1' a H_1'. Inoltre, H_0' è immerso normalmente in H_1', (cfr. [1], p. 101). Quindi, per il ragionamento già fatto,

$$\text{(ii)} \qquad \| T' \|_{H'_0 \to H'_0} \leq \| T' \|_{H'_1 \to H'_1}.$$

Ma $\| T \|_{H_i \to H_i} = \| T' \|_{H'_i \to H'_i}$ $(i=0,\ 1)$. Perciò:

$$\text{(iii)} \qquad \| T \|_{H_0 \to H_0} \leq \| T \|_{H_1 \to H_1}.$$

Dalle (i), (ii) e (iii) segue la tesi.

Osservazione. Il Teorema 2.8 è ancora valido quando si suppone che l'operatore T abbia come proprio codominio uno spazio di Hilbert K_i $(i=0,\ 1)$, K_1 immerso normalmente in K_0.

Teorema 2.9. *Siano H_i, K_i $(i=0,\ 1)$ spazi di Hilbert, con H_1 immerso normalmente in H_0, K_1 immerso normalmente in K_0.*

Se T è un operatore nucleare da H_0 a K_0 e da H_1 a K_1, con norme nucleari $||| T |||_{H_0 \to K_0}$, $||| T |||_{H_1 \to K_1}$, rispettivamente, allora:

$$||| T |||_{H_0 \to K_0} = ||| T |||_{H_1 \to K_1}.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, $||| T |||_{H_i \to K_i} = \sum_n \lambda_{i,n}$, dove i $\lambda_{i,n}$ sono gli autovalori dell'operatore positivo e nucleare $(T^*T)^{1/2} : H_i \to H_i$, $(i=0,\ 1)$.

Con un ragionamento analogo a quello usato per dimostrare il Teorema 2.8, si prova che:

$$\text{(i)} \qquad ||| T |||_{H_1 \to K_1} \leq ||| T |||_{H_0 \to K_0};$$

$$\text{(ii)} \qquad ||| T' |||_{K'_0 \to H'_0} \leq ||| T' |||_{K'_1 \to H'_1}.$$

D'altra parte, si sa (cfr. [6], Corollario alla Proposizione 47.5, p. 484), che:

$$\text{(iii)} \qquad ||| T' |||_{K'_i \to H'_i} = ||| T |||_{H_i \to K_i}, \ (i=0,\ 1).$$

Quindi, le (i), (ii) e (iii) portano al risultato.

Teorema 2.10. *Valgano le ipotesi del Teorema 2.9.*

Se T è un operatore di tipo Hilbert-Schmidt da H_i a K_i, $(i=0,\ 1)$, *con norme (di tipo Hilbert-Schmidt)* $|T|_{H_0\to K_0}$, $|T|_{H_1\to K_1}$, *rispettivamente, allora*:

$$|T|_{H_0\to K_0}=|T|_{H_1\to K_1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si sa che se T è un operatore di tipo H-S da H_i a K_i, allora anche T^* è un operatore di tipo H-S da K_i a H_i, e $|T|_{H_i\to H_i}=|T^*|_{K_i\to K_i}$. Inoltre, con un ragionamento del tutto analogo a quello usato per dimostrare il Teorema 2.8, si riconosce che:

$$\text{(i)} \qquad |T|_{H_0\to K_0}\geq|T|_{H_1\to K_1}.$$

Ora mostriamo che anche l'operatore duale T' di T è un operatore di tipo H-S da K_i' a H_i', $i=0,\ 1$.

Infatti, (Cfr. [5], p. 85), $T^*=J_{H,i}T'J_{H,i}^{-1}$, dove $J_{H,i}$ è l'isometria canonica di H_i' su H_i ($i=0,\ 1$) e $J_{K,i}$ è l'isometria canonica di K_i' su K_i, ($i=0,\ 1$). La eguaglianza precedente si legge anche così:

$$\text{(ii)} \qquad J_{H,i}^{-1}T^*J_{K,i}=T'.$$

Ciò implica che T', come composizione di un operatore di tipo H-S con operatori continui, è di tipo H-S da K_i' a H_i'.

Inoltre, poichè $J_{H,i}$ e $J_{K,i}$ sono delle isometrie,

$$\text{(iii)} \qquad |T^*|_{K_i\to H_i}=|T'|_{K'_i\to H'_i} \qquad (i=0,\ 1).$$

Sull'operatore di tipo H-S T' da K_0' a H_0' e da K_1' a H_1', si ripete lo stesso discorso fatto sull'operatore T; si conclude, cioè, che:

$$\text{(iv)} \qquad |T'|_{K'_1\to H'_1}\geq|T'|_{K'_0\to H'_0}.$$

Così, la dimostrazione è terminata.

TEOREMA 2.11. *Siano* $E=\bigcap_n E_n$, $F=\bigcap_J F_j$ *due spazi LPS, ed* E *sia anche uno spazio* M^*. *Allora*:

Se T *è un operatore lineare continuo da* E *a* F, *allora*:

$\forall j\in J$ $\exists n\in N$ *tale che la estensione di* T *a* E_n *è compatta da* E_n *a* F_j.

Vale un risultato analogo se si suppone che $E=\bigcap_n E_n$ *sia uno spazio* *nucleare, oppure si suppone che H e K siano spazi numerabilmente hilbertiani:* $H = \bigcap_n H_n$, $K = \bigcap_n K_n$, *tali che* $\forall m\ \exists p > m$ *per cui la immersione di* H_p *in* H_m *è di tipo Hilbert-Schmidt.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla ipotesi che T sia lineare e continuo segue: $\forall j \in J\ \exists i \in N$ tale che T è lineare e continuo da E_i a F_j.

D'altro canto, per ipotesi, esiste un indice $k > i$ tale che la immersione di E_k in E_i è compatta; quindi, T, ristretto a E_k, risulta essere un operatore compatto da E_k a F_j come composizione di un operatore compatto con un operatore continuo.

Le due rimanenti affermazioni si provano come la precedente. Infatti, se E è uno spazio nucleare, $\forall i\ \exists k > i$ tale che la immersione di E_k in E_i è nucleare. Così, la restrizione di T a E_k risulta nucleare, perchè la composizione di un operatore nucleare con un operatore continuo è nuclare (cfr. [5], p. 99).

Nel terzo caso, dalla ipotesi segue che $\forall j \in N\ \exists i \in N$ tale che la estensione di T a H_i è lineare continua da H_i a K_j.

Ma, $\forall i\ \exists k$, $k > i$ per cui la immersione di H_k in H_i è di tipo Hilbert-Schmidt. Poichè, però, la composizione di un operatore di tipo H-S con un operatore lineare continuo è ancora di tipo H-S (cfr. [5], p. 94), T, come operatore da H_k a K_j, è di tipo Hilbert-Schmidt.

OSSERVAZIONE. L'asserzione concernente la proprietà di nuclearità rimane valida anche quando lo spazio E è uno spazio LPS, per il quale l'insieme di indici non è numerabile.

TEOREMA 2.12. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \le \alpha \le 1)$, *due scale normali continue di spazi LPS* $E_\alpha = \bigcap_n E_{\alpha,n}$, $F_\alpha = \bigcap_J F_{\alpha,j}$, *tali che*:

1) *almeno uno degli spazi* E_0, E_1 *è uno spazio* M^*;

2) $\forall n \in N$, *la famiglia* $\{E_{\alpha,n}\}$ $(0 \le \alpha \le 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia* $\{F_{\alpha,j}\}$ $(0 \le \alpha \le 1)$, $\forall j \in J$.

3) *le famiglie* $\{F_{\alpha,j}\}$ $(0 \le \alpha \le 1)$ *posseggono la proprietà descritta nella Proposizione* 2.1, $\forall j \in J$.

Allora, se T *è un operatore lineare e continuo da* E_0 *a* F_0 *e da* E_1 *a* F_1, $\forall j \in J\ \exists k \in N$, *tale che* $T : E_{\alpha,k} \to F_{\alpha,j}$ *è compatto,* $\forall \alpha \in]0, 1[$.

In particolare, se F_α è lo spazio E_α stesso, $\forall\alpha\in[0, 1]$, allora E_α è uno spazio M^*, $\forall\alpha\in]0, 1[$.

Valgono risultati analoghi se si operano le sostituzioni opportune nell'enunciato, come nel Teorema 2.11.

DIMOSTRAZIONE. In base al Teorema 2.11, se supponiamo che E_1 sia uno spazio M^*,

$\forall j\in J$ $\exists k\in N$ tale che $T: E_{1,k}\to F_{1,j}$ è lineare e compatto;

$\forall j\in J$ $\exists i\in N$ tale che $T: E_{0,i}\to F_{0,j}$ è lineare e continuo.

Se $i<k$, allora $E_{0,k}\subset E_{0,i}$ con immersione continua. Quindi, la restrizione di T a $E_{0,k}$ è continua da $E_{0,k}$ a $F_{0,j}$. Inoltre, T è compatto da $E_{1,k}$ *a* $F_{1,j}$.

Se $i>k$, allora $E_{1,i}\subset E_{1,k}$ con immersione continua. Così, la restrizione di T *a* $E_{1,i}$ è compatta da $E_{1,i}$ *a* $F_{1,j}$, essendo la composizione di un operatore compatto con un operatore continuo (la immersione di $E_{1,i}$ in $E_{1,k}$).

Per di più, T è lineare e continuo da $E_{0,i}$ a $F_{0,j}$.

In entrambi i casi, per la Proposizione 2.1, si conclude che:

$\forall j\in J$ $\exists m\in N$ tale che $T: E_{\alpha,m}\to F_{\alpha,j}$ è lineare e compatto, $\alpha\in]0, 1[$.

Quanto alla seconda affermazione, osserviamo che dall'ipotesi che E_0, per esempio, sia uno spazio M^*, segue che:

$\forall i\in N$ $\exists p>i$ tale che la immersione di $E_{0,p}$ in $E_{0,i}$ è compatta.

D'altra parte, poichè $p>i$, la immersione di $E_{1,p}$ in $E_{1,i}$ è continua. Dunque, per interpolazione, è compatta anche la immersione di $E_{\alpha,p}$ in $E_{\alpha,i}$, cioè, E_α è uno spazio M^*, $\forall\alpha\in]0, 1[$.

Si supponga, ora, che E_α e F_α siano spazi LPS di spazi di Hilbert, soddisfacenti le ipotesi del Teorema 2.6 e T sia un operatore lineare continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1. Ragionando proprio come prima si conclude che $\forall j\in J$ $\exists k\in N$ tale che $T: E_{\alpha,k}\to F_{\alpha,j}$ è nucleare, $\alpha\in]0, 1[$.

In particolare, se $E_\alpha=F_\alpha$, $\forall\alpha\in[0, 1]$, allora E_α è uno spazio nucleare, $\forall\alpha\in]0, 1[$. Così si procede negli altri casi, applicando i Teoremi 2.5 e 2.7.

TEOREMA 2.13. *Sia* $E=\bigcap_n E_n$ *uno spazio LPS. Allora*:

1) *Se* E *è uno spazio* M^* *e* T *è un operatore lineare e continuo da* E *a* E, *allora* $\forall j\in N$ $\exists i\in N$ *tale che* $T: E_i\to E_j$ *è compatto.*

2) *Se per ogni operatore T lineare e continuo da E a E,* $\forall j \in N$ $\exists i \in N$ *tale che la estensione di T a* E_i *a* E_j *è lineare e compatta da* E_i *a* E_j, *allora E è uno spazio* M^*.

Vale un risultato analogo se si sostituisce la proprietà di essere uno spazio M^* *con quella di essere uno spazio nucleare e la proprietà per un operatore di essere compatto con quella di essere nucleare.*

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione 1) discende dal Teorema 2.11.

Quanto alla 2), osserviamo che la immersione I è lineare e continua da E a E; quindi, per ipotesi, $\forall j\ \exists i$ tale che $I: E_i \to E_j$ è compatta Necessariamente, $i > j$. Infatti, supponiamo sia $i \leq j$. Allora:

$$\| x \|_{E_i} \leq \| Ix \|_{E_j} \leq C \| x \|_{E_i},$$

per la continuità di I da E_i a E_j.

Quindi, le norme $\| \ \|_{E_i}$ e $\| \ \|_{E_j}$ sarebbero equivalenti, per cui $E_i = E_j$.

Ciò implica che I sarebbe compatta da E_i a E_i. Cioè l'operatore identità sarebbe compatto, il che è impossibile, perchè E_i è uno spazio di Banach di dimensione infinita.

La prova dell'altra affermazione segue le tracce della precedente, perchè un operatore nucleare è compatto.

TEOREMA 2.14. *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di spazi LPS e* M^*, $E_\alpha = \bigcap_n E_{\alpha,n}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$; *sia poi* $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di spazi LPS* $F_\alpha = \bigcap_n F_{\alpha,n}$, *tale che ciascuna delle famiglie* $\{E_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia* $\{F_{\alpha,j}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, $\forall j \in N$.

Allora, se T è un operatore lineare e continuo da E_0 *a* F_0 *e da* E_1 *a* F_1,

$\forall j\ \exists i$ *tale che T è compatto come operatore da* $E_{\alpha,i}$ *a* $F_{\alpha,j}$.

Analogamente, se E_α *è uno spazio numerabilmente hilbertiano tale che* $\forall i\ \exists j > i$ *per cui la immersione di* $E_{\alpha,j}$ *in* $E_{\alpha,i}$ *è di tipo H-S* $\forall \alpha \in [0, 1]$, F_α *è uno spazio numerabilmente hilbertiano, ferma restando la proprietà di interpolazione, allora:*

$\forall j \in N$, $\exists i \in N$ *tale che T è di tipo H-S da* $E_{\alpha,i}$ *a* $F_{\alpha,j}$.

Vale una conclusione corrispondente se si suppone che gli E_α *siano spazi nucleari.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè T è lineare e continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1, si ha:

$\forall j \exists k$ tale che $T: E_{0,k} \to F_{0,j}$ è lineare e continuo;

$\forall j \exists i$ tale che $T: E_{1,i} \to F_{1,j}$ è lineare e continuo.

Ciò in base alla Proposizione 1.1. Per j fissato, sarà o $k \leq i$ o $k > i$.

Nel primo caso, $E_{0,i}$ è immerso con continuità in $E_{0,k}$ e la restrizione di T a $E_{0,i}$ risulta ancora continua.

Nel secondo caso, $E_{1,k}$ è immerso con continuità in $E_{1,i}$ e T è allora continuo come operatore da $E_{1,k}$ a $F_{1,j}$.

In definitiva, si può supporre che $\forall j \exists k$ tale che T è continuo da $E_{0,k}$ a $F_{0,j}$ e da $E_{1,k}$ a $F_{1,j}$.

Dalle ipotesi segue, allora, che T è prolungabile come operatore lineare e continuo da $E_{\alpha,k}$ a $F_{\alpha,j}$, $\alpha \in]0, 1[$. Quindi, (cfr. Proposizione 1.1), è lineare continuo da E_α a F_α. La applicazione del Teorema 2.11 conduce al risultato.

Le restanti affermazioni si provano allo stesso modo, sempre ricorrendo al Teorema 2.11.

TEOREMA 2.15. *Siano* $E = \bigcap_I E_i$ *uno spazio LPS di Fréchet e* $F = \bigcup_n F_n$ *uno spazio LIS, T un operatore lineare da E a F. Allora*:

1) *se T è continuo da E a F allora esistono due indici $i \in I$, $j \in N$ tali che $T: E_i \to F_j$ è continuo;*

2) *viceversa, se esistono $i \in I$, $j \in N$ tali che la estensione di T a E_i è continua da E_i a F_j, allora T è continuo da E a F.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Lo spazio LPS E è uno spazio di Fréchet, e quindi, per un risultato di Grothendieck (cfr. [7], pp. 227-228), esiste $j \in N$ tale che $T(E) \subset F_j$ e T è lineare continuo come operatore da E a F_j. Ma allora, dalla definizione di topologia proiettiva, segue che esiste un indice $i \in I$ tale che $T: E_i \to F_j$ è continuo.

2) Esistano $i \in I$, $j \in N$ tali che $T: E_i \to F_j$ è lineare e continuo. Ora, la immersione di E in E_i è continua e quindi T è continuo come operatore da E a F_j. Allora, dal fatto che anche la immersione di F_j in F è continua, segue che T è lineare e continuo da E a F.

TEOREMA 2.16. *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una famiglia di spazi LPS*

$E_\alpha = \bigcap_n E_{\alpha,n}$ *e sia* $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una famiglia di spazi LIS* $F_\alpha = \bigcup_n F_{\alpha,n}$.
Inoltre:

$0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow E_\beta$ *è immerso normalmente in* E_α;

$0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow F_\beta$ *è immerso in* F_α.

Se per ogni $i \in N$, *la famiglia di spazi di Banach* $\{E_{\alpha,i}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale (rispettivamente, di interpolazione stretta) relativa a ciascuna delle famiglie* $\{F_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *allora*:

$$T \in L(E_0, F_0) \cap L(E_1, E_1) \Rightarrow T \in L(E_\alpha, F_\alpha).$$

(*rispettivamente,* $T \in L(E_\alpha, F_\alpha) \cap L(E_\gamma, F_\gamma) \Rightarrow T \in L(E_\beta, F_\beta)$, $0 \leq \alpha < \beta < < \gamma \leq 1$).

DIMOSTRAZIONE. Sia T un operatore lineare continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1. Allora (cfr. Teorema 2.15):

$\exists i, j$ tali che $T : E_{0,i} \to F_{0,j}$ è lineare e continuo;

$\exists k, l$ tali che $T : E_{1,k} \to F_{1,l}$ è lineare e continuo.

Sia $m = \max(i, k)$, $n = \max(j, l)$. Allora T è continuo anche da $E_{0,m}$ a $F_{0,n}$ e da $E_{1,m}$ a $F_{1,n}$. Infatti, la immersione di $E_{0,m}$ in $E_{0,i}$ e in $E_{0,k}$ è continua; analogamente è continua la immersione di $E_{1,m}$ in $E_{1,i}$ e in $E_{1,k}$.

Quindi, T è continuo da $E_{0,m}$ a $F_{0,j}$ e da $E_{1,m}$ a $F_{1,l}$. Confrontiamo j e l. Per costruzione, la immersione di $F_{0,j}$ in $F_{0,n}$ è continua; così è anche la immersione di $F_{0,l}$ in $F_{0,n}$. Continue sono pure le immersioni di $F_{1,j}$ in $F_{1,n}$ e di $F_{1,l}$ in $F_{1,n}$.

Perciò, T risulta continuo da $E_{0,m}$ a $F_{0,n}$ e da $E_{1,m}$ a $F_{1,n}$; ciò implica che $T \in L(E_{\alpha,m}, F_{\alpha,n})$. Cioè, esistono due indici m, n tali che $T : E_{\alpha,m} \to F_{\alpha,n}$ è lineare e continuo. Per il Teorema 2.15, l'affermazione risulta provata.

OSSERVAZIONE. I risultati contenuti nei Teoremi 2.15 e 2.16 portano alla conclusione che è giustificata la definizione di proprietà di interpolazione fra due famiglie di spazi localmente convessi, l'una costituita di spazi LPS, l'altra da spazi LIS. Infatti, l'affermazione che un operatore lineare fra tali spazi è continuo si riduce a quella che è continua la sua estensione, definita su un opportuno spazio di Banach, e a valori in un altro opportuno spazio di Banach.

TEOREMA 2.17. *Sia* $E = \bigcap_n E_n$ *uno spazio LPS e* M^* *e sia* $F = \bigcup_n F_n$ *uno spazio LIS. Allora*:

1) *Se* T *è un operatore lineare e continuo da* E *a* F *allora esistono due indici* $i, j \in N$ *tali che* $T : E_i \to F_j$ *è compatto.*

2) *Se* T *è un operatore lineare da* E *a* F *ed esistono* $i, j \in N$ *tali che* $T : E_i \to F_j$ *è compatto, allora* T *è compatto da* E *a* F.

Analogamente, se E *è un spazio nucleare, valgono* 1) *e* 2), *con la parola « compatto » sostituita con la parola « nucleare ».*

Ancora, se E *è uno spazio numerabilmente hilbertiano e* F *è uno spazio LIS di una successione di spazi di Hilbert, e, in più,* $\forall i \exists j > i$ *tale che la immersione di* E_j *in* E_i *è di tipo Hilbert-Schmidt, allora vale la affermazione* 1), *con la parola « compatto » sostituita dalla locuzione « di tipo Hilbert- Schmidt ».*

DIMOSTRAZIONE. 1) Poichè T è lineare e continuo da E a F, esistono $i, j \in N$ tali che $T : E_i \to F_j$ è continuo (cfr. Teorema 2.15).

Ma $\forall i \exists k > i$ tale che la immersione di E_k in E_i è compatta; e quindi, T, definito su E_k, risulta compatto da E_k a F_j.

2) Dalle ipotesi segue che T è compatto da E a F_j. D'altra parte, anche la immersione di F_j in F è continua. Perciò, $T : E \to F$ è compatto.

Le rimanenti affermazioni si dimostrano in modo analogo.

TEOREMA 2.18. *Sia* $\{E_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una famiglia di spazi LPS* $E_\alpha = \bigcap_n E_{\alpha, n}$ *e sia* $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una famiglia di spazi LIS, con* $F_\alpha = \bigcup_n F_{\alpha, n}$.

Supponiamo che:

1) *Uno almeno degli spazi* E_0, E_1 *sia uno spazio* M^*.

2) $\forall i \in N$, *la famiglia* $\{E_{\alpha, i}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *abbia la proprietà di interpolazione normale relativa a ciascuna delle* $\{F_{\alpha, k}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

3) $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow E_{\beta, n}$ *(rispettivamente,* $F_{\beta, n}$*) sia immerso densamente in* $E_{\alpha, n}$ *(rispettivamente, in* $F_{\alpha, n}$*),* $n = 1, 2, \ldots$

4) *Le famiglie* $\{F_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *abbiano la proprietà descritta nella Proposizione* 2.1.
Allora, se T *è un operatore lineare e continuo da* E_0 *a* F_0 *e da* E_1 *a* F_1, T *è compatto da* E_α *a* F_α, $\forall \alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che E_1 sia uno spazio M^*. Se T è un operatore lineare continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1, allora (cfr. Teorema 2.17):

$\exists i, j$ tali che $T: E_{0,i} \to F_{0,j}$ è lineare e continuo;

$\exists k, l$ tali che $T: E_{1,k} \to F_{1,l}$ è lineare e compatto.

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.16, si può supporre $k=i$, $l=j$. E allora, per interpolazione, in base alla Proposizione 2.1, si deduce che T è un operatore lineare e compatto da $E_{\alpha,i}$ a $F_{\alpha,j}$, $\alpha \in]0, 1[$.

Quindi, per la seconda parte del Teorema 2.17, T risulta compatto da E_α a F_α.

TEOREMA 2.18′. *Sia* $\{H_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di spazi numerabilmente hilbertiani* $H_\alpha = \bigcap_n H_{\alpha,n}$ *e sia* $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *una scala normale continua di spazi LIS* $K_\alpha = \bigcup_n K_{\alpha,n}$, $K_{\alpha,n}$ *spazio di Hilbert,* $\forall n \in N$.

Inoltre:

1) *Uno almeno degli spazi* H_0, H_1 *sia uno spazio nucleare.*

2) $H_{1,n} \subset H_{0,n}$ *con immersione compatta,* $\forall n \in N$; *analoga relazione fra* $K_{1,n}$ *e* $K_{0,n}$.

3) $\forall i \in N$, *la famiglia* $\{H_{\alpha,i}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia* $\{K_{\alpha,j}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, $\forall j \in N$.
Allora, se T *è un operatore lineare e continuo da* H_0 *a* K_0 *e da* H_1 *a* K_1, T *è nucleare da* H_α *a* K_α, $\alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. È analoga a quella del Teorema precedente, in base al Teorema 2.17 e al Teorema 2.6.

TEOREMA 2.19. *Sia* $E = \bigcap_n E_n$ *uno spazio LPS e sia* $F_\alpha = \bigcup_n F_n$ *uno spazio LIS e LN**. *Allora*:

1) *Se* T *è un operatore lineare e continuo da* E *a* F, *esistono* $i, j \in N$ *tali che* $T: E_i \to F_j$ *è compatto.*

2) *Se T è un operatore lineare da E a F ed esistono due indici i, $j \in N$ tali che $T: E_i \to F_j$ è compatto, allora T è compatto da E a F.*

Analogamente supponiamo che $\forall i \; \exists j > i$ tale che la immersione di F_i in F_j sia nucleare. Allora la 1) *e la* 2) *restano vere se si sostituisce la parola « compatto » con la parola «nucleare ».*

Ancora, se si suppone che E_n, F_n siano spazi di Hilbert, $\forall n \in N$, e che le immersioni in F siano di tipo Hilbert-Schmidt, allora la 1) *rimane valida con la locuzione « di tipo H-S » al posto della parola « compatto ».*

DIMOSTRAZIONE. 1) Dal Teorema 2.15 segue che esistono i, $j \in N$ tali che T è continuo da E_i a F_j. Ma $\forall j \; \exists k \in N$, $k > j$ tale che la immersione di F_j in F_k è compatta. Quindi, T, definito su E_i e a valori in F_k, è compatto.

2) Poichè la immersione di F_j in F è continua per ogni $j \in N$, T è compatto da E_i a F. Ma anche la immersione di E in E_i è continua. Quindi, T, come operatore da E a F, è compatto.

Con lo stesso procedimento si provano le restanti affermazioni.

TEOREMA 2.20. *Valgano le ipotesi del Teorema* 2.18, *eccetto la condizione* 1), *che è sostituita dalla seguente*:

1′) *Uno almeno degli spazi F_0, F_1 sia uno spazio LN^*.*

Allora, se T è un operatore lineare e continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1, T è compatto da E_α a F_α, $\alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che F_1 sia uno spazio LN^*. In base al Teorema 2.19, e alle ipotesi:

$\exists i$, j tali che $T: E_{0,i} \to F_{0,j}$ è lineare e continuo;

$\exists k$, l tali che $T: E_{1,k} \to F_{1,l}$ è lineare e compatto.

Sia $m = \max(i, k)$, $n = \max(j, l)$. Allora, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.16 e sfruttando il fatto che la composizione di un operatore compatto con un operatore continuo è compatta, si riconosce che $\exists m$, $n \in N$ tali che T è lineare continuo da $E_{0,m}$ a $F_{0,n}$ ed è compatto da $E_{1,m}$ a $F_{1,n}$.

Allora, in base alla Proposizione 2.1, T è compatto anche da $E_{\alpha,m}$ a $F_{\alpha,n}$, $\alpha \in]0, 1[$. Quindi, per il Teorema 2.19, T è compatto da E_α a F_α.

OSSERVAZIONE. È chiaro che si ottiene un Teorema analogo al precedente se supponiamo che valgono le ipotesi del Teorema 2.18′, tranne la 1), sostituita dalla condizione:

1″) In almeno uno degli spazi F_0, F_1 le immersioni sono nucleari. Si avrà come tesi:

$T \in L(E_0, F_0) \cap L(E_1, F_1) \Rightarrow T$ è nucleare da E_α a F_α, $\alpha \in]0, 1[$.

TEOREMA 2.21. *Siano* $E = \bigcup_n E_n$, $F = \bigcup_n F_n$ *due spazi limiti induttivi di successioni strettamente crescenti di spazi LPS* $E_n = \bigcap_j E_{n,j}$, $F_n = \bigcap_j F_{n,j}$, *ed* E_n *sia uno spazio* M^* *(rispettivamente, uno spazio nucleare),* $\forall n \in N$.

Se T *è un operatore lineare e continuo da* E *a* F, *allora*:

$\forall i, k \in N$ $\exists j, n \in N$ *tali che* $T : E_{i,n} \to F_{j,k}$ *è compatto (rispettivamente, è nucleare).*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 1.2, $\forall i \in N$ $\exists j \in N$ tale che $T(E_i) \subset F_j$ e T è lineare continuo da E_i a F_j.

Ma E_i e F_j sono spazi LPS. Quindi, per ogni k esiste n per cui T risulta compatto (nucleare) da $E_{i,n}$ a $F_{j,k}$ (cfr. Teorema 2.11).

TEOREMA 2.22. *Siano* $E = \bigcup_n E_n$, $F = \bigcup_n F_n$, *due spazi LIS e* F *sia uno spazio* LN^*.

Se T *è un operatore lineare e continuo da* E *a* F *allora*:

$\forall j \in N$ $\exists i \in N$ *tale che la restrizione di* T *a* E_j *è compatta da* E_j *a* F_i.

Supponiamo, invece, che $\forall j \in N$ $\exists k \in N$, $k > j$ *tale che la immersione di* F_j *in* F_k *è nucleare. Allora*:

$\forall j \in N$ $\exists i \in N$, *tale che* $T : E_j \to F_i$ *è nucleare.*

Gli spazi E_n, F_n *siano spazi di Hilbert,* $\forall n \in N$, *e* $\forall j$ $\exists k$, $k > j$ *tale che la immersione di* F_j *in* F_k *sia di tipo Hilbert-Schmidt. Allora*:

$T \in L(E, F) \Rightarrow \forall j \in N$ $\exists i \in N$, *tale che* $T : E_j \to F_i$ *è di tipo Hilbert-Schmidt.*

DIMOSTRAZIONE. Si sa (cfr. Proposizione 1.2) che T è un operatore lineare continuo da E a F se e solo se $\forall j$ $\exists k$ tale che la restrizione di T a E_j è continua da E_j a F_k.

D'altra parte, per ipotesi, $\forall k$ $\exists i$, $i > k$ tale che la immersione di

F_k in F_i è compatta. Quindi, T, considerato come operatore da E_j a F_i, è compatto.

Col medesimo procedimento si provano le altre affermazioni.

TEOREMA 2.23. *Siano* $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *due scale normali continue di spazi LIS,* $E_\alpha = \bigcup_n E_{\alpha,n}$, $F_{\alpha,n} = \bigcup_n F_{\alpha,n}$, *tali che*:

1) *Almeno uno degli spazi* F_0, F_1 *è uno spazio* LN^*.

2) $\forall m,\ n \in N$, *la famiglia* $\{E_{\alpha,m}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia* $\{F_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

3) $\forall n \in N$, *la famiglia* $\{F_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà descritta nella Proposizione* 2.1.

Allora, se T è un operatore lineare continuo da E_0 *a* F_0 *e da* E_1 *a* F_1, $\forall j\ \exists k$ *tale che* $T : E_{\alpha,j} \to F_{\alpha,k}$ *è compatto,* $\forall \alpha \in]0, 1[$.

In particolare, se $E_\alpha = F_\alpha$, $\forall \in \alpha[0, 1]$, *allora* E_α *è uno spazio* LN^*, $\forall \alpha \in]0, 1[$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che F_1 sia uno spazio LN^*. Allora, in base al Teorema 2.22,

$\forall j \in N\ \exists i \in N$ tale che $T : E_{1,j} \to F_{1,i}$ è lineare e compatto;

inoltre,

$\forall j\ \exists k$ tale che $T : E_{0,j} \to F_{0,k}$ è lineare continuo.

Con ragionamento analogo a quello usato per dimostrare il Teorema 2.12, si può supporre $i = k$.

Dalle ipotesi 2) e 3) e dalla Proposizione 2.1, segue allora che T è un operatore compatto da $E_{\alpha,j}$ a $F_{\alpha,k}$, $\alpha \in]0, 1[$.

Veniamo alla seconda affermazione. La assunzione che E_1, per esempio, sia uno spazio LN^*, implica che, per ogni indice $i \in N$ esiste $k \in N$, $k \geq i$, tale che la immersione di $E_{1,i}$ in $E_{1,k}$ è compatta. Notiamo che necessariamente è $k > i$. In caso contrario, l'operatore identico sarebbe compatto, il che è impossibile se assumiamo, come nostra regola, che la dimensione degli spazi di Banach in questione, è infinita.

Poichè $k > i$, anche la immersione di $E_{0,i}$ in $E_{0,k}$ è continua, per ipotesi. Per interpolazione, allora, anche la immersione di $E_{\alpha,i}$ in $E_{\alpha,k}$ risulta compatta, $\forall \alpha \in]0, 1[$.

Teorema 2.23'. *Siano* $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *due scale normali continue di spazi LIS* $H_\alpha = \bigcup_n H_{\alpha,n}$, $K_\alpha = \bigcup_n K_{\alpha,n}$, $H_{\alpha,n}$ *e* $K_{\alpha,n}$ *spazi di Hilbert con la immersione di* $H_{1,n}$ *in* $H_{0,n}$ *e di* $K_{1,n}$ *in* $K_{0,n}$, *compatta,* $\forall n \in N$.

Inoltre, siano verificate le seguenti condizioni:

1) *In almeno uno degli spazi* K_0, K_1 *le immersioni sono nucleari.*

2) $\forall m, n \in N$, *la famiglia* $\{H_{\alpha,m}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ *ha la proprietà di interpolazione normale relativa alla famiglia* $\{K_{\alpha,n}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Allora, se T *è un operatore lineare continuo da* H_0 *a* K_0 *e da* H_1 *a* K_1 :

$\forall j \in N$ $\exists i \in N$ *tale che* $T : H_{\alpha,j} \to K_{\alpha,i}$ *è nucleare,* $\forall \alpha \in]0, 1[$.

In particolare, se $H_\alpha = K_\alpha$, $\forall \alpha \in]0, 1[$, *allora* H_α *è uno spazio nucleare,* $\forall \alpha \in]0, 1[$.

Dimostrazione La prova segue le linee di quella del Teorema precedente e si fonda sulla ipotesi che $\forall j$ $\exists k$, $k > j$, tale che la immersione di $K_{\alpha,j}$ in $K_{\alpha,k}$ è nucleare, $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$. Ci limitiamo, perciò, a dimostrare che lo spazio $H_\alpha \equiv K_\alpha$ è uno spazio nucleare. A questo scopo, osserviamo che la immersione (in questo caso, l'operatore identico) è un operatore continuo da H_0 a H_0 e da H_1 a H_1 e quindi, in base alla prima parte del Teorema,

$\forall j \in N$ $\exists i \in N$ ($j < i$, necessariamente) tale che la immersione di $H_{\alpha,j}$ in $H_{\alpha,i}$ è nucleare. D'altra parte, se denotiamo con E' il duale forte dello spazio vettoriale topologico l.c. E, si ha:

$$(\bigcup_n H_{\alpha,n})' = \bigcap_n (H_{\alpha,n})' = H'_\alpha$$

(cfr. [2], p. 382).

Ora, poichè $\forall m$ $\exists p$, $p > m$, tale che la immersione di $H'_{\alpha,p}$ in $H'_{\alpha,m}$ è nucleare, (cfr. [6], p. 483), H'_α è uno spazio nucleare. D'altra parte, il duale forte di H'_α è proprio il limite induttivo stretto $\bigcup_n H''_{\alpha,n} = \bigcup_n H_{\alpha,n} = H_\alpha$.

Così, H_α è nucleare come duale forte dello spazio di Fréchet nucleare H'_α.

Teorema 2.24. *Sia* $E = \bigcup_n E_n$ *uno spazio LIS. Allora*:

1) *Se* E *è anche uno spazio* LN^* *allora, per ogni operatore lineare continuo* T *da* E *a* E, *si ha*:

$\forall j\ \exists i$ tale che la restrizione di T a E_j è compatta da E_j a E_i.

2) *Se per ogni operatore T lineare e continuo da E a E, per ogni j esiste i per cui $T: E_j \to E_i$ è lineare e compatto, allora E è uno spazio LN^*.*

Se E è uno spazio LIS di una successione di spazi di Hilbert, allora la 2) vale anche per la proprietà di nuclearità.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione 1) è conseguenza del Teorema 2.22. 2) Osserviamo che l'operatore identico I è un operatore lineare continuo da E a E; quindi, per ogni j esiste k tale che la restrizione di I a E_j è compatta da E_j a E_k. È $j<k$.

Infatti, supponiamo che sia $j \geq k$. Allora, per definizione di spazio LIS, la immersione di E_k in E_j è continua. Ciò implica che l'operatore identico è compatto da E_k a E_k, essendo composizione di un operatore compatto con uno continuo. Poichè E_k ha, per assunzione, dimensione infinita, si è ottenuta una contraddizione.

La affermazione relativa alla nuclearità si prova come la seconda parte del Teorema 2.23.

OSSERVAZIONE. Sia $H = \bigcup_n H_n$ uno spazio LIS di spazi di Hilbert. Supponiamo che: $\forall m\ \exists n,\ n>m$ tale che la immersione di H_m in H_n è nucleare. Allora, se T è un operatore lineare e continuo da H a H, si ha:

$\forall j\ \exists i$ tale che la restrizione di T a H_j è nucleare da H_j a H_i.

La dimostrazione è immediata.

TEOREMA 2.25. *Siano $\{E_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ due scale normali continue di spazi LIS $E_\alpha = \bigcup_n E_{\alpha,n}$, $F_\alpha = \bigcup_n F_{\alpha,n}$, F_α spazio LN^*, $\forall \alpha \in [0, 1]$, tali che ciascuna delle famiglie $\{E_{\alpha,i}\}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ ha la proprietà di interpolazione normale relativa alle famiglie $\{F_{\alpha,j}\}$, $\forall j \in N$.*

Allora, se T è un operatore lineare e continuo da E_0 a F_0 e da E_1 a F_1 si ha che:

$\forall j\ \exists i$ tale che $T: E_{\alpha,j} \to F_{\alpha,i}$ è lineare e compatto.

DIMOSTRAZIONE. Le ipotesi implicano che T è un operatore lineare e continuo da E_α a F_α, $\alpha \in]0, 1[$. Allora, per il Teorema 2.22, vale la tesi.

Osservazione. Si ottengono risultati analoghi se si suppone che:

$\forall j \in N$, $\exists i \in N$ tale che la immersione di $F_{\alpha,j}$ in $F_{\alpha,i}$ è nucleare, $\forall \alpha \in [0, 1]$; oppure, se gli $E_{\alpha,n}$, $F_{\alpha,n}$ sono spazi di Hilbert, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\forall n \in N$, si suppone che:

$\forall j \in N$ $\exists i \in N$, $i > j$ tale che la immersione di $F_{\alpha,j}$ in $F_{\alpha,i}$ è di tipo Hilbert-Schmidt.

BIBLIOGRAFIA

[1] Krein, Petunin: *Scales of Banach Spaces*, Russian Math. Surveys, 21, pp. 85-159 (1966).

[2] Favini: *Sulla teoria della interpolazione negli spazi vettoriali topologici*, Rend. Mat., vol. 3, Ser. 6, pp. 361-390 (1970).

[3] Gelfand, Scilov: *Generalized functions*, vol. 2 (1968).

[4] Gelfand, Vilenkin: *Generalized functions*, vol. 4 (1964).

[5] Floret, Wloka: *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, (1968).

[6] Treves: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, (1967).

[7] Köthe: *Topologische lineare Räume I*, (1966).

[8] Lions, Peetre: *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. hautes études, pp. 5-68 (1964).

[9] Goulaouic: *Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications*, Ann. Inst. Fourier, 18, pp. 1-98 (1968).

[10] Sebastião e Silva: *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, Rend. Mat., 14, pp. 388-410 (1955).

[11] Browder: *Remarks on non-linear interpolation in Banach Spaces*, Journ. funct. Analysis, 4, pp. 390-403 (1969).

[12] Lions, Magenes: *Problèmes aux limites non homogènes at applications*, vol. 1 (1968).

[13] Maurin: *Methods of Hilbert Space*, (1967).

[14] Riesz, Nagy: *Lecons d'analyse fonctionnelle*, (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 dicembre 1970.