RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

V. CHVÀL

Piani di Möbius k-aperti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 223-228

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__223_0>

PIANI DI MÖBIUS k-APERTI

V. CHVÀL *)

Nel lavoro [1] A. Barlotti ha proposto una classificazione dei piani grafici secondo il tipo delle configurazioni « chiuse » contenute in essi. Ha dato la definizione di piano k-aperto, ha inoltre costruito un esempio di un piano grafico 4-aperto non banale ed ha provato che un piano desarguesiano infinito non è k-aperto per nessun valore di k.

In questa nota studieremo da questo punto di vista i piani di Möbius e stabiliremo alcuni risultati analoghi a quelli validi per i piani proiettivi.

1. Una struttura di incidenza $\mathcal{K}=(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathrm{I})$ — in cui gli elementi di $\mathcal{P}$ sono punti, gli elementi di $\mathcal{C}$ sono cerchi — sarà chiamata *M-configurazione se*:

a) *tre diversi punti di $\mathcal{K}$ sono incidenti al più con un medesimo cerchio di $\mathcal{K}$,*

b) *per ogni P nell'insieme $\mathcal{K}_P$ di tutti i cerchi passanti per P è definita una relazione di equivalenza ρ, chiamata tangenza, tale che ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_P$, per cui $\alpha\rho\beta$, ha a comune in $\mathcal{K}$ soltanto il punto P,*

c) *dati un cerchio α e i punti $A \,\mathrm{I}\, \alpha \,\not\mathrm{I}\, B$ esiste al più un cerchio $\beta \in \mathcal{K}$ tale che $\alpha\rho\beta \,\mathrm{I}\, A, B$.*

Se è data una M-configurazione $\mathcal{K}$ chiamiamo *fascio con punto base P* ogni classe dell'equivalenza ρ nell'insieme $\mathcal{K}_P$, che contiene almeno due cerchi.

*) Indirizzo dell'A.: Univerzita P. J. Šafárika, Košice, Cecoslovacchia.

Lavoro eseguito mentre l'autore fruiva di una borsa di ricerca del C.N.R. presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Perugia.

Per un dato cerchio α sia i_α il numero di punti incidenti con α e t_α il numero di fasci contenenti il cerchio α.

Per un punto $P \in \mathcal{K}$ si denoti con i_P il numero dei cerchi incidenti con P e con t_P il numero dei fasci con punto base P.

Si chiama *grado di libertà di un punto* $P \in \mathcal{K}$ il numero

$$r(P) = 2 - i_P - t_P$$

e grado di libertà di un cerchio $\alpha \in \mathcal{K}$ il numero

$$r(\alpha) = 3 - i_\alpha - t_\alpha .$$

(Per queste nozioni cfr. [3]).

Diciamo che una M-configurazione $\mathcal{K}$ è k-chiusa (dove k è un intero positivo) se è finita ed ogni elemento di $\mathcal{K}$ ha grado di libertà -k al più.

Chiamiamo un piano di Möbius $\mathfrak{M}$ k-aperto se non contiene nessuna M-configurazione k-chiusa), ma contiene almeno una M-configurazione (k-1)-chiusa.

Osserviamo che le M-configurazioni 1-chiuse sono le M-configurazioni dette chiuse nel lavoro [3] e che ogni piano di Möbius libero (in senso [3]) è 1-aperto.

2. In questo paragrafo sarà descritta una costruzione di un piano di Möbius 2-aperto non banale.

Sia dato un insieme finito di punti $\mathfrak{M}_0$, $|\mathfrak{M}_0| \geq 7$. Costruiamo per induzione la successione

$$\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}_i \subseteq \ldots$$

di M-configurazioni come segue.

Supponiamo che $\mathfrak{M}_{3k}$ sia già costruito. Sia S_{3k} il sistema di tutti i 3- e 4-insiemi di punti $\mathfrak{M}_{3k}$ ordinato in modo tale che ogni 4-insieme di S_{3k} precede tutti i 3-insiemi di S_{3k}.

Ampliamo induttivamente (relativamente all'ordinamento in S_{3k}) l'M-configurazione $\mathfrak{M}_{3k}$ nel modo seguente: se $\alpha \in S_{3k}$ è tale che per ogni tre diversi punti di α non passa qualche cerchio (di $\mathfrak{M}_{3k}$ oppure già costruito nel procedimento) diciamo che α è un nuovo cerchio incidente solo i punti di α e tangente solo con se stesso.

Sia $\mathfrak{M}_{3k+1}$ l'M-configurazione $\mathfrak{M}_{3k}$ ampliata con i cerchi α costruiti nel modo suddetto.

$\mathfrak{M}_{3k+2}$ si otterrà da $\mathfrak{M}_{3k+1}$ se per ogni cerchio $\alpha \in \mathfrak{M}_{3k+1}$ e per ogni coppia di punti $A \,\mathrm{I}\, \alpha \not{\mathrm{I}}\, B$ tali che in $\mathfrak{M}_{3k+1}$ non esiste nessun cerchio β per cui $A \,\mathrm{I}\, \beta \,\mathrm{I}\, B$ ed $\alpha \rho \beta$, si aggiunge un nuovo cerchio β con queste (e solo queste) incidenze e tangenze.

Da $\mathfrak{M}_{3k+2}$ si passa ad $\mathfrak{M}_{3k+3}$ se per ogni coppia di cerchi α, $\beta \in \mathfrak{M}_{3k+2}$, $\alpha \rho \beta$, aventi in $\mathfrak{M}_{3k+2}$ uno o nessun punto comune aggiungeremo rispettivamente uno oppure due punti incidenti con questi due cerchi soltanto.

Sia $\mathfrak{M} = \bigcup_i \mathfrak{M}_i$. Dalla costruzione segue subito che $\mathfrak{M}$ è un piano di Möbius infinito [1]).

Per ogni elemento $a \in \mathfrak{M}$ esiste un intero minimo — $h(a)$ — altezza dell'elemento a — per cui $a \in \mathfrak{M}_{h(a)}$. Se $a, b \in \mathfrak{M}$ scriveremo $a < b (b > a)$ se esiste una successione finita

$$a = c_0 \,\mathrm{I}\, c_1 \,\mathrm{I}\, \dots \,\mathrm{I}\, c_n = b$$

tale che $h(c_i) < h(c_{i+1})$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Lemma. *Per ogni elemento $x \in \mathfrak{M}$ esiste un elemento $y \in \mathfrak{M}$ tale che*

$$x < y \quad \text{e} \quad r(y) \leq -1 \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_{h(y)} .$$

Dimostrazione. Poichè per ogni $x \in \mathfrak{M}$ ed N naturale esiste un elemento $z > x$ tale che $h(z) > N$, possiamo supporre che x sia un punto $A \in \mathfrak{M}_{3k}$, dove l'intero k è abbastanza grande.

Siano α_1, α_2, α_3 tre cerchi di $\mathfrak{M}_{3k+1} - \mathfrak{M}_{3k}$ incidenti con il punto A [2]), e B un punto di $\mathfrak{M}_{3k}$, $B \not{\mathrm{I}}\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Siano inoltre β e γ due cerchi di $\mathfrak{M}_{3k+2}$ per cui: $\beta \,\mathrm{I}\, A, B$; $\beta \rho \alpha_1$; $\gamma \,\mathrm{I}\, A, B$; $\gamma \rho \alpha_2$. Denotiamo con B_2,

---

1) Infatti nessuna configurazione $\mathfrak{M}_n$ verifica il postulato sulla tangenza per i piani di Möbius, e, di conseguenza, $\mathfrak{M}_{n+1} \neq \mathfrak{M}_n$.

2) Poichè $\mathfrak{M}$ è infinito esiste un k tale che il numero dei punti di $\mathfrak{M}_{3k}$ supera il valore p (quasiasi) prefissato. Scegliendo un punto $B \in \mathfrak{M}_{3k} - \mathfrak{M}_{3k-1}$ siano α_1, α_2, α_3 tre cerchi di $\mathfrak{M}_{3k+1}$ passanti per i punti A e B.

B_3, C_1, C_3 i punti di $\mathfrak{M}_{3k+3}$ per i quali si ha: $\beta \cap \alpha_2 = \{B_2, A\}$, $\beta \cap \alpha_3 = \{B_3, A\}$, $\gamma \cap \alpha_1 = \{C_1, A\}$ e $\gamma \cap \alpha_3 = \{C_3, A\}$.

Adesso in $\mathfrak{M}_{3k+4}$ esiste un cerchio δ incidente con quattro punti di $\mathfrak{M}_{3k+3}$ dei quali almeno uno è nell'insieme $\{B_2, B_3, C_1, C_3\}$. Da qui segue che $r(\delta) \leq -1$ e $A < \delta$.

TEOREMA. *Per ogni elemento di* $\mathfrak{M}$ *esiste una M-configurazione 1-chiusa di* $\mathfrak{M}$ *che lo contiene.*

DIMOSTRAZIONE. Sia a un elemento di $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{M}^*_1 = \mathfrak{M}_1 \cup \{a\}$. Scegliamo per ogni $x \in \mathfrak{M}^*_1$ un elemento $y > x$ per cui $r(y) \leq -1$ (in $\mathfrak{M}_{h(y)}$) e denotiamo l'insieme di tutti questi y con $\mathcal{K}^*$. Sia $\mathcal{K}$ l'M-configurazione formata da $\mathcal{K}^*$ e da tutti gli elementi $z < y \in \mathcal{K}^*$.

Per ogni $y \in \mathcal{K}^*$ si ha $r(y) \leq -1$. Sia z un elemento di $\mathcal{K} - (\mathcal{K}^* \cup \mathfrak{M}_0)$. Dapprima, secondo la costruzione della successione $\mathfrak{M}_n$, vale $r(z) \leq 0$ in $\mathfrak{M}_{h(z)}$. D'altra parte, poichè $z < y \in \mathcal{K}^*$, esiste un elemento $u \in \mathcal{K}$ per cui $z \, \mathrm{I} \, u$ ed $h(z) < h(u)$. Allora in $\mathcal{K}$ è $r(z) \leq -1$. Infine se $z \in \mathcal{K} \cap \mathfrak{M}_0$ allora esistono almeno quattro cerchi di $\mathfrak{M}_1 \subset \mathcal{K}$ passanti per z (ricordiamo che $|\mathfrak{M}_0| \geq 7$) e, quindi, in $\mathcal{K}$, è $r(z) \leq -1$.

TEOREMA. *Il piano di Möbius* $\mathfrak{M}$ *è 2-aperto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{K}$ una M-configurazione finita di $\mathfrak{M}$ ed a un elemento di $\mathcal{K}$ di altezza massima. Si ha: $r(a) \geq -1$ se $h(a) = 3k+1$ ed $h(a) \geq 0$ in caso contrario. Dunque, nessuna M-configurazione finita di $\mathfrak{M}$ è 2-chiusa. D'altra parte, secondo il teorema precedente, $\mathfrak{M}$ contiene delle M-configurazioni 1-chiuse.

3. Proviamo adesso che esistono piani di Möbius che non sono k-aperti per nessun valore di k. Infatti, vale il seguente

TEOREMA. *Ogni piano di Möbius ovoidale infinito contiene delle M-configurazioni k-chiuse per ogni* $k \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia P un punto del piano di Möbius $\mathfrak{M}$ in questione ed $\mathcal{A}$ il piano affine formato da tutti i cerchi di $\mathfrak{M}$ passanti per il punto P, e dai punti $X \in \mathfrak{M}$, $X \neq P$. Sia Π il piano proiettivo ottenuto da $\mathcal{A}$ aggiungendo ad $\mathcal{A}$ la retta α_∞ con i punti A_∞, B_∞, ... Il piano

Π risulta desarguesiano essendo tale il piano affine $\mathcal{A}$. Allora, come è dimostrato nel lavoro [1], il piano Π contiene una configurazione, $\mathcal{K}^*$, $(k+2)$-chiusa [3].

Sia $\mathcal{K}$ l'M-configurazione di $\mathfrak{M}$ ottenuta da $\mathcal{K}^*$ sopprimendo tutti gli elementi impropri contenuti in essa ed aggiungendo il punto P.

Sia X un punto di $\mathcal{K}$. Se $X=P$, X è incidente con tutti i cerchi di $\mathcal{K}$ e, allora $r(P)=2-i_P-t_P\leq 2-(k+2)=-k$ ($\mathcal{K}^*$ contiene almeno $k+2$ cerchi di $\mathfrak{M}$).

Se $X\neq P$ allora X appartiene alla $\mathcal{K}^*$; segue che X è incidente con almeno $k+2$ rette di $\mathcal{K}^*$. Tutte queste sono diverse da α_∞ (poichè $X\in\mathcal{K}$) e, infatti, $i_x\geq k+2$ (in $\mathcal{K}$).

Dunque $r(X)\leq 2-(k+2)=-k$.

Sia α un cerchio di $\mathcal{K}$. Allora $\alpha\in\mathcal{K}^*$, $\alpha\neq\alpha_\infty$ ed α è incidente con almeno $k+2$ punti A_1, ..., A_m di $\mathcal{K}^*$. Se tutti questi sono propri, appartengono a $\mathcal{K}$ ed $i_\alpha\geq k+3$ (poichè anche $P \mathrm{I} \alpha$) ed

$$r(\alpha)\leq 3-(k+3=-k.$$

Se, invece, tra i punti A_1, ..., A_m ce n'è uno (e allora solo uno) improprio, quest'ultimo è incidente con almeno un cerchio $\beta\neq\alpha$, α_∞, che è tangente ad α nel punto P. Risulta: $i_\alpha\geq k+2$ (poichè $P \mathrm{I} \alpha$), $t_\alpha\geq 1$ e vale ancora $r(\alpha)\leq 3-(k+2)-1=-k$.

L'M-configurazione $\mathcal{K}$ è allora k-chiusa ed il teorema risulta così provato.

Osservazione. Dalla dimostrazione dell'ultimo teorema segue che ogni punto di un piano di Möbius ovoidale infinito è contenuto in una M-configurazione k-chiusa, per ogni valore di $k\geq 1$.

Osserviamo infine che l'Autore in [2] ha definito una nozione di M-configurazione chiusa più debole di quella introdotta nel lavoro [3]. Ciò nonostante, modificata la nozione di M-configurazione k-chiusa e la costruzione del n. 2, si può anche in questo caso ottenere un esempio di un piano di Möbius 2-aperto.

---

3) Una configurazione $\mathcal{K}$ di un piano grafico si chiama k-chiusa ($k\geq 3$) se è finita ed ogni elemento di essa è incidente con almeno k elementi di $\mathcal{K}$. ([1]).

BIBLIOGRAFIA

[1] BARLOTTI, A.: *Configurazioni k-chiuse e piani k-aperti,* Rend. Sem. Mat. Padova, XXXV, 1964, 56-64.

[2] CHVÀL, V.: *Sui piani liberi di Möbius,* Convegno di geometria combinatoria e sue applicazioni, Perugia, 1970.

[3] SCHLEIERMACHER, A., STRAMBACH, K.: *Freie Erweiterungen in der affinen Geometrie und in der Geometrie der Kreise,* II, Abh. Math. Sem. Hamburg, 34 (1970), 209-227.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 novembre 1970.