

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI

Su una derivata interessante la teoria relativistica dei materiali non semplici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 45 (1971), p. 183-197

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__183_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UNA DERIVATA INTERESSANTE LA TEORIA RELATIVISTICA DEI MATERIALI NON SEMPLICI *)

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI

1. Introduzione.

A. Bressan da un lato basa in [1], [2], [4] e [5] la Elasticità relativistica, eventualmente con coppie di contatto, sulla derivata lagrangiana spaziale $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots B_1 \dots B_1 \dots | A}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots A_1 \dots A_1 \dots}$ di un arbitrario doppio tensore $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots B_1 \dots B_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots A_1 \dots A_1 \dots}$, e in particolare sul gradiente spaziale n -mo di posizione $\alpha_{A_1 \dots A_n}^p$ per $n=1, 2, \dots$. Dall'altra in [3] lo stesso autore considera i fondamenti della teoria dei materiali di ordine n , eventualmente con memoria, in relatività generale. Egli dimostra sulla base di una certa versione relativistica del principio di indifferenza materiale, che il generico sistema dei funzionali costitutivi è costituito da funzionali i cui valori dipendono dalla storia termo-magneto cinematica solo tramite la storia lagrangiana, a quella associata.

Per far ciò tra l'altro, Bressan introduce una certa relativizzazione del gradiente n -mo di posizione che è costruita mediante derivazione totale della posizione sulla ipersuperficie totalmente geodetica e localmente tempo-ortogonale e che indicherò con $x_{||A_1 \dots A_n}^p$.

Di $\alpha_{A_1 \dots A_n}^p$ e $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots B_1 \dots B_1 \dots | A_1 \dots A_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots A_1 \dots A_1 \dots}$ si sanno costruire le espressioni esplicite in riferimenti generali (mediante operazioni razionali e di derivazione) a partire dalle equazioni del moto, dall'espressione del tensore metrico e da $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots B_1 \dots B_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots A_1 \dots A_1 \dots}$.

Non sussiste invece l'analogo per $x_{||A_1 \dots A_n}^p$.

Riallacciandomi al lavoro [3] considero la suaccennata derivazione

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

n -ma sulla ipersuperficie totalmente geodetica e tempo-ortogonale in relazione ad un arbitrario doppio tensore $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$. Ne indico con $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{A_1 \dots A_n}$ il risultato e chiamo tale derivata totalmente geodetica e tempo ortogonale. Mostro che tale derivata può esprimersi con operazioni razionali e di derivazione a partire dal moto, dal tensore metrico e da $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, indico per ogni valore di n il modo di calcolarla e mostro alcune sue proprietà.

In relatività generale esplicito la relazione esistente fra $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{AB}$ e $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{AB}^1$) e mostro l'eguaglianza delle due relativizzazioni α_{AB}^p e $x_{\parallel AB}^p$ del gradiente secondo classico di posizione. In relatività ristretta esplicito anche la relazione fra α_{ABC}^p e $x_{\parallel ABC}^p$ e mostro come la differenza fra tali grandezze dipenda dall'atto di moto.

Mentre per $n \leq 2$ la $x_{\parallel A_1 \dots A_n}^p$ coincide con $\alpha_{A_1 \dots A_n}^p$ 2), per $n > 2$ la prima grandezza è puramente posizionale mentre la seconda dipende dall'atto di moto. Per questo la $x_{\parallel A_1 \dots A_n}^p$ ha interesse nella dinamica dei corpi elastici generalizzati.

2. La derivata n -ma totalmente geodetica.

Indico con S_4 una determinazione dinamicamente possibile del cronotopo in relatività ristretta o generale e con (x^p) un ammissibile sistema di coordinate.

Sia $g_{\rho\sigma}$ il tensore metrico di S_4 , con $g_{00} < 0$; introduco il proiettore spaziale

$$(1) \quad g_{\rho\sigma}^{\perp} = g_{\rho\sigma} + u_{\rho} u_{\sigma} \quad \left(u^{\rho} = \frac{Dx^{\rho}}{Ds} \right).$$

Considero un continuo C in moto in S_4 . Sia S_3^* l'intersezione di una sezione spaziale di S_4 col tubo di universo descritto da C in S_4 e pongo su di essa

$$(2) \quad y^L = \delta_{\rho}^L x^{\rho} \quad a_{LM}^* = g_{LM}^{\perp} \quad (\text{su } S_3^*),$$

1) vedi (65). Per la definizione di $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ vedi (30).

2) Vedi (73).

intendendo come nel seguito che gli indici greci varino da 0 a 3 e quelli latini da 1 a 3.

La $(2)_1$ fornisce un sistema (y^L) di coordinate per S_3^* , mentre $(2)_2$ dà una metrica che lo rende uno spazio riemanniano di segnatura + + +. Questo spazio costituisce l'analogo relativistico della configurazione di riferimento e lo ritengo fissato una volta per tutte. Per semplicità indico ancora con S_4 la determinazione attuale del cronotopo e intenderò riferire ad esso le $g_{\rho\sigma}$ e $g_{\sigma\rho}$.

Siano:

$$(3) \quad x^\rho = x^\rho(t, y^R)$$

le equazioni del moto di C . Inoltre suppongo che le (3) godano di tutte le proprietà di regolarità necessarie nel seguito.

Le equazioni (3) sono determinate a meno di una sostituzione:

$$(4) \quad t = t(\bar{t}, y^R) \quad \bar{t} = \bar{t}(t, y^R)$$

sul parametro temporale t , e per ogni fissato t rappresentano una biiezione dello spazio S_3^* dei punti materiali y^R su una ipersuperficie S_3 del genere spazio in S_4 .

Supposte invertibili le (3) si può esprimere t in funzione delle x^ρ :

$$(5) \quad t = t(x^\rho).$$

Sia $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ un doppio tensore associato ai punti x^ρ di S_4 e y^R di S_3^* , eventualmente dipendente anche dal parametro temporale t .

Supposti allora S_4 e S_3^* legati dalle (3) per un fissato valore di t , si chiama, come è noto, derivata totale covariante di $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ rispetto ad y^R il doppio tensore definito da:

$$(6) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}; R = T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n};_{/R} x^\rho + T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n};_{/R} .$$

Si chiama poi derivata totale covariante n -ma la derivata totale covariante prima della derivata totale covariante $(n-1)$ -ma:

$$(7) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}; A_1 \dots A_n = (T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}; A_1 \dots A_{n-1}); A_n .$$

Si consideri la derivata totale covariante n -ma di $T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots}$ rispetto alle y^R in un punto evento E di coordinate \bar{x}^p per una scelta $\tilde{t} = \tilde{t}(x^p)$ del parametro temporale, tale che l'equazione:

$$(8) \quad \tilde{t}(x^p) = 0$$

rappresenti l'ipersuperficie totalmente geodetica Γ passante per E e ivi normale alla quadrivelocità u^p .

Mi propongo di esprimere questa derivata, che indicherò con $T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1 \dots A_n}$ a partire da un'espressione del tutto generale di $T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots}$, ossia per una scelta arbitraria del parametro temporale, e la chiamerò derivata covariante n -ma totalmente geodetica e tempo-ortogonale o più brevemente *derivata n -ma geodetica*.

Si può intanto osservare che in base alla sua definizione tale derivata gode delle usuali proprietà delle derivate in relazione alla somma, al prodotto e all'innalzamento ed abbassamento degli indici. Non è invece in generale vera la relazione:

$$(9) \quad (T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1 \dots A_r}) \parallel_{A_{r+1} \dots A_{r+s}} = T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1 \dots A_{r+s}}.$$

In base alla definizione di $T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1 \dots A_n}$ si ha:

$$(10) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1} = [T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{t=t(\tilde{t}, y^R)}]; A_1$$

dove la sostituzione $t = t(\tilde{t}, y^R)$ che compare in (10) ha lo scopo di sostituire al generico parametro temporale t che compare in (3) il parametro \tilde{t} soddisfacente alla proprietà anzidetta cf. (8).

Identificando t con y^0 si ha dunque:

$$(11) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1} = T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/p} (x_{A_1}^p + x_0^p y_{A_1}^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/A_1}.$$

Per la derivata seconda si ha:

$$(12) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{A_1 A_2} = [T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{t=t(\tilde{t}, y^R)}]; A_1 A_2 = \\ = T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/p\sigma} (x_{A_1}^p + x_0^p y_{A_1}^0) (x_{A_2}^\sigma + x_0^\sigma y_{A_2}^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/p} (x_{/A_1 A_2}^p + x_{/A_1}^p y_{A_2}^0 + \\ + x_{/A_2}^p y_{A_1}^0 + x_{00}^p y_{A_1}^0 y_{A_2}^0 + x_0^p y_{/A_1 A_2}^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/p A_2} (x_{A_1}^p + x_0^p y_{A_1}^0) + \\ + T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/A_1 \sigma} x_{A_2}^\sigma + x_0^\sigma y_{A_2}^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} \parallel_{/A_1 A_2}.$$

Analogamente si procede per le derivate successive, la derivata n -ma essendo data da:

$$(13) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{A_1 \dots A_n} = [T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{A_1 \dots A_n} \Big|_{t=t(\tilde{t}, y^R)}]; \quad A_1 \dots A_n.$$

Le quantità che compaiono nell'espressione di $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{A_1 \dots A_n}$ sono tutte note tranne le $y_{A_1}^0, \dots, y_{A_n}^0$ dove è:

$$(14) \quad y^0 = t(\tilde{t}, y^R) \quad \text{per } \tilde{t} = 0.$$

3. Un procedimento per il calcolo esplicito di $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{A_1 \dots A_n}$ a partire da un'espressione qualunque di $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \parallel_{A_1 \dots A_n}$.

Interpreto le equazioni (3) come equazioni di un cambiamento di coordinate in S_4 .

Considero la generica geodetica in S_4 passante per E ed ivi normale ad u^p . Le sue equazioni nel nuovo sistema di coordinate, riferite ad un parametro privilegiato s , che ha il significato di arco cronotopico nel caso che la curva abbia lunghezza nulla, sono date da:

$$(15) \quad \ddot{y}^p + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma \tau \end{matrix} \right\} y^\sigma y^\tau = 0$$

con:

$$(16) \quad \dot{y}^p(0)u_p = 0$$

dove il punto indica derivazione rispetto ad s ed i simboli di Christoffel che compaiono nella (15) vanno calcolati rispetto al nuovo sistema di coordinate y^p in base alla nota formula:

$$(17) \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\beta}.$$

Al variare dei valori iniziali \dot{y}^p , compatibilmente con la (16), la geodetica di equazioni (15) descrive Γ in base alla definizione di ipersuperficie totalmente geodetica.

L'equazione di Γ può porsi nella forma:

$$(18) \quad y^0 = \varphi(y^R)$$

dove la (18) è caratterizzata dalla condizione di valere per ogni soluzione di (15) e (16).

Derivando la (18) rispetto ad s si ottiene:

$$(19) \quad \dot{y}^0 = \varphi_{,A} \dot{y}^A$$

dove la virgola indica derivazione parziale. Imponendo che la (19) sia soddisfatta in E da ogni soluzione della (16) e osservando che ovviamente u^0 è diverso da zero, si trae con semplici operazioni razionali:

$$(20) \quad \varphi_{,A} = -\frac{u_A}{u_0}.$$

Derivando ancora la (19) rispetto ad s si ottiene:

$$(21) \quad \ddot{y}^0 = \varphi_{,AB} \dot{y}^A \dot{y}^B + \varphi_{,A} \ddot{y}^A.$$

Imponendo che la (21) sia soddisfatta in E da ogni soluzione di (15) e (16), si trova la condizione per $\varphi_{,AB}$:

$$(22) \quad (\varphi_{,AB} + \mathcal{A}_{AB}) \dot{y}^A \dot{y}^B = 0$$

con:

$$(23) \quad \mathcal{A}_{AB} = \left[\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \right\} - \varphi_{,R} \left\{ \begin{array}{c} R \\ 0 \ 0 \end{array} \right\} \right] \varphi_{,A} \varphi_{,B} + \left[\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A \ 0 \end{array} \right\} - \varphi_{,R} \left\{ \begin{array}{c} R \\ A \ 0 \end{array} \right\} \right] \varphi_{,B} + \\ + \left[\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \ B \end{array} \right\} - \varphi_{,R} \left\{ \begin{array}{c} R \\ 0 \ B \end{array} \right\} \right] \varphi_{,A} + \left[\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A \ B \end{array} \right\} - \varphi_{,R} \left\{ \begin{array}{c} R \\ A \ B \end{array} \right\} \right].$$

La (22) deve valere per valori arbitrari di \dot{y}^A, \dot{y}^B ; si trae dunque:

$$(24) \quad \varphi_{,AB} = -\mathcal{A}_{AB}.$$

Derivando ancora le (21) ed imponendo che l'equazione che così si ottiene sia soddisfatta per ogni soluzione di (15) (1,6) e delle equazioni che si ottengono derivando le (15), si arriverà ad un'equazione della forma:

$$(25) \quad (\varphi_{,ABC} + \mathcal{A}_{ABC}) \dot{y}^A \dot{y}^B \dot{y}^C = 0$$

che deve essere soddisfatta per valori arbitrari delle y^R e dove le \mathcal{A}_{ABC} sono quantità facilmente calcolabili mediante operazioni razionali e derivazioni di quantità note.

Da (25) si ottiene quindi:

$$(26) \quad \varphi_{,ABC} = -\mathcal{A}_{ABC}.$$

In generale ripetendo il procedimento sin qui descritto, con derivazioni successive si arriva ad un'equazione della forma:

$$(27) \quad (\varphi_{,A_1 \dots A_n} + \mathcal{A}_{A_1 \dots A_n}) \dot{y}^{A_1} \dots \dot{y}^{A_n} = 0$$

che deve essere soddisfatta per valori arbitrari delle y^R e da cui dunque si trae:

$$(28) \quad \varphi_{,A_1 \dots A_n} = -\mathcal{A}_{A_1 \dots A_n}$$

dove le quantità $\mathcal{A}_{A_1 \dots A_n}$ sono facilmente calcolabili mediante operazioni razionali e di derivazione.

Note le $\varphi_{,A_1 \dots A_n}$ in base alle (28), si ottengono subito le $y^0_{/A_1 \dots A_n}$ mediante le note formule che legano le derivate tensoriali covarianti a quelle parziali e si ha così l'espressione cercata di $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} |_{A_1 \dots A_n}$ a partire da un'espressione di $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ riferita a sistemi di coordinate arbitrari e ad un'arbitraria scelta del parametro temporale.

4. Relazione tra $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} |_{AB}$ e la derivata lagrangiana normale $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} |_{AB}$.

Riferiamoci al doppio tensore $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ definito in S_4 e S_3 . In relazione al moto (3) si definisce derivata lagrangiana prima di $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ rispetto ad y^A la derivata totale di $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ rispetto ad y^A quando in $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ si sia operata la sostituzione $t = t(\hat{t}, y^R)$ dove \hat{t} è un parametro tempo-ortogonale in E , vedi [1, § 13]. Tale derivata è univocamente determinata da questa condizione e si indica con $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} |_A$; si ha quindi:

$$(29) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} |_A = [T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} |_{t=t(\hat{t}, y^R)}]; A.$$

Si chiama poi derivata spaziale lagrangiana n -ma di $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ il dop-

pio tensore:

$$(30) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = (T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} |_{A_1 \dots A_n}) |_{A_n}.$$

Mi propongo di trovare una relazione che leghi $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} |_{AB}$ e $T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} |_{AB}$.

Per far ciò mi pongo in un riferimento χ naturale, proprio e localmente geodetico con origine in E , in cui valgono quindi le relazioni locali in E :

$$(31)_1 \quad g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad \delta'_{\alpha 0} = \delta_{\alpha 0}, \quad \delta'_{rs} = -\delta_{rs}$$

$$(31)_2 \quad g_{\alpha\beta, \gamma} = 0$$

$$(31)_3 \quad u^p = \delta_0^p$$

Sia:

$$(32) \quad x^0 = f(x^r)$$

l'equazione di Γ in χ .

Considero ora il nuovo riferimento χ' ottenuto da χ mediante la trasformazione di coordinate:

$$(33) \quad \begin{cases} \bar{x}^0 = x^0 - f(x^r) \\ \bar{x}^r = x^r, \end{cases} \quad (34) \quad \begin{cases} x^0 = \bar{x}^0 + f(\bar{x}^r) \\ x^r = \bar{x}^r. \end{cases}$$

Voglio far vedere che anche χ' è naturale, proprio e localmente geodetico in E , cioè che anche in χ' valgono in E le relazioni (31)₁, (31)₂, e (31)₃.

La trasformazione (33) è lineare in E a meno di quantità d'ordine maggiore di 2. Infatti in E si ha per (31) e (33):

$$(35) \quad \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} = 1 \quad \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^r} = -f_{,r} = \alpha u_r = 0 \quad \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^p} = \delta_p^r,$$

dove α è un coefficiente di proporzionalità. Le (35) si possono compendiare nell'unica relazione:

$$(36) \quad \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^\sigma} = \delta_\sigma^p.$$

Per le derivate seconde da (33) si ha:

$$(37) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^0}{\partial x^0 \partial x^\sigma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^0}{\partial x^r \partial x^s} = f,rs.$$

Derivando due volte la (32) rispetto ad s si ottiene:

$$(38) \quad \dot{x}^0 = f,rs \dot{x}^r x^s + f,r \ddot{x}^r.$$

Poichè la (32) è l'equazione di Γ la (38) deve essere soddisfatta in E da ogni soluzione di:

$$(39) \quad \ddot{x}^p + \left\{ \begin{matrix} p \\ \sigma \tau \end{matrix} \right\} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\tau = 0,$$

$$(40) \quad \dot{x}^p u_p = 0.$$

Essendo in χ nulli i simboli di Christoffel in E , la (39) diviene:

$$(41) \quad \ddot{x}^p = 0.$$

La (38), tenuto conto di (40), (41), (35)₂, (35)₃, diviene:

$$(42) \quad f,rs \dot{x}^r \dot{x}^s = 0.$$

La (42) deve essere soddisfatta per valori arbitrari di x^r e x^s e dunque porge:

$$(43) \quad f,rs = 0.$$

Da (43) e (37)₃ segue:

$$(44) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^0}{\partial x^r \partial x^s} = 0.$$

Le (37)₁, (37)₂ e (44) si possono compendiare nell'unica relazione:

$$(45) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} = 0.$$

In base alle note formule di trasformazione dei coefficienti della metrica e dei simboli di Christoffel, tenuto conto di (36) e (45), si può concludere che anche nel nuovo riferimento χ' continuano a valere in E le relazioni (31)₁ e (31)₂.

Resta ancora da far vedere che anche in χ' vale in E la (31)₃.

Infatti da (33), (35)₂ e (35)₃ segue:

$$(46)_1 \quad \bar{u}^0 = \frac{D\bar{x}^0}{Ds} = u^0 - f, r \quad u^r = u^0,$$

$$(46)_2 \quad \bar{u}^r = \frac{D\bar{x}^r}{Ds} = \frac{Dx^r}{Ds} = u^r .$$

Posso quindi concludere che anche χ' è naturale, proprio e localmente geodetico in E . In χ' l'equazione di Γ diviene:

$$(47) \quad x^0 = 0.$$

Mi propongo adesso di trovare l'espressione di $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots || AB}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$ in χ' .

In base alla definizione di derivata totalmente geodetica, da (10), (12), segue, ricordando che si è identificato t con y^0 :

$$(48) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots || A}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} = T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} (x_A^\rho + x_0^\rho y_A^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / A}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots}$$

$$(49) \quad \begin{aligned} T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots || AB}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} &= T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho\sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} (x_A^\rho + x_0^\rho y_A^0)(x_B^\sigma + x_0^\sigma y_B^0) + \\ &+ T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} (x_{AB}^\rho + x_{A0}^\rho y_B^0 + x_{0B}^\rho y_A^0 + x_{00}^\rho y_A^0 y_B^0 + x_0^\rho y_{AB}^0) + \\ &+ T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho B}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} (x_A^\rho + x_0^\rho y_A^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / A\rho}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} (x_B^\rho + x_0^\rho y_B^0) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / AB}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 \dots} . \end{aligned}$$

Derivando (8) rispetto alla y^A , tenuto conto di (3), (4) e di (47), si ha:

$$(50) \quad \frac{d\tilde{t}}{dy^A} = x_A^0 + x_0^0 y_A^0 = 0$$

da cui segue tenuto conto di (31)₃:

$$(51) \quad y_A^0 = -\frac{x_A^0}{x_0^0} = -\frac{u_\rho x_A^\rho}{u_\rho x_0^\rho} = u_A^+ \frac{Dt}{Ds} \quad \text{ove } u_A^+ = u_\rho x_A^\rho .$$

Derivando (50) rispetto ad y^B si ottiene:

$$(52) \quad \frac{d}{dy^B} \left(\frac{dt}{dy^A} \right) = x_{AB}^0 + x_{A0}^0 y_B^0 + x_{0B}^0 y_A^0 + x_{00}^0 y_A^0 y_B^0 + x^0 y_{AB}^0 .$$

Da (52) (31)₃ et (51)₃ segue:

$$(53) \quad y_{AB}^0 = u_\rho \left[x_{AB}^\rho + \frac{Dx_A^\rho}{DS} u_B^\dagger + \frac{Dx_B^\rho}{DS} u_A^\dagger + x_{00}^2 u_A^\dagger u_B^\dagger \left(\frac{Dt}{DS} \right)^2 \right] .$$

Scegliendo il parametro t in modo tale che sia tempo-ortogonale in E , cioè che valga in E la relazione:

$$(54) \quad u_A^\dagger = 0$$

le (51), (53) divengono rispettivamente:

$$(55) \quad y_A^0 = 0,$$

$$(56) \quad y_{AB}^0 = u_\rho x_{AB}^\rho \frac{Dt}{DS} .$$

Da (49), (55) e (56) segue:

$$(57) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots | AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} = T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots ; AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} + \frac{DT_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots}}{DS} u_\rho x_{AB}^\rho .$$

Da (29), (30), (4), segue:

$$(58) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots | A}^{\alpha_1 \dots A_1 \dots} = T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho}^{\alpha_1 \dots A \dots} (x_A^\rho + u^\rho u_A^\dagger) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / A}^{\alpha_1 \dots A \dots} ,$$

$$(59) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots | AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} = T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho \sigma}^{\alpha_1 \dots A \dots} (x_B^\rho + u^\rho u_B^\dagger) (x_A^\sigma + u^\sigma u_A^\dagger) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho}^{\alpha_1 \dots A \dots} [x_{AB}^\rho + \frac{Dx_A^\rho}{DS} u_B^\dagger + x_{0B}^0 u_A^\dagger \frac{Dt}{DS} + u^\rho u_{\alpha/B} x_A^\alpha + u^\rho u_\alpha (x_{AB}^\alpha + \frac{Dx_A^\alpha}{DS} u_B^\dagger)] + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / \rho B}^{\alpha_1 \dots A \dots} (x_A^\rho + u^\rho u_A^\dagger) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / A \rho}^{\alpha_1 \dots A \dots} (x_B^\rho + u^\rho u_B^\dagger) + T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots / AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} .$$

Essendo t tempo-ortogonale, la (59) diviene:

$$(60) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots | AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} = T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots ; AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} + \frac{DT_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots}}{DS} (u_{\rho/\tau} x_A^\rho x_B^\tau + u_\rho x_{AB}^\rho) .$$

Ricordo che, stante (1), si definisce gradiente primo spaziale di posizione il vettore α_A^ρ espresso dalla relazione:

$$(61) \quad \alpha_A^\rho = g_\sigma^\rho x_A^\sigma \quad (g_\sigma^\rho = \delta_\sigma^\rho + u^\rho u_\sigma).$$

Da (61), (51) segue:

$$(62) \quad \alpha_A^\rho = x_A^\rho + u^\rho u_A^\dagger.$$

Per $t=t(x)$ tempo-ortogonale, la (62) diviene:

$$(63) \quad \alpha_A^\rho = x_A^\rho.$$

Tenuto conto di (63) la (60) diviene:

$$(64) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots} |_{AB} = T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots; AB}^{\alpha_1 \dots A \dots} + \frac{DT_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots}}{DS} (u_{\rho/\tau} \alpha_A^\rho \alpha_B^\tau + u_\rho x_{AB}^\rho).$$

Il confronto tra (57) e (64) porge:

$$(65) \quad \begin{aligned} T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots} ||_{AB} &= T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots} |_{AB} - \frac{DT_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots}}{DS} u_{\rho/\tau} \alpha_A^\rho \alpha_B^\tau = \\ &= T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots} |_{AB} - \frac{DT_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots}}{DS} u_{AB}^* \end{aligned}$$

dove u_{AB}^* indica il gradiente di velocità lagrangiano definito in base a:

$$(66) \quad u_{AB}^* = u_{\rho/\tau} \alpha_A^\rho \alpha_B^\tau = \alpha_A^\rho u_{\rho|B} = u_{\rho/\tau} \alpha_A^\rho \alpha_B^\tau.$$

La (65) dà la relazione cercata tra $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots} ||_{AB}$ e $T_{\beta_1 \dots \beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots A \dots} |_{AB}$ e mostra come la loro differenza dipende dall'atto di moto.

5. Confronti tra $\alpha_{A_1 \dots A_n}^\rho$ e $X_{||A_1 \dots A_n}^\rho$ per $n=2, 3$.

Mi propongo dapprima di mettere $x_{||AB}^\rho$ in relazione col gradiente spaziale secondo della posizione α_{AB}^ρ .

Per definizione è:

$$(67) \quad \alpha_{AB}^\rho = g_\sigma^\rho \alpha_{A|B}^\sigma.$$

Da (67), (62) e (58) segue:

$$(68) \quad \alpha_{AB}^{\rho} = g_{\sigma}^{\rho} \left(x_{AB}^{\sigma} + \frac{Dx_A^{\sigma}}{Ds} u_B^{\dagger} + u_{/B}^{\sigma} u_A^{\dagger} + A^{\sigma} u_A^{\dagger} u_B^{\dagger} + u^{\sigma} (u_A^{\dagger})_{|B} \right) = \\ = g_{\sigma}^{\rho} \left(x_{AB}^{\sigma} + \frac{Dx_A^{\sigma}}{Ds} u_B^{\dagger} + u_{/B}^{\sigma} u_A^{\dagger} + A^{\sigma} u_A^{\dagger} u_B^{\dagger} \right),$$

poichè $g_{\sigma}^{\rho} u^{\sigma} = 0$, dove A^{σ} è la 4-accelerazione definita da:

$$(69) \quad A^{\sigma} = \frac{Du^{\sigma}}{Ds}.$$

Da (12), (51) e (53) segue:

$$(70) \quad x_{||AB}^{\rho} = g_{\sigma}^{\rho} \left(x_{AB}^{\sigma} + \frac{Dx_A^{\sigma}}{Ds} u_B^{\dagger} + x_{0B}^{\sigma} u_A^{\dagger} \frac{Dt}{Ds} + \frac{Dx_0^{\sigma}}{Ds} u_A^{\dagger} u_B^{\dagger} \frac{Dt}{Ds} \right).$$

Scegliendo t coincidente con s si ha:

$$(71) \quad x_{0B}^{\sigma} \frac{Dt}{Ds} = u_{/B}^{\sigma}, \quad \frac{Dx_0^{\sigma}}{Ds} \frac{Dt}{Ds} = A^{\sigma}.$$

La (70) diviene, tenuto conto di (71):

$$(72) \quad x_{||AB}^{\rho} = g_{\sigma}^{\rho} (x_{AB}^{\sigma} + u_{/A}^{\sigma} u_B^{\dagger} + u_{/B}^{\sigma} u_A^{\dagger} + A^{\sigma} u_A^{\dagger} u_B^{\dagger}).$$

Il confronto di (68) e (72) porge:

$$(73) \quad \alpha_{AB}^{\rho} = x_{||AB}^{\rho}.$$

Si può osservare che scegliendo il parametro t tempo-ortogonale le (68), (72) divengono:

$$(74) \quad \alpha_{AB}^{\rho} = x_{||AB}^{\rho} = g_{\sigma}^{\rho} x_{AB}^{\sigma}.$$

Mi propongo ora di esplicitare la relazione esistente tra il gradiente terzo trasverso di posizione α_{ABC}^{ρ} e $x_{||ABC}^{\rho}$, ponendomi però nell'ambito della relatività ristretta.

Per far ciò considero un riferimento pseudoeuclideo e localmente proprio in E , cioè tale da aversi in tutto lo spazio:

$$(75) \quad g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta},$$

et in E :

$$(76) \quad u^{\rho} = \delta^{\rho}_0.$$

Si ha per definizione:

$$(77) \quad \alpha^{\rho}_{ABC} = g^{\rho}_{\sigma} (\alpha^{\sigma}_{AB})_{|C}.$$

Da (68), (71), (58) e (77) segue, tenuto conto delle ipotesi (75) e (76), e scegliendo t tempo-ortogonale:

$$(78) \quad \alpha^{\rho}_{ABC} = g^{\rho}_{\sigma} [x^{\sigma}_{ABC} + u^{\sigma}_{/A} (u_{\tau/C} x^{\tau}_{\bar{B}} + u_{\tau} x^{\tau}_{\bar{B}C}) + u^{\sigma}_{/B} (u_{\tau/C} x^{\tau}_{\bar{A}} + u_{\tau} x^{\tau}_{\bar{A}C}) + u^{\sigma}_{/C} u_{\tau} x^{\tau}_{\bar{A}B}].$$

Da (13), ricordando che si è scelto il parametro t tempo-ortogonale, segue con facili calcoli:

$$(79) \quad x^{\rho}_{||ABC} = g^{\rho}_{\sigma} (x^{\sigma}_{ABC} + u^{\sigma}_{/A} u_{\tau} x^{\tau}_{\bar{B}C} + u^{\sigma}_{/B} u_{\tau} x^{\tau}_{\bar{A}C} + u^{\sigma}_{/C} u_{\tau} x^{\tau}_{\bar{A}B}).$$

Il confronto tra (78) e (79) porge:

$$(80) \quad \alpha^{\rho}_{ABC} = x^{\rho}_{||ABC} + g^{\rho}_{\sigma} (u^{\sigma}_{/A} u_{\tau/C} x^{\tau}_{\bar{B}} + u^{\sigma}_{/B} u_{\tau/C} x^{\tau}_{\bar{A}}).$$

La (80) dà la relazione cercata tra α^{ρ}_{ABC} e $x^{\rho}_{||ABC}$ e mostra come la loro differenza dipende dall'atto di moto.

Si osservi che se si sceglie il parametro temporale t in maniera tale che oltre ad essere tempo-ortogonale sia anche totalmente geodetico, cioè coincidente con \tilde{t} , in base alla (13) si ha:

$$(81) \quad x^{\rho}_{||A_1 \dots A_n} = x^{\rho}_{/A_1 \dots A_n}$$

per ogni n .

Inoltre, dovendo essere:

$$(82) \quad t(x^p) \equiv \tilde{t}(x^p) \equiv x^0 = 0,$$

segue che per ogni valore di n è:

$$(83) \quad x_{/A_1 \dots A_n}^0 = 0.$$

La (83) ci dice dunque che $x_{/A_1 \dots A_n}^p$ è spaziale cioè che vale la relazione:

$$(84) \quad u^p x_{/A_1 \dots A_n}^p = 0.$$

La (78) diviene allora:

$$(85) \quad \alpha_{ABC}^p = g_{\sigma}^1 (x_{/ABC}^{\sigma} + u_{/A}^{\tau} u_{\tau/C} x_{\bar{B}}^{\tau} + u_{/B}^{\tau} u_{\tau/C} x_A^{\tau}).$$

La (81) mostra come sia vantaggiosa l'introduzione di $x_{/A_1 \dots A_n}^p$ poichè tale quantità è puramente posizionale e non dipende quindi dall'atto di moto come avviene invece per $\alpha_{A_1 \dots A_n}^p$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRESSAN, A.: *Cinematica dei sistemi continui in relatività generale*, Ann. Mat. Pura Appl., 62 (1963) 99.
- [2] BRESSAN, A.: *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 34 (1964) 1.
- [3] BRESSAN, A.: *Una teoria di relatività includente oltre all'elettromagnetismo e alla termodinamica, le equazioni costitutive dei materiali ereditari. Sistemazione assiomatica*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 34 (1964) 74.
- [4] BRESSAN, A.: *Coppie di contatto in relatività*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa (1966) 93.
- [5] BRESSAN, A.: *Elasticità relativistica con coppie di contatto*, Ricerche di Matematica 15 (1966) 169.