RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO ZOLEZZI

Teoremi d'esistenza per problemi di controllo ottimo retti da equazioni ellittiche o paraboliche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 155-173

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__155_0>

TEOREMI D'ESISTENZA PER PROBLEMI DI CONTROLLO OTTIMO RETTI DA EQUAZIONI ELLITTICHE O PARABOLICHE

TULLIO ZOLEZZI *)

SUMMARY. I prove that some infinite-dimensional control problems (which include some stochastic optimization problems in the sense of Fleming (see [12])), have optimal solutions, if the coefficients of the gradient of the « state » (which is solution of a given boundary-value problem for linear divergence-form parabolic, or elliptic, equations) belong to a weakly sequentially closed and compact set in L^∞; for the more particular problems with control in the coefficients in the form of composite function, the existence is proved for problems with only maximum order terms and time-independent controls (without any extra assumption of compactness) if the coefficients map the compact « control region » onto their maximal range, and (in both cases) if some conditions hold assuring existence, uniqueness of the states, and (semi) continuity of the functional to be minimized (therefore, the second order terms depending on the control, these results extend the known ones). Better results are obtained if the space variable is one-dimensional.

Introduzione.

Nel presente lavoro si provano teoremi d'esistenza per problemi di controllo ottimo nei quali gli « stati » sono soluzioni di dati problemi al contorno per equazioni lineari paraboliche od ellittiche in forma variazionale. Nel caso parabolico, uno dei problemi che qui vengono studiati (v. teorema 3) contiene quello dell'esistenza del minimo per certi problemi stocastici di controllo (v. [12]: rimando a tale lavoro, ed a quelli di Fleming citati nella relativa bibliografia, per ciò che concerne

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, via L. B. Alberti 4, 16132 Genova (Italia).

Lavoro eseguito nell'ambito del contratto di ricerca n. 13 del comitato per la matematica del C.N.R.

l'interpretazione probabilistica di tali questioni di controllo « ad infinite dimensioni », e per l'opportunità di studiarle quando le equazioni a derivate parziali, che le descrivono, abbiano coefficienti discontinui). Un teorema d'esistenza in tale caso è dimostrato in [10] (teorema 3): se i controlli compaiono però nei coefficienti dei termini del secondo ordine, il problema era aperto (v. anche [11], p. 257, e [17]). Un confronto tra i risultati del presente lavoro ed alcuni già noti è effettuato nella nota 3.

Notazioni.

R^m indica lo spazio euclideo reale ad m dimensioni. Se E è misurabile in R^m secondo Lebesgue, e se μ è una data misura non negativa su E, $L^p(E, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ indica il corrispondente usuale spazio di Lebesgue, abbreviato in $L^p(E)$ se μ è la misura di Lebesgue (il cui valore in F è indicato con mis F). « q.o. » significa « quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue ». « $\equiv$ » significa « uguale per definizione ». Se E è misurabile in R^m secondo Lebesgue, se $S \subset R^n$ (non vuoto), una funzione $f : E \times S \to R^p$ si dice « di Carathéodory in $E \times S$ » se (1) $x \to f(x, y)$ è misurabile in E per ogni $y \in S$; (2) $y \to f(x, y)$ è continua in S, q.o. in E. Se X è uno spazio di Banach e se $T > 0$, $L^p(X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ indica lo spazio di Banach delle funzioni (modulo le funzioni nulle q.o.) $f : (0, T) \to X$, tali che $t \to \| f(t) \|^{p-1} f(t)$ è integrabile secondo Bochner rispetto alla misura di Lebesgue in $(0, T)$ con la norma $(\int_0^T \| f(t) \|^p dt)^{1/p}$, se p è reale, delle funzioni misurabili ed essenzialmente limitate in $(0, T)$ con la norma $\operatorname{ess.\,sup.}_{0 \leq t \leq T} \| f(t) \|$, se $p = \infty$. Se $X \equiv L^q(F)$, si abbrevia $L^p(L^q(F))$ con $L^{q,p}(F)$. $\to$ $(\rightharpoonup)$ indica la convergenza forte (debole) in ogni spazio di Banach X considerato, il cui duale è indicato con X^*. Se Ω è aperto limitato in R^m, $T > 0$, $Q \equiv (0, T] \times \Omega$, $C_0^1(Q)$ indica la classe delle funzioni reali derivabili con continuità fino al primo ordine in Q e con supporto compatto contenuto nell'interno di Q. $H_0^1(\Omega)$ indica il completamento di $C_0^1(\Omega)$ nella norma $\| u \| \equiv \| u \|_{L^2(\Omega)} + \| u_x \|_{L^2(\Omega)}$, u_x indicando il gradiente di u in Ω. $C^0(Q)$ indica le funzioni continue in Q, $C_0^0(Q)$ quelle a supporto compatto, $\overline{Q}$ la chiusura di Q. Se E, S, G, $T \subset S$ sono insiemi non vuoti, e se

$f: E \times S \to G$, allora $f(x, T) \equiv \{f(x, y) : y \in T\}$. Le estratte da una successione sono indicate con la notazione della successione originale. Se X è uno spazio di Banach, $\rightharpoonup$ indica la X-convergenza in X^*.

Risultati.

Studiamo dapprima un problema generale di ottimizzazione, nel caso parabolico (teorema 1) ed in quello ellittico (teorema 2).

TEOREMA 1. Siano dati: Ω aperto limitato connesso in R^m, $T>0$, $0<\bar{t}$, $t_0 \leqslant T$, $\bar{x} \in \Omega$, $z_0 \in L^2(\Omega)$. Siano

$$Q \equiv \Omega \times (0, T], \; y \equiv (x, t) \in Q, \; A \equiv$$
$$\equiv (a_{11}, \ldots, a_{mm}, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c, f_1, \ldots, f_m, g),$$

sia

$$L(A) \equiv \partial/\partial t - \sum_{i,k=1}^{m} \partial/\partial x_k [a_{ik}(y) \partial/\partial x_i + a_k(y)] - \sum_{k=1}^{m} b_k(y) \partial/\partial x_k - c(y).$$

Sia $z(A)$ la soluzione, nel senso di [1], del problema

$$\begin{cases} L(A) z(A) = \sum_{k=1}^{m} \partial/\partial x_k f_k(y) + g(y) \text{ in } Q, \\ z(A)(x, 0) = z_0(x) \text{ in } \Omega, \; z(A)(x, t) = 0 \text{ in } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Sia data la funzione reale

$$A \to G(A) \equiv F(z(A)(\bar{x}, \bar{t}), \int_\Omega H_1(x, z(A)(x, t_0)) dx, \int_Q H_2(y, z(A)(y)) dy).$$

Allora G ha minimo assoluto in ogni classe U di vettori A verificante, con i dati, le seguenti ipotesi:

(1) $M|\lambda|^2 \geqslant \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(y) \lambda_i \lambda_k \geqslant \alpha |\lambda|^2$ per qualche $M, \alpha > 0$, per ogni $\lambda \in R^m$,

q.o. in Q e per ogni elemento di U;

esistano p, q con $2<p$, $q \leqslant \infty$ ed $m/2p + 1/q < 1/2$, esista $D \in L^{p,q}(\Omega)$ tali che $|d(y)| \leqslant D(y)$ q.o. in Q, per ogni $d \in \{a_k, f_h : k, h = 1, \ldots, m\}$, per ogni elemento di U; esistano p', q', con $1 < p'$, $q' \leqslant \infty$ ed $m/2p' + 1/q' < 1$, esista $D' \in L^{p',q'}(\Omega)$ tali che se $d' \in \{c, g\}$, per ogni elemento di U sia $|d'(y)| \leqslant D'(y)$ q.o. in Q;

(2) $\{a_{ik} : A \in U\}$, $\{b_j : A \in U\}$ siano debolmente sequenzialmente chiusi e compatti in $L^\infty(Q)$ per ogni i, k, $j = 1, \ldots, m$;

$\{a_k : A \in U\}$, $\{f_k : A \in U\}$, $\{c : A \in U\}$, $\{g : A \in U\}$ siano debolmente chiusi in $L^{p,q}(\Omega)$, o in $L^{p',q'}(\Omega)$, rispettivamente, per ogni $k = 1, \ldots, m$;

(3) H_1, H_2 siano funzioni di Carathéodory in $\Omega \times R^1$ e $Q \times R^1$ rispettivamente; esistano $h_1 \in L^1(\Omega)$, $h_2 \in L^1(Q)$ tali che $|H_1(x, v)| \leqslant h_1(x)$ q.o. in Ω, $|H_2(y, v)| \leqslant h_2(y)$ q.o. in Q, per ogni $v \in R^1$;

$F : R^3 \to R^1$ sia semicontinua inferiormente.

DIMOSTRAZIONE. La tesi ha senso, infatti per ogni $A \in U$ la (1) (e la limitatezza in $L^\infty(Q)$ di $\{b_j : A \in U\}$, $j = 1, \ldots, m$, assicurata dalla (2)) garantiscono esistenza ed unicità di $z(A)$ (teorema 1, pag. 634, di [1]), inoltre per la (3) si ha $G(A) \in R^1$ per ogni $A \in U$. Sia $\{A_n\} \equiv \{(a_{11n}, \ldots, g_n)\}$ una successione in U minimizzante per G. Da [1] si ha che

(*) $z(A_n) \in C^0(Q) \cap L^\infty(L^2(\Omega)) \cap L^2(H_0^1(\Omega))$ per ogni n;

(**) per ogni $\varphi \in C_0^1(Q)$ risulta

$$\int_Q \Big[-z(A_n)\varphi_t + \sum_{i,k=1}^m a_{ikn} z(A_n)_{x_i} \varphi_{x_k} + \sum_{k=1}^m a_{kn} z(A_n) \varphi_{x_k} - \sum_{k=1}^m b_{kn} z(A_n)_{x_k} \varphi - c_n z(A_n) \varphi \Big] dy = \int_Q \Big(g_n \varphi - \sum_{k=1}^m f_{kn} \varphi_{x_k} \Big) dy,$$

per ogni n;

(***) per ogni $\psi \in C_0^1(\Omega)$ risulta

$$\lim_{t \mapsto 0+} \int_\Omega z(A_n)(x, t) \psi(x) dx = \int_\Omega z_0(x) \psi(x) dx,$$

per ogni n.

Da risultati di [2] e relative dimostrazioni si ottiene che $\{z(A_n)\}$ è equicontinua in ogni compatto di Q, e che $\sup\limits_{n} |z(A_n)(y)| < +\infty$ per ogni $y \in Q$. Pertanto, per un'estratta, si ha che esiste $\bar{z} \in C^0(Q)$ tale che $z(A_n)(y) \to \bar{z}(y)$ uniformemente sui compatti di Q. Dall'esame della dimostrazione della formula (3.3) di pag. 635 di [1] si ha che

$$\sup_{n} (\| z(A_n) \|^2_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \| z(A_n)_x \|^2_{L^2(L^2(\Omega))}) < +\infty .$$

Pertanto, dalla (*), dalla riflessività di $L^2(H_0^1(\Omega))$ (v. [7]) e dal lemma 3, pag. 633, di [1], si ricava che

(i) $\bar{z} \in L^\infty(L^2(\Omega)) \cap L^2(H_0^1(\Omega))$,

e che, per un'estratta,

(ii) $z(A_n)(y) \to \bar{z}(y)$ uniformemente sui compatti di Q, ed inoltre $z(A_n) \rightharpoonup \bar{z}$ in $L^2(H_0^1(\Omega))$.

Per la (1) e la (2) (v. [7]) si ha che esiste $\bar{A} \equiv (\bar{a}_{11}, \ldots, \bar{a}_{mm}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m, \bar{c}, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m, \bar{g}) \in U$, tale che, per un'estratta, $a_{ikn} \rightharpoonup \bar{a}_{ik}$ e $b_{kn} \rightharpoonup \bar{b}_k$ in $L^\infty(Q)$ per ogni $i, k = 1, \ldots, m$; inoltre $a_{kn} \rightharpoonup \bar{a}_k$, $c_n \rightharpoonup \bar{c}$, $f_{kn} \rightharpoonup \bar{f}_k$, $g_n \rightharpoonup \bar{g}$ (per ogni $k = 1, \ldots, m$) in $L^{p,q}(\Omega)$ o in $L^{p',q'}(\Omega)$: infatti sia P l'insieme di Lebesgue, privato degli eventuali punti in ∂Q, del vettore $(\bar{a}_{11}, \ldots, \bar{a}_{mm})$. Allora se $y \in P$, per ogni $i, k = 1, \ldots, m$ risulta $\lim\limits_{\text{mis}\, S \to 0} (1/\text{mis}\, S) \int_S \bar{a}_{ik}(e)de = \bar{a}_{ik}(y)$, ove S indica una sfera di centro y, con $S \subset Q$. Dato che

$$\alpha |\lambda|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{m} a_{ikn}(e)\lambda_i\lambda_k \leqslant M |\lambda|^2$$

q.o. in S, per ogni n, λ ed S, si ha che

$$\alpha |\lambda|^2 \leqslant (1/\text{mis}\, S) \int_S \sum_{i,k=1}^{m} a_{ikn}(e)\lambda_i\lambda_k de \leqslant M |\lambda|^2$$

per gli stessi n, λ ed S, e, al limite per $n \to \infty$,

$$\alpha |\lambda|^2 \leqslant (1/\text{mis}\, S) \int_S \sum_{i,k=1}^{m} \bar{a}_{ik}(e)\lambda_i\lambda_k de \leqslant M |\lambda|^2$$

per gli stessi λ ed S; al limite per mis $S \to 0$ si ha

$$\alpha\,|\lambda|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{m} \bar{a}_{ik}(y)\lambda_i\lambda_k \leqslant M\,|\lambda|^2$$

per gli stessi λ, e per ogni $y \in P$, cioè q.o. in Q. Dato che $L^{p,q}(\Omega) \subset L^r(Q)$ con inclusione continua, essendo r il minimo tra p e q, è infine evidente che le rimanenti componenti di $\bar{A}$ verificano la (1). Pertanto, usando la (ii), è chiaro che

$$\text{(iii)} \int_Q \Big[-z(A_n)\varphi_t + \sum_{k=1}^{m} a_{kn} z(A_n)\varphi_{x_k} - c_n z(A_n)\varphi - g_n\varphi + \sum_{k=1}^{m} f_{kn}\varphi_{x_k}\Big] dy \to$$

$$\to \int_Q \Big[-\bar{z}\varphi_t + \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k \bar{z}\varphi_{x_k} - \bar{c}\bar{z}\varphi - \bar{g}\varphi + \sum_{k=1}^{m} \bar{f}_k\varphi_{x_k}\Big] dy,$$

per ogni $\varphi \in C_0^1(Q)$.

Proviamo ora che

(iv) $\bar{z} = z(\bar{A})$.

Dati $i, k \in \{1, \ldots, m\}$, essendo, per un'estratta, $a_{ikn} \rightharpoonup \bar{a}_{ik}$ in $L^\infty(Q)$, si ha, dai risultati di [5], in particolare dal teorema 1 e dalla proposizione 2, che

$$\int_Q a_{ikn} z(A_n)_{x_i}\varphi_{x_k} dy \to \int_Q \bar{a}_{ik}\bar{z}_{x_i}\varphi_{x_k} dx$$

per ogni $\varphi \in C_0^1(Q)$: infatti se h_n è la funzione $a \to \int_Q a z(A_n)_{x_i}\varphi_{x_k} dy$, $a \in L^\infty(Q)$, si ha che $h_n \in L^\infty(Q)^*$ per ogni n, inoltre per la (ii) $z(A_n)_x \rightharpoonup \bar{z}_x$ in $L^{2,2}(\Omega)$, quindi posto $\bar{h}(a) \equiv \int_Q a\bar{z}_{x_i}\varphi_{x_k} dy$, $a \in L^\infty(Q)$, si ha che $h_n \rightharpoonup \bar{h}$ in $L^\infty(Q)^*$, essendo continua l'identità tra $L^\infty(Q)$ ed $L^{2,2}(\Omega)$; analogamente si ottiene

$$\int_Q \sum_{k=1}^{m} b_{kn} z(A_n)_{x_k}\varphi dy \to \int_Q \sum_{k=1}^{m} \bar{b}_k z_{x_k}\varphi dy,$$

sempre utilizzando la (2). Mostriamo ora che $\bar{z}$ verifica le condizioni al contorno del tipo (*), (***). La (*) è già stata provata nella (i). Per ogni $t \in (0, T]$ e per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega \times (0, t]})$ con supporto compatto in Ω si ha (v. [1], pag. 622, formula (2.2)) che

$$\int_\Omega z(A_n)(x, t)\varphi(x, t)dx + \int_{\Omega\times(0,t]} [-z(A_n)\varphi_t +$$
$$+ \sum_{i,k=1}^m a_{ikn} z(A_n)_{x_i}\varphi_{x_k} + \sum_{k=1}^m a_{kn} z(A_n)\varphi_{x_k} - g_n\varphi +$$
$$+ \sum_{k=1}^m f_{kn}\varphi_{x_k} - \sum_{k=1}^m b_{kn} z(A_n)_{xk}\varphi - c_n z(A_n)\varphi]dy = \int_\Omega z_0(x)\varphi(x, 0)dx,$$

per ogni n. Allora per ogni $\psi \in C_0^1(\Omega)$ e per gli stessi n e t si ottiene

$$\int_\Omega z(A_n)(x, t)\psi(x)dx + \int_0^t \int_\Omega [\sum_{i,k=1}^m a_{ikn} z(A_n)_{x_i}\psi_{x_k} + \ldots -$$
$$- c_n(x, s)z(A_n)(x, s)\psi(x)]dx\, ds = \int_\Omega z_0(x)\psi(x)dx.$$

Dalla convergenza sopra dimostrata segue che

$$\int_\Omega \bar{z}(x, t)\psi(x)dx + \int_0^t \int_\Omega [\sum_{i,k=1}^m \bar{a}_{ik}\bar{z}_{x_i}\psi_{x_k} + \ldots -$$
$$- \bar{c}(x, s)\bar{z}(x, s)\psi(x)]dx\, ds = \int_\Omega z_0(x)\psi(x)dx$$

per gli stessi t e ψ: si conclude allora che

$$\lim_{t\to 0+} \int_\Omega \bar{z}(x, t)\psi(x)dx = \int_\Omega z_0(x)\psi(x)dx$$

per ogni $\psi \in C_0^1(\Omega)$ (cioè « $\bar{z}(x, 0) = z_0(x)$ in Ω »). Pertanto la (iv) è provata. Dalla (ii) e dalla (3) si ricava che $z(A_n)(\bar{x}, \bar{t}) \to \bar{z}(\bar{x}, \bar{t})$,

$$\int_\Omega H_1(x, z(A_n)(x, t_0))dx \to \int_\Omega H_1(x, \bar{z}(x, t_0))dx,$$

$$\int_Q H_2(y, z(A_n)(y))dy \to \int_Q H_2(y, \bar{z}(y))dy.$$

Ciò prova che $\bar{A}$ è minimizzante, c.v.d.

Teorema 2. Siano dati: Ω aperto in R^m, $\Omega_0 \supset \Omega$, Ω_0 aperto limitato in R^m, $z_0 \in H^1(\Omega_0)$, $\bar{x} \in \Omega$. Siano

$$A \equiv (a_{11}, \ldots, a_{mm}, d_1, \ldots, d_m, b_1, \ldots, b_m, c, f_1, \ldots, f_m),$$

$$L(A) \equiv -\sum_{i,k=1}^{m} \partial/\partial x_k[a_{ik}(x)\partial/\partial x_i + d_k(x)] + \sum_{k=1}^{m} b_i(x)\partial/\partial x_i + c(x).$$

Sia $z(A)$ la soluzione, nel senso di [9], del problema

$$\begin{cases} L(A)z(A) = -\sum_{k=1}^{m} \partial f_k/\partial x_k \text{ in } \Omega, \\ z(A) = z_0 \text{ in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sia data la funzione reale

$$A \to G(A) \equiv F(z(A)(\bar{x}), \int_\Omega H(x, z(A)(x))dx).$$

Allora G ha minimo assoluto in ogni classe U di vettori A verificante, con i dati, le seguenti ipotesi:

(1) $M|\lambda|^2 \geqslant \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\lambda_i\lambda_k \geqslant \alpha|\lambda|^2$ per qualche M, $\alpha > 0$, per ogni $\lambda \in R^m$, q.o. in Ω e per ogni elemento di U;

esistano $r > m$, $D \in L^r(\Omega)$, $D' \in L^{r/2}(\Omega)$ con norma abbastanza piccola (v. [9]), tali che per ogni elemento di U sia

$$| d_k(x) | \leqslant D(x), \ | f_k(x) | \leqslant D(x) | , | c(x) | \leqslant D'(x),$$

q.o. in Ω, e per ogni $k=1, \ldots, m$;

(2) $\{a_{ik} : A \in U\}$, $\{b_j : A \in U\}$ siano debolmente sequenzialmente chiusi e compatti in $L^\infty(\Omega)$ per ogni $i, k, j=1, \ldots, m$;

$\{d_k : A \in U\}$, $\{f_k : A \in U\}$, $\{c : A \in U\}$ siano debolmente chiusi in $L^r(\Omega)$, o in $L^{r/2}(\Omega)$ rispettivamente, per ogni $k=1, \ldots, m$;

(3) H sia una funzione di Carathéodory in $\Omega \times R^1$;

esista $h \in L^1(\Omega)$ tale che $|H(x, u)| \leqslant h(x)$ q.o. in Ω per ogni $u \in R^1$; $F : R^2 \to R^1$ sia semicontinua inferiormente.

Dimostrazione. La (1) (e la limitatezza in $L^\infty(\Omega)$ di $\{b_j : A \in U\}$, $j=1, \ldots, m$, assicurata dalla (2)) garantisce esistenza ed unicità di $z(A)$ per ogni $A \in U$ (v. [9]), ed inoltre, per la (3), $G(A) \in R^1$ per ogni $A \in U$. Sia $\{A_n\}$ una successione minimizzante per G in U. Da [9] si ha che $z(A_n) \in C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ per ogni n. Da risultati di [9] e [4] e dall'esame delle relative dimostrazioni si ha che $\{z(A_n)\}$ è equicontinua su ogni compatto di Ω, che $\sup_n | z(A_n)(x) | < +\infty$ per ogni $x \in \Omega$, e che $\sup_n \| z(A_n) \|_{H^1(\Omega)} < +\infty$. Quindi esiste $\bar{z} \in C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ tale che, per un'estratta, $z(A_n)(x) \to \bar{z}(x)$ uniformemente sui compatti di Ω, e $z(A_n) \rightharpoonup \bar{z}$ in $H^1(\Omega)$. In modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 1, si prova che esiste $\bar{A} \in U$ tale che $\bar{z} = z(\bar{A})$, e che $\bar{A}$ è minimizzante, c.v.d.

Nota 1. Il teorema 1 si applica anche al problema di minimizzare funzionali dipendenti da $z(A)_x$, per esempio della forma $A \to \int_Q H_0(y, z(A)(y), z(A)_x(y))dy$: in questo caso si può supporre, in più rispetto alle ipotesi del teorema 1 ed al posto della (3), che $H_0(y, p, q)$ verifichi opportune ipotesi di convessità in q, semicontinuità inferiore in p, ed una maggiorazione del tipo $| H_0(y, p, q) | \leqslant f_0(y)$ per qualche $f_0 \in L^1(Q)$. Il teorema 1 si applica inoltre a problemi descritti da certe classi di equazioni quasi lineari, con qualche adattamento: si possono, per esempio, considerare operatori

$$L(A) \equiv z_t - \sum_{i,k=1}^{m} \partial/\partial x_k [a_{ik}(y) z_{x_i} + a_k(y, z)] - \sum_{k=1}^{m} b_k(y) z_{x_k} - c(y, z),$$

in ipotesi analoghe a quelle di [2] sui coefficienti di $L(A)$. Analoghe osservazioni valgono per il teorema 2.

I teoremi seguenti concernono il più particolare problema in cui i coefficienti delle equazioni paraboliche (teorema 3) o ellittiche (teorema 4) dipendono dal controllo come funzioni composte: questi problemi sono un caso particolare di quelli trattati nei teoremi 1 e 2, contengono certi problemi stocastici di ottimizzazione, ma non soddisfano, in generale, le ipotesi di compattezza che si sono richieste nei precedenti enunciati (v. nota 2).

Teorema 3. Siano: Ω aperto limitato connesso in R^m, $x_0 \in \Omega$, $T > 0$, K non vuoto e compatto in R^s,

$$0 < t_0, \ \bar{t} \leq T, \ z_0 \in H_0^1(\Omega), \ Q \equiv \Omega \times (0, T], \ U \equiv$$
$$\equiv \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \in K \text{ q.o. in } \Omega\}.$$

Sia $z(u)$, per ogni $u \in U$, la soluzione, nel senso di [1], del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} z(u)_t = \sum_{i,k=1}^{m} \partial/\partial x_i [a_{ik}(x, u(x)) z(u)_{x_k}] \text{ in } Q, \\ z(u)(x, 0) = z_0(x) \text{ in } \Omega, \ z(u)(x, t) = 0 \text{ in } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Allora la funzione reale

$$u \to G(u) \equiv F(z(u)(x_0, t_0), \quad \int_\Omega h_1(x, z(u)(x, \bar{t}))dx,$$
$$\int_Q h_2(y, z(u)(y), z(u)_x(y))dy)$$

ha minimo assoluto in U se si suppone che

(1) $a_{ik} = a_{ki}$ siano di Carathéodory in $\Omega \times K$ per ogni i, k;

esistano costanti $\alpha > 0$, ω, tali che per ogni $\lambda \in R^m$, $u \in K$, e q.o. in Ω risulti

$$\alpha\,|\lambda|^2 \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}(x,\ u)\lambda_i\lambda_k \leqslant \omega\,|\lambda|^2\,;$$

(2) indicato con $A(x,\ u)$ il vettore $(a_{11}(x,\ u),\ \ldots,\ a_{mm}(x,\ u))$ degli elementi $a_{ik}(x,\ u)$ con $i\leqslant k$, e posto $P\equiv I_{11}\times\ldots\times I_{mm}$, dove $I_{kk}\equiv\equiv[\alpha,\ \omega]$, ed $I_{ik}\equiv[(\alpha-\omega)/2,\ (\omega-\alpha)/2]$ se $i<k$, risulti $A(x,\ K)=P$ q.o. in Ω;

(3) h_1 sia di Carathéodory in $\Omega\times R^1$;

esista $H_1\in L^1(\Omega)$ tale che $|h_1(x,\ v)|\leqslant H_1(x)$ per ogni v e q.o. in Ω; $h_2(y,\ z,\ p)$ sia continua con $\partial h_2/\partial p_k$, $k=1,\ \ldots,\ m$, in $Q\times R^1\times R^m$, sia convessa in p per ogni $(y,\ z)$, ed esistano $H_2\in L^1(Q)$, $b\in R^1$ tali che

$$0\leqslant h_2(y,\ z,\ p)\leqslant H_2(y)+b(|z|^2+|p|^2)$$

q.o. in Q e per ogni $z,\ p$;
$F:R^3\to R^1$ sia semicontinua inferiormente, ed $F(a,\ b,\ c)\leqslant F(a,\ b,\ c')$ se $c\leqslant c'$ per ogni a e b.

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema 1, p. 634, di [1] (applicabile per la (1)), e dalla (3) segue che $G(u)\in R^1$ per ogni $u\in U$. Sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante per G in U. Allora, per ogni n, e per ogni $\varphi\in C_0^1(Q)$, e $\psi\in C_0^1(\Omega)$, si ha, ponendo $a_{ik}(u)\equiv a_{ik}(\cdot,\ u(\cdot))$,

$$\begin{cases} \int_Q [-z(u_n)\varphi_t+\sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}(u_n)z(u_n)_{x_i}\varphi_{x_k}dy=0; \\ \\ \lim_{t\to 0+}\int_\Omega z(u_n)(x,\ t)\psi(x)dx=\int_\Omega z_0(x)\psi(x)dx. \end{cases}$$

Inoltre, per risultati di [1], di [2] e relative dimostrazioni, si ha che per ogni n

$$z(u_n)\in L^\infty(L^2(\Omega))\cap L^2(H_0^1(\Omega))\cap C^0(Q),$$

che per ogni $y\in Q$ $\sup_n|z(u_n)(y)|<+\infty$, che $\{z(u_n)\}$ è equicontinua sui compatti di Q, e che $\sup_n\|z(u_n)_x\|_{L^{2,\,2}(\Omega)}<+\infty$; pertanto esiste

$$z\in L^\infty(L^2(\Omega))\cap L^2(H_0^1(\Omega))\cap C^0(Q)$$

tale che, per un'estratta (v. anche [7]),

(i) $z(u_n)(y) \to z(y)$ uniformemente sui compatti di Q, e

$z(u_n) \rightharpoonup z(u)$ in $L^2(H_0^1(\Omega))$.

Sia z_n la soluzione (nel senso di [15]) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \int_\Omega z_{nt}\psi dx + \sum_{i,k=1}^m \int_\Omega a_{ik}(u_n) z_{nx_i}\psi_{x_k} dx = 0 \text{ per ogni } \psi \in C_0^1(\Omega) \\ \text{e per ogni } t > 0; \\ \lim_{t\to 0+} \| z_n(\cdot,\ t) - z_0(\cdot) \|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \end{cases}$$

per ogni n. Da risultati di [15], esistono

$$z^* \in C^0([0,\ +\infty],\ H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty([0,\ +\infty),\ L^2(\Omega)),\ b_{ik} \in L^\infty(\Omega)$$

con $b_{ik} = b_{ki}$ per ogni i e k, tali che

$$\alpha \,|\, \lambda \,|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^m b_{ik}(x)\lambda_i\lambda_k \leqslant \omega \,|\, \lambda \,|^2$$

per ogni $\lambda \in R^m$, q.o. in Ω, tali che $z_n(y) \to z^*(y)$ uniformemente sui compatti di $\Omega \times (0,\ +\infty)$, e

$$\begin{cases} \int_\Omega z^*_t \psi dx + \sum_{i,k=1}^m \int_\Omega b_{ik} z^*_{x_i} \psi_{x_k} dx = 0 \text{ per ogni } \psi \in C_0^1(\Omega), \\ \text{e per ogni } t > 0; \\ \lim_{t\to 0+} \| z^*(\cdot,\ t) - z_0(\cdot) \|_{H_0^1(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Allora se $\varphi \in C_0^1(Q)$, $\varphi(\cdot,\ t) \in C_0^1(\Omega)$ per ogni $t \in (0,\ T]$, per cui

$$\int_\Omega z^*_t(x,\ t)\varphi(x,\ t)dx + \sum_{i,k=1}^m \int_\Omega b_{ik}(x) z^*_{x_i}(x,\ t)\varphi_{x_k}(x,\ t)dx = 0$$

per ogni $t > 0$. Allora

$$\int_Q z^*{}_t\varphi dy + \sum_{i,\,k=1}^{m} \int_Q b_{ik} z^*_{x_i} \varphi_{x_k} dy = 0$$

per ogni $\varphi \in C_0^1(Q)$. Integrando per parti si trova che (v. [15])

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Q \Big(-z^*\varphi_t + \sum_{i,\,k=1}^{u} b_{ik} z^*_{x_i} \varphi_{x_k}\Big) dy = 0 \text{ per ogni } \varphi \in C_0^1(Q); \\ \displaystyle\lim_{t\to 0+} \| z^*(\cdot,\, t) - z_0(\cdot) \|_{H_0^1(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Analogamente, per ogni n, $z_n \in C^0([0, +\infty), H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty([0, +\infty), L^2(\Omega))$, e

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Q \Big[-z_n\varphi_t + \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}(u_n) z_{nx_i} \varphi_{x_k}\Big] dx = 0 \text{ per ogni } \varphi \in C_0^1(\Omega); \\ \displaystyle\lim_{t\to 0+} \| z_n(\cdot,\, t) - z_0(\cdot) \|_{H_0^1(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Sia $\bar{z}$ la restrizione di z^* a Q, sia $\bar{z}_n$ la restrizione di z_n a Q, per ogni n. Allora

$$\lim_{t\to 0+} \int_\Omega \bar{z}_n(x,\, t)\psi(x) dx = \int_\Omega z_0(x)\psi(x) dx$$

per ogni n e per ogni $\psi \in C_0^1(\Omega)$. Pertanto, dal teorema 1, pag. 634, di [1], $z(u_n) = \bar{z}_n$ per ogni n. Allora, dalla (i), deve essere $z = \bar{z}$. Pertanto

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big(-z\varphi_t + \sum_{i,\,k=1}^{m} b_{ik} z_{x_i} \varphi_{x_k}\Big) dy = 0 \text{ per ogni } \varphi \in C_0^1(Q); \\ \displaystyle\lim_{t\to 0+} \int_\Omega z(x,\, t)\psi(x) dx = \int_\Omega z_0(x)\psi(x) dx \text{ per ogni } \psi \in C_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Sia L la classe delle matrici (c_{ik}) reali simmetriche $m \times m$, tali che per ogni $\lambda \in R^m$ si abbia

$$\alpha \,|\, \lambda \,|^2 \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{m} c_{ik}\lambda_i\lambda_k \leqslant \omega \,|\, \lambda \,|^2.$$

L abbia la topologia indotta dalla norma $\| (c_{ik}) \| = \max_{i,\,k} | c_{ik} |$; allora L è convesso, e pertanto connesso. Fissati comunque r ed s in $\{1, ..., m\}$, la funzione che ad ogni $(c_{ik}) \in L$ associa c_{rs} è continua, pertanto $L_{rs} \equiv \{c_{rs} : (c_{ik}) \in L\}$ è un intervallo. È chiaro che L è chiuso: inoltre è limitato, infatti scegliendo $\lambda \equiv (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (tutti gli elementi nulli tranne l'essesimo), si trova che $L_{ss} \subset [\alpha, \omega]$; scegliendo, per $r \neq s$, $\lambda \equiv (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (tutti gli elementi nulli tranne l'essesimo e l'erresimo), si trova che $L_{rs} \subset (\alpha - \omega, \omega - \alpha)$. Allora L_{rs} è un intervallo compatto per ogni r, s. D'altra parte è evidente che $L_{rr} = [\alpha, \omega]$ per ogni r; e considerando il caso $m = 2$, si vede con calcoli elementari che se $r \neq s$, allora $L_{rs} = [(\alpha - \omega)/2, (\omega - \alpha)/2]$. Quindi la (2) ha senso, e permette di affermare che $b(x) \equiv (b_{11}(x), ..., b_{mm}(x)) \in A(x, K)$ q.o. in Ω. Per la (1) $A(x, K)$ è compatto q.o. in Ω: dal corollario 5.1'. di [8] segue dunque che esiste $u_0 \in U$ tale che $b_{ik}(x) = a_{ik}(x, u_0(x))$ q.o. in Ω e per ogni i, k. Allora $z = z(u_0)$. Dalla (i) si ha che

$$z(u_n)(x_0\,,\ t_0) \to z(u_0)(x_0\,,\ t_0).$$

Dalla (3) segue che

$$\int_\Omega h_1(x,\ z(u_n)(x,\ \bar{t}))dx \to \int_\Omega h_1(x,\ z(u_0)(x,\ \bar{t}))dx:$$

infatti dato $\varepsilon > 0$ sia $H \subset \Omega$, H compatto, tale che $\int_{\Omega - H} H_1(x)dx < \varepsilon$: allora

$$\left| \int_\Omega [h_1(x,\ z(u_n)(x,\ \bar{t})) - h_1(x,\ z(u_0)(x,\ \bar{t}))]dx \right| \leqslant 2\varepsilon +$$
$$+ \left| \int_H [h_1(x,\ z(u_n)(x,\ \bar{t})) - h_1(x,\ z(u_0)(x,\ \bar{t}))]dx \right|,$$

per la (3), e la conclusione è immediata, tenendo conto della (i). Proviamo ora che

(ii) $$\liminf \int_Q h_2(y, z(u_n)(y), z(u_n)_x(y))dy \geqslant \int_Q h_2(y, z(u_0)(y), z(u_0)_x(y))dy.$$

Per ogni $t \in (0, T]$, per ogni $\psi \in C_0^1(\Omega)$, per ogni $i \in \{1, ..., m\}$ risulta

$$\int_\Omega z(u_n)_{x_i}(x, t)\psi(x)dx \to \int_\Omega z(u_0)_{x_i}(x, t)\psi(x)dx,$$

per [15] e la (i) (basta integrare per parti). Allora per ogni $t \in (0, T]$ si ha che $z(u_n)_x(\cdot, t) \rightharpoonup z(u_0)_x(\cdot, t)$ in $L^2(\Omega)$, dunque $z(u_n)(\cdot, t) \rightharpoonup z(u_0)(\cdot, t)$ in $H^{1,1}(\Omega)$. Da un teorema di semicontinuità di Serrin (v. [14], teorema 1.8.2), per la (3) si trova che, per ogni $t \in (0, T]$,

$$\liminf \int_\Omega h_2(x, t, z(u_n)(x, t), z(u_n)_x(x, t))dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega h_2(x, t, z(u_0)(x, t), z(u_0)_x(x, t))dx.$$

Per il lemma di Fatou (tenendo conto della (3)) segue dunque che

$$\liminf \int_Q h_2(y, z(u_n)(y), z(u_n)_x(y))dy \geqslant \int_Q h_2(y, z(u_0)(y), z(u_0)_x(y))dy$$

per cui la (ii) è provata. Dato che da risultati di [15] segue

$$\sup_n \| z(u_n) \|_{L^2(Q)} < +\infty, \qquad \sup_n \| z(u_n)_x \|_{L^2(Q)} < +\infty,$$

dalla (3) si ha che (passando eventualmente ad un'estratta) $\liminf G(u_n) \geqslant G(u_0)$, il che dimostra che u_0 è minimizzante, c.v.d.

TEOREMA 4. Siano: Ω aperto limitato in R^m, $x_0 \in \Omega$, K compatto in R^s, non vuoto, $z_0 \in H_0^1(\Omega)$, $U \equiv \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \in K$ q.o. in $\Omega\}$. Sia $z(u)$, per ogni $u \in U$, la soluzione, nel senso di [9], del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,k=1}^{m} \partial/\partial x_i [a_{ik}(x,\ u(x)) z(u)_{x_k}] = 0 \text{ in } \Omega; \\ z(u)(x) = z_0(x) \text{ in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora la funzione reale

$$u \to G(u) \equiv F(z(u)(x_0), \qquad \int_\Omega h(x,\ z(u)(x))dx)$$

ha minimo assoluto in U se si suppone che

(1) $a_{ik} = a_{ki}$ siano di Carathéodory in $\Omega \times K$, per ogni i, k;

esistono costanti $\alpha > 0$, ω, tali che per ogni $\lambda \in R^m$, $u \in K$, e q.o. in Ω, risulti

$$\alpha \mid \lambda \mid^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x,\ u) \lambda_i \lambda_k \leqslant \omega \mid \lambda \mid^2;$$

(2) indicato con $A(x, u)$ il vettore $(a_{11}(x, u), \ldots, a_{mm}(x, u))$ degli elementi $a_{ik}(x, u)$ con $i \leqslant k$, e posto $P \equiv I_{11} \times \ldots \times I_{mm}$, dove $I_{kk} \equiv [\alpha, \omega]$, ed $I_{ik} \equiv [(\alpha - \omega)/2,\ (\omega - \alpha)/2]$ se $i < k$, risulti $A(x, K) = P$ q.o. in Ω;

(3) h sia di Carathéodory in $\Omega \times R^1$; esista $H \in L^1(\Omega)$ tale che $\mid h(x, v) \mid \leqslant H(x)$ per ogni v e q.o. in Ω; $F : R^2 \to R^1$ sia semicontinua inferiormente.

Dimostrazione. È analoga a quella del teorema 2: si usano risultati di [4], [9], [15].

Nota 2. I teoremi 3 e 4 non rientrano nei teoremi 1 e 2 rispettivamente, non potendo essere verificate, in genere, le ipotesi di compattezza ivi formulate sui coefficienti del gradiente dello « stato ». Infatti, se $m = 1$, se per esempio, a_{ik} dipendono linearmente da u, se (con le notazioni del teorema 3) $K \equiv \{v \in R^1 : \mid v \mid \leqslant 1\}$, la (2) del teorema 1 implica che l'operatore lineare (individuato da a_{ik}) che indicheremo brevemente con $E : L^\infty(Q) \to L^\infty(Q)$, definito da $E(u)(y) \equiv a^0(y) u(y)$, essendo $a_{ik}(y, u) \equiv a^0(y) u$, è debolmente compatto. Dato che $L^\infty(Q)$, gode della proprietà di Dunford-Pettis, se $u_n \rightharpoonup 0$ *in* $L^\infty(Q)$, con $u_n \not\to 0$ in $L^\infty(Q)$, si avrebbe $E(u_n) \to 0$ in $L^\infty(Q)$, da cui essendo q.o. in Q, $0 < \alpha \leqslant a^0(y)$, si concluderebbe che $\operatorname{ess\,sup}_Q |u_n(y)| \to 0$, che è assurdo.

NOTA 3. I teoremi del presente lavoro concernono problemi nei quali il controllo compare nei coefficienti dei termini d'ordine massimo. Tali problemi, come si è notato nell'introduzione, erano aperti: v. [10], [11], [17]. In particolare il teorema 3, pur con forti limitazioni (l'indipendenza da t dei coefficienti, e dei controlli, l'ipotesi (2) di « massimalità » del rango di $A(x, \cdot)$, alquanto restrittiva, e la mancanza, nelle equazioni paraboliche, dei termini di grado inferiore al secondo) si può considerare come una (parziale) estensione del teorema 3 di [10], il quale è provato nelle ipotesi che i coefficienti a_{ik} dei termini di second'ordine siano indipendenti dal controllo, che i coefficienti dei termini di prim'ordine ne dipendano linearmente, che il termine noto sia funzione convessa del controllo e che la « regione di controllo » (K del teorema 3) sia compatta e convessa (oltre ad ipotesi di maggior regolarità sul problema e per soluzioni in una classe meno generale di quella qui considerata), relativamente al funzionale (con le notazioni del teorema 3) $u \to \int_Q z(u)(x, T)d\mu(x)$, essendo μ una data misura in Ω. Teoremi di chiusura per problemi di controllo descritti da equazioni di evoluzione in spazi di Hilbert sono provati in [6]: essi non si applicano ai casi qui studiati.

NOTA 4. Circa l'impossibilità di ottenere, in generale, la chiusura degli « stati ammissibili » nella L^1-topologia di L^∞ (anzichè nella topologia debole di L^∞, come si è fatto nei teoremi 1 e 2), e conseguente giustificazione delle ipotesi di compattezza debole sequenziale in L^∞ formulate nei teoremi 1 e 2 (seppur di complicata caratterizzazione: v. [3]), v. [15]. Nel teorema 2, le ipotesi che assicurano esistenza ed unicità dei problemi di Dirichlet considerati possono essere scelte in modi diversi dai presenti enunciati, senza alternarne le dimostrazioni: v. [9] e [18]. È infine evidente che le ipotesi qui formulate sui funzionali da minimizzare, senza essere le migliori possibili, possono essere alquanto variate senza sostanziali alterazioni delle dimostrazioni.

Se $m = 1$, si possono ottenere risultati migliori.

TEOREMA 5. Sia $m=1$. Allora sussiste la tesi del teorema 3 se ne valgono le ipotesi (1), (3), e se (con le stesse notazioni) si suppone (al posto della (2)) che (ponendo $a \equiv a_{ik}$)

(2′) $a(x, K)$ sia convesso per q.o. $x \in \Omega$.

DIMOSTRAZIONE. Mantenendo le stesse notazioni del teorema 3, dalla relativa dimostrazione segue l'esistenza di $b \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\alpha \leqslant b(x) \leqslant \omega$ q.o. in Ω e tale che se z è la soluzione di

$$\begin{cases} z_t = \partial/\partial x[b(x) z_x] \text{ in } Q, \\ z(x, 0) = z_0(x) \text{ in } \Omega,\ z(x, t) = 0 \text{ in } \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

allora risulta $z(u_n)(y) \to z(y)$ uniformemente sui compatti di Q, e $z(u_n) \rightharpoonup z$ in $L^2(H_0^1(\Omega))$. Allora, per la proposizione 6 (pag. 596) del secondo lavoro in [15], risulta $1/a(u_n) \rightharpoonup 1/b$ in $L^\infty(\Omega)$. Essendo $a(x, K)$ compatto e contenuto in $[\alpha, \omega]$ q.o. in Ω, per la (2′) $1/a(x, K)$ è compatto e convesso q.o. in Ω. Una successione di combinazioni convesse di $\{1/a(u_n)\}$ converge ad $1/b$ q.o. in Ω, e pertanto $1/b(x) \in 1/a(x, K)$ q.o. in Ω. Per il corollario 5.1′ di [8], esiste $u_0 \in U$ tale che $1/b(x) = 1/a(x, u_0(x))$ q.o. in Ω. Pertanto $z = z(u_0)$, e si conclude come nella dimostrazione del teorema 3, c.v.d.

Il teorema seguente (che concerne problemi retti da equazioni differenziali ordinarie in forma autaggiunta) si dimostra in maniera analoga al precedente.

TEOREMA 6. Sia $m=1$. Allora sussiste la tesi del teorema 4 se ne valgono le ipotesi (1), (3), e se (con le stesse notazioni) si suppone (al posto della (2)) che (ponendo $a \equiv a_{ik}$)

(2′) $a(x, K)$ sia convesso q.o. in Ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARONSON: *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. XXII (1968), 607-694.

[2] ARONSON-SERRIN: *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 25 (1967), 81-122.

[3] DUNFORD-SCHARTZ: *Linear Operators,* part I, Interscience, 1958.

[4] STAMPACCHIA: *Le probléme de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Ann. Inst. Fourier, vol. 6 (1965), 189-258.

[5] GROTHENDIECK: *Sur les applications lineaires faiblement compacts d'espaces du type $C(K)$,* Can. J. Math., vol. V (1953), 129-173.

[6] LIONS: *On some optimization problems for linear parabolic equations. Functional analysis and optimization,* edited by E. Caianiello, Academic Press.

[7] BOCHNER-TAYLOR: *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions,* Ann. of Math., vol 39 (1938), 913-944.

[8] CASTAING: *Sur les multiapplications mesurables,* R.I.R.O. 1 (1967), 91-126.

[9] STAMPACCHIA: *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Sem. Math. Sup., Montréal, 1966.

[10] FLEMING: *Optimal control of partially observable diffusions,* S.I.A.M. J. Control, vol. 6 (1968), 194-214.

[11] FLEMING: *Duality and a priori estimates in Markovian optimization problems,* J. Math. Anal. Appl., vol. 16 (1966), 254-279.

[12] FLEMING: *Optimal continuous-parameter stochastic control,* S.I.A.M. Review, 1970.

[13] KELLEY, NAMIOKA, and coauthors: *Linear topological spaces,* Van Nostrand, 1963.

[14] MORREY: *Multiple integrals in the calculus of variations,* Springer, 1966.

[15] SPAGNOLO: *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol XXI (1967), 657-699.
Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. XXII (1968), 571-597.

[16] ZOLEZZI: *Sulla stabilità, rispetto ai coefficienti, di alcuni problemi al contorno per equazioni ellittiche e paraboliche,* Boll. U.M.I., 2 (1970), 208-212.

[17] LIONS: *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,* Dunod e Gauthier-Villars, 1968.

[18] LADYZHENSKAYA-URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations,* Academic Press, 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 aprile 1970.