

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUISA ARLOTTI

Sulle entropie idempotenti a traccia shannoniana

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 45 (1971), p. 129-144

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__129_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE ENTROPIE IDEMPOTENTI A TRACCIA SHANNONIANA

LUISA ARLOTTI *)

RIASSUNTO. Si stabilisce la forma generale della soluzione dell'equazione generalizzata di associatività (4), sotto le condizioni di continuità, di simmetria (1), di stretta monotonia (2) e di idempotenza (3). Si riconosce infine che le uniche leggi di composizione di tipo universale per l'informazione di esperienza continue, soddisfacenti (1), (2), (3), (4) e l'equazione di distributività (5) sono le leggi di Shannon e di Rényi.

1. Nella teoria assiomatica dell'informazione di esperienza B. Forte [1] è giunto al seguente risultato: le funzioni $\Phi(x, y, u, v)$, le quali esprimono una legge di composizione di tipo universale per l'informazione di esperienza e sono consistenti con una legge di composizione di tipo universale per l'informazione di evento, godono delle proprietà sotto elencate.

Se si indica con $F(x, y)$ la legge di composizione di evento, con Γ_2 il corrispondente insieme di definizione, con Γ_4 l'insieme di definizione di $\Phi(x, y, u, v)$, ossia se

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x \in \bar{R}^+, y \in \bar{R}^+, F(x, y) \in \bar{R}^+\}$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y, u, v) : (x, y) \in \Gamma_2, u \geq x, v \geq y\}$$

allora è:

$$e_1) \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4 : \Phi(x, y, u, v) \geq F(x, y)$$

$$e_2) \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4 : \Phi(x, y, u, v) = \Phi(y, x, v, u)$$

$$e_3) \forall (x, y, u, v') \in \Gamma_4 : v'' \geq v' \text{ implica } \Phi(x, y, u, v') \leq \Phi(x, y, u, v'')$$

*) Indirizzo dell'A.: Luisa Arlotti, Istituto di Matematica, Università degli Studi di Ferrara.

e₄) se si indica con Γ_3 il dominio

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma_2, (y, z) \in \Gamma_2, (z, x) \in \Gamma_2\}$$

allora per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_3, u_1 \geq x_1, u_2 \geq x_2, u_3 \geq x_3$:

$$\begin{aligned} & \Phi[F(x_1, x_2), x_3, \Phi(x_1, x_2, u_1, u_2), u_3] = \\ & = \Phi[x_1, F(x_2, x_3), u_1, \Phi(x_2, x_3, u_2, u_3)] \end{aligned}$$

$$e_5) \forall x \in \bar{R}^+, u \geq x : \Phi(x, +\infty, u, +\infty) = u$$

$$e_6) \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4, t \geq 0, w \geq t:$$

$$\Phi(x+t, y+t, u+w, v+w) = \Phi(x, y, u, v) + w.$$

Se vale l'ulteriore proprietà:

$$e_7) \forall (x, y, u, u) \in \Gamma_4 : \Phi(x, y, u, u) = u$$

allora la legge di composizione Φ si dice idempotente.

A partire dalle proprietà ora enunciate sono state ricavate diverse espressioni per $\Phi(x, y, u, v)$; al proposito si vedano i lavori di B. Forte - P. Benvenuti [2], di B. Forte [3], di B. Forte - Z. Daróczy [4], di P. Benvenuti [5]. In particolare è stato dimostrato da B. Forte [3] che la legge di composizione di Shannon

$$\Phi(x, y, u, v) = \frac{ue^{-x/c} + ve^{-y/c}}{e^{-x/c} + e^{-y/c}}$$

e la legge di composizione di Rényi

$$\Phi(x, y, u, v) = \frac{c}{1-\alpha} \log \left(\frac{e^{(1-\alpha)u/c-x/c} + e^{(1-\alpha)v/c-y/c}}{e^{-x/c} + e^{-y/c}} \right)$$

sono le sole leggi di composizione di tipo universale per l'informazione di esperienza che possiedono le seguenti proprietà: continuità, idempotenza, consistenza con la legge di composizione di Shannon per l'informazione di evento

$$F(x, y) = -c \log(e^{-x/c} + e^{-y/c}),$$

stretta monotonia rispetto a v .

Nel presente lavoro verrà dimostrato il seguente

TEOREMA. Siano

$$F(x, y) = -c \log(e^{-x/c} + e^{-y/c}),$$

c costante positiva

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x \in \bar{R}^+, y \in \bar{R}^+, F(x, y) \in \bar{R}^+\}$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y, u, v) : (x, y) \in \Gamma_2, u \geq x, v \geq y\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma_2, (y, z) \in \Gamma_2, (z, x) \in \Gamma_2\}.$$

Sia $\Phi(x, y, u, v)$ una funzione definita in Γ_4 , ivi continua, soddisfacente le seguenti proprietà:

$$(1) \quad \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4 : \Phi(x, y, u, v) = \Phi(y, x, v, u)$$

$$(2) \quad \forall (x, y, u, v') \in \Gamma_4 : v' < v'' \text{ implichi } \Phi(x, y, u, v') < \Phi(x, y, u, v'')$$

$$(3) \quad \forall (x, y, u, u) \in \Gamma_4 : \Phi(x, y, u, u) = u$$

$$(4) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_3, u_1 \geq x_1, u_2 \geq x_2, u_3 \geq x_3 :$$

$$\begin{aligned} & \Phi[F(x_1, x_2), x_3, \Phi(x_1, x_2, u_1, u_2), u_3] = \\ & = \Phi[x_1, F(x_2, x_3), u_1, \Phi(x_2, x_3, u_2, u_3)]. \end{aligned}$$

Allora esiste una funzione $f(u)$, definita $\forall u \in \bar{R}^+$, ivi continua, strettamente monotona, tale che $\forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4$ risulta:

$$\Phi(x, y, u, v) = f^{-1} \left(\frac{e^{-x/c} f(u) + e^{-y/c} f(v)}{e^{-x/c} + e^{-y/c}} \right).$$

Grazie al teorema enunciato e ad un lavoro di Daróczy [7] si può poi facilmente riconoscere che le leggi di Shannon e di Rényi sono le uniche leggi di composizione di tipo universale per l'informazione di esperienza continue e soddisfacenti le condizioni (1), (2), (3), (4) e

$$(5) \quad \begin{aligned} & \Phi(x+t, y+t, u+w, v+w) = \Phi(x, y, u, v) + w \\ & \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4, \quad t \geq 0, \quad w \geq t. \end{aligned}$$

È così confermato per altra via il risultato di B. Forte [3].

La differenza fra il presente lavoro e quello di B. Forte consiste in ciò: B. Forte, utilizzando l'equazione di distributività (5), è passato

dalla funzione incognita Φ nelle quattro variabili (x, y, u, v) ad una funzione incognita θ in due variabili (p, w) .

Qui si segue un procedimento più generale e che pertanto si presta a successive estensioni. Si stabilisce la forma generale della soluzione dell'equazione generalizzata di associatività (4), tenendo conto delle proprietà (1), (2), (3). Si specializza infine detta forma imponendo l'ulteriore condizione che l'equazione (5) sia soddisfatta.

2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA.

Pongo

$$R_2 = \{(p, q) : p \in R^+, q \in R^+, p + q \leq 1\}$$

$$R_4 = \{(p, q, u, v) : (p, q) \in R_2, u \geq -c \log p, v \geq -c \log q\}$$

$$R_3 = \{(p, q, r) : (p, q) \in R_2, (q, r) \in R_2, (r, p) \in R_2\}.$$

Se

$$\varphi(p, q, u, v) = \Phi(-c \log p, -c \log q, u, v)$$

$\varphi(p, q, u, v)$ risulta definita in R_4 , ivi continua e soddisfacente le seguenti proprietà:

$$(1') \quad \forall (p, q, u, v) \in R_4 \quad \varphi(p, q, u, v) = \varphi(q, p, v, u)$$

$$(2') \quad \forall (p, q, u, v') \in R_4, v' < v'' \text{ implica } \varphi(p, q, u, v') < \varphi(p, q, u, v'')$$

$$(3') \quad \forall (p, q, u, u) \in R_4 \quad \varphi(p, q, u, u) = u$$

$$(4') \quad \forall (p_1, p_2, p_3) \in R_3, u_1 \geq -c \log p_1, u_2 \geq -c \log p_2, u_3 \geq -c \log p_3$$

$$\varphi(p_1 + p_2, p_3, \varphi(p_1, p_2, u_1, u_2), u_3) =$$

$$= \varphi(p_1, p_2 + p_3, u_1, \varphi(p_2, p_3, u_2, u_3)).$$

Da (1') e (2') si ha

$$(2'') \quad \forall (p, q, u', v) \in R_4, u' < u'' \text{ implica } \varphi(p, q, u', v) < \varphi(p, q, u'', v).$$

Da (2'), (2''), (3')

$$(6) \quad \forall (p, q, u, v) \in R_4, u < v \text{ implica } u < \varphi(p, q, u, v) < v.$$

Da (1') e (4')

$$(7) \quad \forall (p_1, p_2, p_3) \in R_3, \quad u_1 \geq -c \log p_1, \quad u_2 \geq -c \log p_2, \quad u_3 \geq -c \log p_3 \\ \varphi(p_1 + p_2, p_3, \varphi(p_1, p_2, u_1, u_2), u_3) = \\ = \varphi(p_2 + p_3, p_1, \varphi(p_2, p_3, u_2, u_3), u_1).$$

Si fissi p in modo che si abbia $0 < p \leq 1/3$. Sia

$$R_p = \{(u, v) : u \geq -c \log p, v \geq -c \log p\}.$$

Fissato p , $\varphi(p, p, u, v)$ risulta una funzione continua di (u, v) , definita $\forall (u, v) \in R_p$. Pongo $\varphi(p, p, u, v) = u \top v$.

Analogamente, fissato p , $\varphi(2p, p, u, v)$ risulta una funzione continua di (u, v) , definita $\forall (u, v) : u \geq -c \log 2p, v \geq -c \log p$ e quindi senza dubbio $\forall (u, v) \in R_p$. Pongo $\varphi(2p, p, u, v) = u \Delta v$.

Si ottiene facilmente $\forall u \geq -c \log p, v \geq -c \log p, v' \geq -c \log p, u' \geq -c \log p, w \geq -c \log p$:

Da (1') $(\alpha) \quad u \top v = v \top u.$

Da (2') $(\beta) \quad u \top v' < u \top v'' \text{ se } v' < v''$

$(\beta') \quad u \Delta v' < u \Delta v'' \text{ se } v' < v''.$

Da (2'') $(\beta'') \quad u' \top v < u'' \top v \text{ se } u' < u''$

$(\beta''') \quad u' \Delta v < u'' \Delta v \text{ se } u' < u''.$

Da (3') $(\gamma) \quad u \top u = u$

$(\gamma') \quad u \Delta u = u.$

Da (6) $(\delta) \quad u < u \top v < v \text{ se } u < v$

$(\delta') \quad u < u \Delta v < v \text{ se } u < v.$

Da (7) $(\epsilon) \quad (u \top v) \Delta w = (v \top w) \Delta u.$

Sia (\bar{u}, \bar{v}) una fissata coppia di numeri reali, scelta in modo che si abbia $\bar{u} < \bar{v}$ e $(\bar{u}, \bar{v}) \in R_p$. Sia

$$L(w, w') = (\bar{u} \top w) \top (\bar{v} \top w')$$

$$\text{con } (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}]$$

$L(w, w')$ è una funzione continua; per (β) e (β') è strettamente crescente rispetto a ciascuna variabile; pertanto il suo minimo ed il suo massimo nell'insieme $[\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}]$ valgono rispettivamente, in virtù di (α) e (γ)

$$L(\bar{u}, \bar{u}) = (\bar{u} \top \bar{v}) \top \bar{u}$$

e

$$L(\bar{v}, \bar{v}) = (\bar{u} \top \bar{v}) \top \bar{v}.$$

Sia poi

$$L_1(z) = (\bar{u} \top \bar{v}) \top z \quad \text{con } z \in [\bar{u}, \bar{v}]$$

$L_1(z)$ è una funzione continua nell'intervallo $[\bar{u}, \bar{v}]$, ivi strettamente crescente; è inoltre

$$L_1(\bar{u}) = (\bar{u} \top \bar{v}) \top \bar{u} = L(\bar{u}, \bar{u})$$

$$L_1(\bar{v}) = (\bar{u} \top \bar{v}) \top \bar{v} = L(\bar{v}, \bar{v}).$$

Da tutto ciò segue che l'equazione

$$L(w, w') = L_1(z)$$

ammette una ed una sola soluzione

$$z = l(w, w')$$

la quale è continua e strettamente crescente rispetto a ciascuna variabile. È così

$$(8) \quad (\bar{u} \top w) \top (\bar{v} \top w') = (\bar{u} \top \bar{v}) \top l(w, w') \\ \forall (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}].$$

In modo perfettamente analogo si riconosce l'esistenza di due funzioni $g(w, w')$ e $h(w, w')$, entrambe definite in $[\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}]$, continue, strettamente crescenti rispetto a ciascuna variabile, per le quali risulta rispettivamente:

$$(9) \quad (\bar{u} \top w) \top (\bar{u} \top w') = \bar{u} \top g(w, w') \\ \forall (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}]$$

$$(10) \quad (\bar{v} \top w) \top (\bar{v} \top w') = \bar{v} \top h(w, w') \\ \forall (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}].$$

Ponendo nella (9) $w' = \bar{v}$ si ottiene

$$(9') \quad (\bar{u} \top w) \top (\bar{u} \top \bar{v}) = \bar{u} \top g(w, \bar{v}).$$

La funzione $g(w, \bar{v})$ nell'intervallo $[\bar{u}, \bar{v}]$ è continua, strettamente crescente ed inoltre, come è immediato riconoscere da (9'), in virtù di (γ) e (β) è

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} \top \bar{v} \quad g(\bar{v}, \bar{v}) = \bar{v} \top \bar{v}.$$

Pertanto l'equazione

$$g(w, \bar{v}) = z \top \bar{v}$$

ammette una ed una sola soluzione, la quale è continua e strettamente crescente

$$z = g_1(w)$$

sicchè $\forall w \in [\bar{u}, \bar{v}]$ è

$$(9'') \quad g(w, \bar{v}) = g_1(w) \top \bar{v} \quad \text{con } g_1(\bar{u}) = \bar{u}, g_1(\bar{v}) = \bar{v}.$$

Analogamente, ponendo nella (10) $w = \bar{u}$, si ottiene

$$(10') \quad (\bar{v} \top \bar{u}) \top (\bar{v} \top w') = \bar{v} \top h(\bar{u}, w')$$

e si riconosce l'esistenza di una ed una sola funzione $h_1(w')$, definita in $[\bar{u}, \bar{v}]$, continua, strettamente crescente, tale che

$$(10'') \quad h(\bar{u}, w') = h_1(w') \top \bar{u} \quad \text{con } h_1(\bar{u}) = \bar{u}, h_1(\bar{v}) = \bar{v}.$$

Dalla (8) si deduce

$$(11) \quad [(\bar{u} \top w) \top (\bar{v} \top w')] \Delta (\bar{u} \top \bar{v}) = [(\bar{u} \top \bar{v}) \top l(w, w')] \Delta (\bar{u} \top \bar{v}).$$

Ma per (α) , (ϵ) e (γ) è

$$[(\bar{u} \top \bar{v}) \top l(w, w')] \Delta (\bar{u} \top \bar{v}) = \\ [(\bar{u} \top \bar{v}) \top (\bar{u} \top \bar{v})] \Delta l(w, w') = (\bar{u} \top \bar{v}) \Delta l(w, w').$$

Per (ϵ) , (α) , $(10')$ e $(9'')$ è poi

$$\begin{aligned}
 [(\bar{u} \top w) \top (\bar{v} \top w')] \Delta (\bar{u} \top \bar{v}) &= \\
 &= [(\bar{u} \top \bar{v}) \top (\bar{v} \top w')] \Delta (\bar{u} \top w) = [(\bar{v} \top \bar{u}) \top (\bar{v} \top w')] \Delta (\bar{u} \top w) = \\
 &= [\bar{v} \top h(\bar{u}, w')] \Delta (\bar{u} \top w) = [(\bar{u} \top w) \top h(\bar{u}, w')] \Delta \bar{v} = \\
 &= [(\bar{u} \top w) \top (\bar{u} \top h_1(w'))] \Delta \bar{v} = [\bar{u} \top g(w, h_1(w'))] \Delta \bar{v} = \\
 &= (\bar{u} \top \bar{v}) \Delta g(w, h_1(w')).
 \end{aligned}$$

Sostituendo nella (11) si ottiene

$$(\bar{u} \top \bar{v}) \top g(w, h_1(w')) = (\bar{u} \top \bar{v}) \top l(w, w')$$

da cui, grazie a (β')

$$g(w, h_1(w')) = l(w, w') \quad \forall (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}].$$

Analogamente si ottiene

$$h(w, g_1(w')) = l(w, w') \quad \forall (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}].$$

Quindi

$$(12) \quad g(w, h_1(w')) = h(w, g_1(w')) \quad \forall (w, w') \in [\bar{u}, \bar{v}] \times [\bar{u}, \bar{v}].$$

Se si pone nella (12) $w' = \bar{v}$, poichè $h_1(\bar{v}) = g_1(\bar{v}) = \bar{v}$, la (12) stessa diventa

$$g(w, \bar{v}) = h(w, \bar{v}) \quad \forall w \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

In virtù di (γ) , (α) , (β) dalla (10) con $w' = \bar{v}$ si ricava

$$h(w, \bar{v}) = w \top \bar{v} \quad \forall w \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

Si ha perciò

$$g(w, \bar{v}) = w \top \bar{v} \quad \forall w \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

Introducendo questa espressione nella (9') si può finalmente concludere

che

$$(13) \quad (\bar{u} \top w) \top (\bar{u} \top \bar{v}) = \bar{u} \top (w \top \bar{v}) \quad \forall w \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

In modo perfettamente analogo si riconosce che

$$(14) \quad (\bar{v} \top w) \top (\bar{v} \top \bar{u}) = \bar{v} \top (w \top \bar{u}) \quad \forall w \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

Dalla (13), grazie a (ϵ) , (γ) , (α) , si ricava

$$\begin{aligned} & [(\bar{u} \top w) \top (\bar{v} \top w)] \Delta (\bar{u} \top \bar{v}) = \\ & [(\bar{u} \top w) \top (\bar{u} \top \bar{v})] \Delta (w \top \bar{v}) = [\bar{u} \top (w \top \bar{v})] \Delta (w \top \bar{v}) = \\ & = (w \top \bar{v}) \Delta \bar{u} = (\bar{u} \top \bar{v}) \Delta w = [(\bar{u} \top \bar{v}) \top w] \Delta (\bar{u} \top \bar{v}) \end{aligned}$$

e quindi, per (β') e (α)

$$(15) \quad (w \top \bar{u}) \top (w \top \bar{v}) = w \top (\bar{u} \top \bar{v}) \quad \forall w \in [\bar{u}, \bar{v}].$$

Data l'arbitrarietà di \bar{u} e \bar{v} , (13), (14) e (15) si possono sintetizzare nell'unica equazione

$$(16) \quad (u \top v) \top (u \top w) = u \top (v \top w) \quad \forall u, v, w : u \geq -c \log p, v \geq -c \log p, w \geq -c \log p.$$

È noto ([6], pag. 294) che le soluzioni continue, simmetriche, strettamente crescenti della (16) sono tutte della forma

$$u \top v = f_p^{-1} \left(\frac{f_p(u) + f_p(v)}{2} \right)$$

È dunque

$$\begin{aligned} \varphi(p, p, u, v) &= f_p^{-1} \left(\frac{f_p(u) + f_p(v)}{2} \right) \\ \forall p, u, v : 0 < p \leq 1/3, (u, v) \in R_p. \end{aligned}$$

Nella (17) $f_p(u)$ è una funzione continua, strettamente monotona; essa non è univocamente determinata, ma può essere sostituita da funzioni del tipo $g_p(u) = a_p f_p(u) + b_p$ e solo da queste (a_p, b_p sono costanti, $a_p \neq 0$) ([6], pag. 299).

Per ricorrenza si dimostra che, se m e n sono interi non negativi tali che $0 < (m+n)p \leq 1$, allora risulta

$$(18) \quad \varphi(mp, np, u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{mf_p(u) + nf_p(v)}{m+n} \right) \quad \forall (u, v) \in R_p.$$

Infatti si supponga $0 < mp \leq 1$, $(u, v) \in R_p$,

$$\varphi((m-1)p, p, u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{(m-1)f_p(u) + f_p(v)}{m} \right)$$

e si ponga nella (7) $p_1 = p_3 = p$, $p_2 = (m-1)p$, $u_3 = \varphi(p_1, p_2, u_1, u_2)$, $\varphi(p_2, p_3, u_2, u_3) = u$, $u_1 = v$. Si ottiene allora, ricordando (1') e (3')

$$\varphi(mp, p, u, v) = \varphi((m-1)p, p, u_2, v)$$

con

$$\begin{aligned} u &= \varphi((m-1)p, p, u_2, \varphi((m-1)p, p, u_2, v)) = \\ &= f_p^{-1} \left(\frac{(m^2-1)f_p(u_2) + f_p(v)}{m^2} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$f_p(u_2) = \frac{m^2 f_p(u) - f_p(v)}{m^2 - 1}.$$

Sostituendo

$$\varphi(mp, p, u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{mf_p(u) + f_p(v)}{m+1} \right).$$

Ciò vale $\forall (u, v) \in R_p$. Infatti, poichè u_1 e u_2 sono completamente arbitrari, soggetti alla sola limitazione $(u_1, u_2) \in R_p$, tali risultano anche u, v . Per la simmetria della φ , se $0 < (m+n)p \leq 1$, $(u, v) \in R_p$, $\varphi(mp, np, u, v)$ è espresso proprio dalla (18).

Se $m=n$

$$\varphi(mp, mp, u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{f_p(u) + f_p(v)}{2} \right) \quad \forall (u, v) \in R_p.$$

D'altra parte, data l'arbitrarietà di p , se $p' = mp$, è anche

$$\varphi(p', p', u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{f_{p'}(u) + f_{p'}(v)}{2} \right) \quad \forall (u, v) \in R_{p'}$$

Pertanto, $\forall (u, v) \in R_p$ risulta

$$f_p^{-1} \left(\frac{f_p(u) + f_p(v)}{2} \right) = f_{p'}^{-1} \left(\frac{f_{p'}(u) + f_{p'}(v)}{2} \right).$$

Ciò implica $f_p(u) = a f_{p'}(u) + b \quad \forall u \geq -c \log p$. Data l'arbitrarietà di $f_p(u)$ si può supporre $f_{p'}(u) = f_p(u) \quad \forall u \geq -c \log p$. Si può inoltre definire $f_p(u)$ nell'intervallo $[-c \log p', -c \log p)$ ponendo ivi $f_p(u) = f_{p'}(u)$. Di conseguenza risulta

$$\varphi(mp, mp, u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{f_p(u) + f_p(v)}{2} \right) \quad \forall (u, v) \in R_{mp}$$

Ciò permette di definire $\varphi(p, p, u, v) \quad \forall (u, v) \in R_{mp}$, ponendo

$$\varphi(p, p, u, v) = \varphi(mp, mp, u, v)$$

(pertanto $\varphi \left(\frac{p}{m}, \frac{p}{m}, u, v \right)$ risulta definito $\forall (u, v) \in R_p$ e vale $\varphi(p, p, u, v)$).

Sia q un numero reale non negativo, tale che $0 < p + q \leq 1$.

Se $q = \frac{n}{m} p$ si ha $\forall (u, v) \in R_p$

$$\begin{aligned} \varphi(p, q, u, v) &= \varphi \left(\frac{m}{m} p, \frac{n}{m} p, u, v \right) = \varphi(mp, np, u, v) = \\ &= f_p^{-1} \left(\frac{p f_p(u) + q f_p(v)}{p + q} \right) \end{aligned}$$

Se non esiste un razionale $\frac{n}{m}$ tale che $q = \frac{n}{m} p$, sia $\{r_k\}$ una successione

di razionali convergente a $\frac{q}{p}$. In base alla continuità di f_p^{-1} e di φ le successioni

$$\left\{ f_p^{-1} \left(\frac{f_p(u) + r_k f_p(v)}{1 + r_k} \right) \right\}$$

e $\{\varphi(p, r_k p, u, v)\}$ convergono rispettivamente a

$$f_p^{-1} \left\{ \left(\frac{f_p(u) + (q/p)f_p(v)}{1 + q/p} \right) \right\} \text{ e } \varphi(p, q, u, v).$$

È quindi

$$\varphi(p, q, u, v) = f_p^{-1} \left(\frac{pf_p(u) + qf_p(v)}{p+q} \right) \quad \forall (u, v) \in R_p.$$

Analogamente si ottiene

$$\varphi(q, p, v, u) = f_q^{-1} \left(\frac{qf_q(v) + pf_q(u)}{q+p} \right) \quad \forall (v, u) \in R_q.$$

Per la simmetria (1') se $p < q$ si ha

$$f_p^{-1} \left(\frac{pf_p(u) + qf_p(v)}{p+q} \right) = f_q^{-1} \left(\frac{pf_q(u) + qf_q(v)}{p+q} \right) \quad \forall (u, v) \in R_p.$$

Pertanto (v. [6])

$$f_q(u) = af_p(u) + b \quad \forall u \geq -c \log p.$$

Data l'arbitrarietà di $f_p(u)$ si può supporre $f_q(u) = f_p(u) \quad \forall u \geq -c \log p$ e definire $f_p(u) \quad \forall u \in [-c \log q, -c \log p)$ ponendo ivi $f_p(u) = f_q(u)$. Poichè p e q sono arbitrari, soggetti alla sola condizione $0 < p, 0 < q, p+q \leq 1$, rimane stabilita l'esistenza di una funzione f , continua, strettamente monotona, tale che $\forall (u, v) \in \bar{R}^+ \times \bar{R}^+$ e quindi $\forall (u, v) \in R_2$, si ha

$$(A') \quad \varphi(p, q, u, v) = f^{-1} \left(\frac{pf(u) + qf(v)}{p+q} \right)$$

È perciò anche

$$(A) \quad \Phi(x, y, u, v) = f^{-1} \left(\frac{e^{-x/c}f(u) + e^{-y/c}f(v)}{e^{-x/c} + e^{-y/c}} \right) \quad \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4.$$

La funzione f non è univocamente determinata ma può essere sostituita da funzioni del tipo $af+b$ e solo da queste (a, b costanti, $a \neq 0$).

3. È ora facile riconoscere che le leggi di Shannon e di Rényi sono le uniche leggi di composizione di tipo universale per l'informazione di esperienza continue e soddisfacenti le condizioni (1), (2), (3), (4) e (5).

Si consideri un esperimento

$$\Pi_A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}.$$

Sia $H(\Pi_A) = H_n(A_1, A_2, \dots, A_n)$ la misura della sua incertezza.

Si supponga H compositiva con legge di composizione $\Phi(x, y, u, v)$ continua e soddisfacente le condizioni (1), (2), (3), (4), (5). Allora $H(\Pi_A)$ si può determinare, mediante l'applicazione ripetuta della legge di composizione Φ , a partire dalle misure di informazione dei singoli eventi $A_i (i=1, 2, \dots, n)$. Posto $p_i = e^{-J(A_i)/c}$ ($i=1, 2, \dots, n$) si ottiene, in base al risultato del teorema dimostrato nel paragrafo precedente

$$(19) \quad H(\Pi_A) = H_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = f^{-1} \left(\frac{\sum_1^n p_k f(-c \log p_k)}{\sum_1^n p_k} \right).$$

Si consideri un secondo esperimento

$$\Pi_B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}.$$

Si ponga

$$q_l = e^{-J(B_l)/c} \quad (l=1, 2, \dots, m),$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$$

$$P \cup Q = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m), \quad w(P) = \sum_1^n p_i, \quad w(Q) = \sum_1^m q_l.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, per cui è $w(P) + w(Q) \leq 1$, si ha

$$H(\Pi_A \cup \Pi_B) = H_{n+m}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m) = H_{n+m}(P \cup Q).$$

Infine, se Π_A e Π_B sono indipendenti, posto

$$P * Q = (p_1 q_1, \dots, p_1 q_m, \dots, p_n q_1, \dots, p_n q_m),$$

è

$$\begin{aligned} H(\Pi_A \cap \Pi_B) &= H_{nm}(A_1 \cap B_1, \dots, A_1 \cap B_m, \dots, A_n \cap B_1, \dots, A_n \cap B_m) = \\ &= H_{nm}(P * Q). \end{aligned}$$

È ora immediato riconoscere che H gode delle seguenti proprietà:

a_1) H_n è funzione simmetrica degli elementi di P ;

a_2) $H_1(A_1) = -c \log p_1$; dunque H_1 è funzione continua di p nell'intervallo $0 < p \leq 1$;

a_3) Se $w(P) + w(Q) \leq 1$ è

$$H_{n+m}(P \cup Q) = f^{-1} \left(\frac{w(P)H_n(P) + w(Q)H_m(Q)}{w(P) + w(Q)} \right)$$

a_4) $H_{nm}(P * Q) = H_n(P) + H_m(Q)$.

Le proprietà a_1) e a_3) si verificano immediatamente.

Per quanto riguarda a_4) si osservi che, in virtù della condizione (5) e del risultato del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, usando le notazioni ivi introdotte, si ha

$$(20) \quad f^{-1} \left(\frac{pf(u+w) + qf(v+w)}{p+q} \right) = f^{-1} \left(\frac{pf(u) + qf(v)}{p+q} \right) + w$$

$$\forall (p, q, u, v) \in R_+, w \geq 0.$$

Perciò, tenendo conto di (19), se si suppone

$$(21) \quad H_{m-1}(p_1q_1, p_1q_2, \dots, p_1q_{m-1}) = H_1(p_1) + H_{m-1}(q_1, q_2, \dots, q_{m-1})$$

si ottiene

$$(21') \quad H_m(p_1q_1, p_1q_2, \dots, p_1q_m) = f^{-1} \left(\frac{\sum_1^m p_1q_l f(-c \log p_1q_l)}{\sum_1^m p_1q_l} \right) =$$

$$= f^{-1} \left(\frac{\left(\sum_1^{m-1} q_l \right) f(H_{m-1}(q_1, \dots, q_{m-1}) - c \log p_1) + q_m f(-c \log p_1q_m)}{\left(\sum_1^{m-1} q_l \right) + q_m} \right) =$$

$$= H_1(p_1) + H_m(q_1, q_2, \dots, q_m).$$

Poichè (21) vale per $m=2$ rimane dimostrato che a_4) è valida per $n=1$ e m qualsiasi.

Si supponga ora

$$\begin{aligned} H_{(n-1)m}(p_1q_1, \dots, p_1q_m, \dots, p_{n-1}q_1, \dots, p_{n-1}q_m) = \\ = H_{n-1}(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) + H_m(q_1, q_2, \dots, q_m). \end{aligned}$$

È allora

$$\begin{aligned} H_{nm}(p_1q_1, \dots, p_1q_m, \dots, p_nq_1, \dots, p_nq_m) = \\ = f^{-1} \left(\frac{\sum_1^n \sum_1^m p_i q_l f(-c \log p_i q_l)}{\sum_1^n \sum_1^m p_i q_l} \right) = \\ = f^{-1} \left(\frac{(\sum_1^{n-1} p_i) f(H_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1}) + H_m(q_1, \dots, q_m)) + p_n f(-c \log p_n + H_m(q_1, \dots, q_m))}{(\sum_1^{n-1} p_i) + p_n} \right) = \\ = H_n(p_1, \dots, p_n) + H_m(q_1, \dots, q_m). \end{aligned}$$

Si è così riconosciuto che a_4) è vera per n ed m qualsiasi.

Basta ora confrontare le proprietà a_1), a_2), a_3), a_4) con le ipotesi del lavoro di Daróczy [7] per ottenere il risultato enunciato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FORTE, B.: *Measures of information: the general axiomatic theory*, R.I.R.O., 3, R-2 (1969), 63-90.
- [2] FORTE, B. - BENVENUTI, P.: *Su una classe di misure di informazione regolari a traccia shannoniana*, Atti del Sem. Mat. e Fis. Univ. di Modena, vol. XVIII, fasc. I (1969), 99-108.
- [3] FORTE, B.: *On a system of functional equations in information theory*, Aequationes Mathematicae, in corso di stampa.
- [4] FORTE, B. - DARÓCZY, L.: *Sopra un sistema di equazioni funzionali nella teoria dell'informazione*, Ann. Univ. di Ferrara, VII, vol. XIII, n. 6 (1968).

- [5] BENVENUTI, P.: *Sulle misure di informazione compositive a traccia universale*, Rendiconti di Matematica, VI, 2, 3-4 (1969), 481-504.
- [6] ACZEL, J.: *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York and London (1966).
- [7] DARÓCZY, Z.: *Über die gemeinsame Charakterisierung der zu nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von R enyi*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 381-388 (1963).

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 settembre 1970.