Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Margherita Bartolozzi

Sulla decomposizione dei tensori

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 99-124

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__99_0>

SULLA DECOMPOSIZIONE DEI TENSORI

MARGHERITA BARTOLOZZI *)

§ 1. Introduzione.

Considero in uno spazio euclideo S_n ad n dimensioni la nota decomposizione

$$T_{ik} = T'_{ik} + \frac{1}{n} T_i^{\,i} \delta_{ik} \tag{1}$$

del generico tensore doppio T_{ik} in una parte isotropa e una parte T'_{ik} ad invariante lineare nullo, ($T_i'^{\,i} = 0$).

Mi propongo, in questa nota, di generalizzare tale decomposizione al caso di tensori di rango $\omega > 2$, considerando oltre alla parte isotropa, una parte emisotropa (e quindi una parte emitropica), cfr. § 2.

Dapprima tratto la questione in generale riferendomi ad ω ed n qualsiasi [§§ 2 e 3]. Poi rendo esplicita la suddetta decomposizione (generalizzata) nei casi $\omega < 6$ per n qualunque [§ 9] e $\omega = 6$ per $n = 2$ [§ 10] in relazione alle parti isotrope, e, nei casi $\omega \leq 6$ per $n \leq 6$ in relazione alle parti emisotrope (o a quelle emitropiche [§§ 11, 12, 13]. Per effettuare più agevolmente tale esplicitazione, dimostro preliminarmente una certa relazione di carattere generale tra tensori emisotropi di rango $\omega = 2m > n$ ($n = 1, 2, ...$) [§ 8].

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R. per gli anni accademici 1965-66 e 1966-67.

Sono grata al dott. A. J. M. Spencer per l'indicazione del lavoro [4] di Smith e Rivlin e i consigli sul modo di applicarlo.

Indirizzo dell'A.: Margherita Bartolozzi, Palermo, Via Libertà, 197.

Inoltre, basandomi su un teorema di Smith e Rivlin, cfr. [4], dimostro pure che il generico tensore emisotropo (o emitropico) ha una certa forma, e per amor di completezza e uniformità, accenno l'analogo per tensori isotropi [1]).

Le relazioni trovate nello spazio euclideo S_n sono tutte puntuali e in termini finiti, cosicchè, esse valgono ovviamente anche in una generica varietà riemanniana, potendosi pensare S_n come spazio tangente a tale varietà.

Per amor di brevità non si sono esposti vari sviluppi di calcolo e qualche dimostrazione [2]).

§ 2. Una trasformazione lineare L riguardante tensori isotropi o emisotropi o emitropici.

Un tensore $T_{i_1 \dots i_\omega}$ nello spazio euclideo S_n si dice isotropo se le sue componenti restano invariate nel passaggio da un riferimento cartesiano ortogonale ad un altro congruente o no al precedente; $T_{i_1 \dots i_\omega}$ si dice *emitropico* se le sue componenti cartesiane ortogonali non mutano nel passaggio da un riferimento ad un altro congruente al primo. Ne segue che ogni tensore isotropo è emitropico, ma il viceversa non sussiste. Vi sono tensori emitropici e non isotropi. Le loro componenti cambiano solo di segno per trasformazioni ortogonali improprie. Essi si dicono *emisotropi.*

I tensori di rango ω in S_n costituiscono uno spazio lineare S_{n^ω} (ad n^ω dimensioni).

I tensori emitropici, isotropi ed emisotropi in S_n costituiscono tre sottospazi $S_{n,\omega}$, $S'_{n,\omega}$, $S''_{n,\omega}$. Le loro dimensioni $N_n(\omega)$, $N'_n(\omega)$, $N''_n(\omega)$ sono state calcolate da G. Racah. Egli dà una espressione di tipo integrale per $N'_n(\omega)$ e scrive le seguenti relazioni riguardanti le dimensioni $N_n(\omega)$, $N'_n(\omega)$, $N''_n(\omega)$ degli spazi dei tensori emitropici, isotropi ed emisotropi.

$$(2) \qquad N'_n(\omega)+N''_n(\omega)=N_n(\omega)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{\omega+1}{2}\right]}\left[\binom{\omega}{2k}-\frac{1}{2}\binom{\omega}{2k-1}\right]\binom{2k}{k}$$

---

[1]) Tale analogo, come è noto, è stato dimostrato con procedimento completamente differente da M. Pastori in [1] e [2].

[2]) Ciò che si è omesso è però reperibile presso l'autore.

dove $\left[\frac{\omega+1}{2}\right]$ è il massimo intero contenuto in $\frac{\omega+1}{2}$.

Per il numero $N'_n(\omega)$ dei tensori isotropi e per quello $N''_n(\omega)$ dei tensori emisotropi in S_n, il Racah trova i valori espressi rispettivamente nelle seguenti tabelle:

n/ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	1	0	3	0	10	0	35	0	126
3	1	0	1	0	3	0	15	0	91	0	603
4	1	0	1	0	3	0	15	0	105	0	903
5	1	0	1	0	3	0	15	0	105	0	945
6	1	0	1	0	3	0	15	0	105	0	945

n/ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	3	0	10	0	35	0	126
3	0	0	0	1	0	6	0	36	0	232	0
4	0	0	0	0	1	0	10	0	91	0	861
5	0	0	0	0	0	1	0	15	0	190	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	21	0	351

Sia $\bar{S}_{n,\omega}$ o lo spazio tensoriale $S'_{n,\omega}$ o $S''_{n,\omega}$, nei quali casi indico con μ $N'_n(\omega)$ o $N''_n(\omega)$ rispettivamente.

Comincio col considerare una trasformazione L che verifichi le seguenti condizioni:

a) *L è una trasformazione lineare di S_n^ω* in $\bar{S}_{n,\omega}$, cosicchè L muta i tensori di rango ω in S_n in tensori isotropi oppure in tensori emisotropi dello stesso tipo.

b) *L lascia invariato $\bar{S}_{n,\omega}$.*

Ovviamente esistono infinite trasformazioni soddisfacenti le condizioni *a*) e *b*).

Fissiamo comunque in $\overline{S}_{n,\omega}$ la base

$$(3) \qquad \boldsymbol{b}_{(1)}\,,\ \boldsymbol{b}_{(2)}\,,\ \ldots.,\ \boldsymbol{b}_{(\mu)}\,.$$

Siano

$$(4) \qquad \boldsymbol{w}_1\,,\ \boldsymbol{w}_2\,,\ \ldots,\ \boldsymbol{w}_\nu \qquad \text{con } \nu=n^\omega-\mu$$

ν vettori tali che il sistema $\boldsymbol{b}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(\mu)}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_\nu$ sia una base in S_{n^ω}.

Per le condizioni *a*) e *b*) si ha:

$$(5) \qquad LL\boldsymbol{v}=L\boldsymbol{v}$$

per ogni $\boldsymbol{v}$ in S_{n^ω}.

Poniamo:

$$(6) \qquad \boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{w}_k-L\boldsymbol{w}_k \text{ onde per la (5) } L\boldsymbol{u}_k=0. \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,\nu).$$

Ogni vettore di S_{n^ω} può porsi, e in un sol modo, nella forma:

$$(7) \qquad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^*+\sum_{k=1}^{\nu}\eta^k\boldsymbol{u}_k \qquad \text{con } \boldsymbol{v}^*=\sum_{k=1}^{\mu}\xi^h\boldsymbol{b}_{(h)}\,.$$

La $(6)_2$ e (7) implicano

$$(8) \qquad \boldsymbol{v}^*=L\boldsymbol{v}.$$

Viceversa, ogni trasformazione L definita dalle (7) e (8) soddisfa alle considerate condizioni *a*) e *b*). È chiaro che L dipende dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\nu$, tali che $\boldsymbol{b}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(\mu)}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\nu$ costituiscano una base in S_{n^ω}, tramite il ν-spazio da essi determinato.

§ 3. Una particolarizzazione della trasformazione lineare L.

È spontaneo assumere il ν-spazio $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_\nu$ ortogonale a $\boldsymbol{b}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(\mu)}$ secondo un'opportuna determinazione della metrica, ossia del prodotto scalare, in S_{n^ω}. Ne segue, per (7), che ogni vettore di S_{n^ω} può decomporsi, e in un sol modo, in un vettore parallelo alla varietà generata dalle $\boldsymbol{b}_{(h)}$ ed in uno ortogonale ad essa.

È spontanea la seguente definizione di prodotto scalare in $\bar{S}_{n,\omega}$:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = v^{l_1 \dots l_\omega} v_{l_1 \dots l_\omega} \tag{9}$$

ove $v^{l_1 \dots l_\omega}$, $v_{l_1 \dots l_\omega}$ sono le componenti controvarianti e covarianti di $\boldsymbol{v}$ calcolate, per esempio, in coordinate cartesiane.

Si ponga:

$$\gamma_{hk} = \boldsymbol{b}_{(h)} \times \boldsymbol{b}_{(k)}\,, \quad \gamma^{hi}\gamma_{ik} = \delta^h_k \qquad (h,\ k = 1,\ \dots,\ \mu) \tag{10}$$

cosicchè γ^{hi} è il reciproco di γ_{hi} nella matrice $\| \gamma_{ik} \|$ d'ordine μ e a determinante certo non nullo.

Per quanto riguarda $\boldsymbol{v}^*$ scegliere lo spazio $\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_\nu$ ortogonale a $\boldsymbol{b}_{(1)}$ ..., $\boldsymbol{b}_{(\mu)}(\boldsymbol{b}_{(l)} \times \boldsymbol{u}_r = 0$ per $l = 1$, ..., μ ed $r = 1, 2, \dots, \nu)$ implica

$$\boldsymbol{v}^* = \sum_{h,\,k=1}^{\mu} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{b}_{(h)} \gamma^{hk} \boldsymbol{b}_{(k)}\,. \tag{11}$$

La (11) fornisce la più spontanea tra le trasformazioni verificanti le proprietà *a*) e *b*).

Per l'ortogonalità dei vettori $\boldsymbol{u}_r$ ai $\boldsymbol{b}_{(l)}$ e per (7) si ha:

$$\boldsymbol{v}^* \times \boldsymbol{b}_{(l)} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{b}_{(l)}\,. \tag{12}$$

§ 4. Sugli invarianti ortogonali. Tensori isotropi elementari e caratterizzazione dei tensori isotropi.

Consideriamo una ω-pla di vettori

$$\boldsymbol{v}^{(1)},\ \boldsymbol{v}^{(2)},\ \dots,\ \boldsymbol{v}^{(\omega)}$$

e una funzione scalare $f(v^{(1)}_p, v^{(2)}_p, \dots, v^{(\omega)}_p)$ delle componenti degli stessi vettori. Sussiste ovviamente il seguente teorema:

Teorema I. *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione* φ *dei prodotti scalari di quei vettori, per cui sia identicamente*

$$f(v_p^{(1)}, \ldots, v_p^{(\omega)}) = \varphi(\boldsymbol{v}^{(1)} \times \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)} \times \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(\omega)} \times \boldsymbol{v}^{(\omega)}), \tag{13}$$

è che, considerate comunque due ω*-ple di vettori*

$$\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(\omega)}; \qquad \boldsymbol{w}^{(1)}, \boldsymbol{w}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{w}^{(\omega)} \tag{14}$$

verificanti le relazioni

$$\sigma_{rs} = \boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(s)} = \boldsymbol{w}^{(r)} \times \boldsymbol{w}^{(s)} \qquad (r, s = 1, \ldots, \omega), \tag{15}$$

risulti:

$$f(v_p^{(1)}, v_p^{(2)}, \ldots, v_p^{(\omega)}) = f(w_p^{(1)}, w_p^{(2)}, \ldots, w_p^{(\omega)}). \tag{16}$$

Consideriamo una trasformazione ortogonale; essa muti le componenti $v_p^{(r)}$ di $\boldsymbol{v}^{(r)}$ nelle $\overline{v}_p^{(r)}$ $(r = 1, \ldots, \omega)$. Tale trasformazione muti f in $\overline{f}$ cosicchè

$$f(v_p^{(1)}, \ldots, v_p^{(\omega)}) \equiv \overline{f}(\overline{v}_p^{(1)}, \overline{v}_p^{(2)} \ldots, \overline{v}_p^{(\omega)}). \tag{17}$$

La funzione f si dice un *invariante ortogonale* se $f = \overline{f}$ per ogni trasformazione ortogonale.

Sussiste pure il seguente teorema:

Teorema II. *La funzione scalare f delle componenti dei vettori* $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(\omega)}$ *è un invariante ortogonale se, e solo se, esiste una funzione* φ *dei prodotti scalari* σ_{rs} *verificante* (13).

Per considerazioni preliminari riguardanti un qualsiasi tensore $V_{i_1 \ldots i_{2m}}$ di rango $2m$, fissiamo una qualsiasi m-pla di interi $r_1, r_2, \ldots, r_m$ con

$$1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_m \leq 2m. \tag{18}$$

Sia $s_1, s_2, \ldots, s_m$ una qualunque disposizione dei numeri ≥ 1, $\leq 2m$ e diversi da $r_1, \ldots, r_m$. Allora, detto a_{hi} il tensore fondamentale in S_n, il tensore

$$I_{i_1 \ldots i_{2m}} = a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_m s_m} \tag{19}$$

è isotropo e lo diremo tensore isotropo elementare.

L'm-pla $r_1, \ldots, r_m$ soddisfacente (18) può essere scelta in $\binom{2m}{m}$ modi. In corrispondenza di ognuno di questi la considerata disposizione $s_1, \ldots, s_m$ può essere scelta in $m!$ modi. Inoltre il tensore isotropo (19) non muta scambiando r_h con s_h e il numero di questi possibili scambi è 2^m. Esso invece muta per scambi d'altro tipo. Allora, il numero i_m dei tensori isotropi elementari di rango $2m$ è

$$i_m = \binom{2m}{m} m! 2^{-m} = (2m-1)!! \tag{20}$$

In [4] Smith e Rivlin hanno dimostrato quanto segue.

Considerati un qualunque gruppo G di trasformazioni di coordinate, e ω vettori di componenti $v_i^{(p)}$ $(p=1, \ldots, \omega)$, sia $\mathfrak{J}$ il generico invariante di questi vettori per le trasformazioni di G; inoltre $\mathfrak{J}$ sia lineare nelle competenti di ciascuno di quei vettori, cioè $\mathfrak{J}$ sia un *invariante multilineare* di quei vettori.

Il generico tensore di ordine ω, *invariante per le trasformazioni di* G *è*

$$H_{i_1 i_2 \ldots i_\omega} = \frac{\partial^\omega \mathfrak{J}}{\partial v_{i_1}^{(1)} \partial v_{i_2}^{(2)} \ldots \partial v_{i_\omega}^{(\omega)}}. \tag{21}$$

Identifichiamo G col gruppo delle trasformazioni ortogonali e conseguentemente $\mathfrak{J}$ con la precedente funzione f che supponiamo multilineare nelle componenti di $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(\omega)}$. Allora, per il Teorema II, la precedente funzione φ dovrà essere un polinomio nelle σ_{rs} non contenente termini in cui figurino fattori del tipo $\sigma_{ir}\,\sigma_{is}$; quindi esso è una somma di termini del tipo

$$c a_{r_1 s_1} v_{p_1}^{(r_1)} v^{(s_1) p_1} \ldots a_{r_m s_m} v_{p_m}^{(r_m)} v^{(s_m) p_m} \tag{22}$$

ove c è una costante, m è $\leq \omega$, l'm-pla $r_1, \ldots, r_m$ verifica

$$1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_m \leq \omega$$

e $s_1, \ldots, s_m$ sono numeri ≥ 1, $\leq \omega$, e distinti fra loro e dai numeri $r_1, \ldots, r_m$.

Ora, avendo $\mathfrak{J}$ la forma (22), il tensore $H_{i_1 \ldots i_\omega}$ espresso mediante (21) si identifica col generico tensore isotropo $I_{i_1 \ldots i_\omega}$, cfr. (19).

Evidentemente danno contributo al secondo membro di (21) solo i termini (22) con $2m = \omega$, cosicchè il *generico tensore isotropo* $I_{i_1 \ldots i_\omega}$ *è una combinazione lineare dei tensori isotropi elementari* (19) *di rango* ω, e inoltre ω deve essere pari affinchè esistano tensori isotropi non nulli di ordine ω.

TEOREMA III. *I tensori isotropi elementari di ordine $\omega = 2s$ costituiscono una base per tensori isotropi in S_n con $n \geq s$.*

DIMOSTRAZIONE. In base all'osservazione fatta prima del teorema basta dimostrare che i tensori isotropi elementari sono indipendenti. A tale scopo ordiniamo i tensori isotropi elementari e supponiamo che il t-mo sia:

$$I_{(t) i_1 \ldots i_{2s}} = a_{i_{l_1} i_{h_1}} a_{i_{l_2} i_{h_2}} \ldots a_{i_{l_s} i_{h_s}} \qquad (\omega = 2s)$$

ove $0 < l_1 < \ldots < l_s \leq \omega$, $l_u \neq h_u \neq l_v$, $h_u \neq h_v$ e $0 < h_u \leq \omega$ $(u = v;$ $u, v = 1, \ldots, s)$.

Indichiamo ora con $T_{i_1 \ldots i_\omega}$ quel tensore di $S_n (n \geq s)$ per cui

$$T_{i_1 \ldots i_\omega} = \begin{cases} 1 \text{ per } i_{l_\alpha} = i_{h_\alpha} = \alpha & (\alpha = 1, 2, \ldots, s) \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha evidentemente

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{I}_{(r)} = \delta_{rt} \qquad (r = 1, \ldots, N'_n(\omega))$$

da cui risulta che $\boldsymbol{I}_t$ non può essere combinazione lineare degli altri tensori isotropi elementari. c.d.d.

§ 5. Sugli invarianti per trasformazioni ortogonali proprie.

Sia

$$\boldsymbol{v}^{(1)},\ \boldsymbol{v}^{(2)},\ \ldots,\ \boldsymbol{v}^{(\omega)} \tag{23}$$

una ω-pla di vettori.

Preliminarmente consideriamo le quantità:

$$\sigma^{rs}=\boldsymbol{v}^{(r)}\times\boldsymbol{v}^{(s)} \qquad (r,\ s=1,\ \ldots,\ \omega) \tag{24}$$

$$D^{s_1\cdots s_m}=\varepsilon^{p_1\cdots p_n}\, v_{p_1}^{(s_1)}\ \ldots\ v_{p_n}^{(s_m)} \tag{25}$$

ove $\varepsilon^{p_1\cdots p_n}$ è un tensore di Ricci e non il tensore orientato di Ricci (cosicchè, per es. la componente $\varepsilon_{s_1\ldots s_n}$ cambia segno per trasformazioni ortogonali improprie), e s_1, ..., s_m è una m-pla di interi crescenti ≥ 1, $\leq \omega$.

Teorema IV. *La funzione scalare $f(v_p^{(1)}\ ,\ v_p^{(2)}\ ,\ \ldots,\ v_p^{(\omega)})$ delle componenti dei vettori $\boldsymbol{v}^{(1)}$, ..., $\boldsymbol{v}^{(\omega)}$ è invariante in forma per le trasformazioni ortogonali proprie, se e solo se esiste una funzione Ψ dei prodotti scalari σ^{rs} e delle quantità $D^{s_1\cdots s_m}$ per cui*

$$f(v_p^{(1)},\ \ldots,\ v_p^{(\omega)})=\Psi(\sigma^{rs},\ D^{s_1\cdots s_m}). \tag{26}$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia invariante in forma per ogni trasformazione ortogonale propria; vogliamo dimostrare che allora vale la (26). A tale scopo consideriamo due arbitrarie ω-ple di vettori $\boldsymbol{v}^{(1)}$, ..., $\boldsymbol{v}^{(\omega)}$ e $\boldsymbol{w}^{(1)}$, ..., $\boldsymbol{w}^{(\omega)}$ tali che, posto (24) e (25), risulti

$$\sigma^{rs}=\boldsymbol{w}^{(r)}\times\boldsymbol{w}^{(s)} \tag{24'}$$

$$D^{s_1\cdots s_m}=\varepsilon^{p_1\cdots p_n}\, w_{p_1}^{(s_1)}\ \ldots\ w_{p_n}^{(s_m)}\,. \tag{25'}$$

Con ragionamento analogo a quello fatto a proposito dei tensori isotropi, in base a (24) e (24′) esistono due sistemi di coordinate (x), $(\bar{x})$ legati da una trasformazione ortogonale per cui

$$v_p^{(r)}=\bar{w}_p^{(r)} \qquad (r=1,\ \ldots,\ \omega). \tag{27}$$

Anzi, in base a (25) e (25′), di tali trasformazioni ne esiste una propria (anche per $m \geq n$).

Detta $\bar{f}$ la trasformata della f mediante la trasformazione ortogonale $(x) \rightarrow (\bar{x})$ supposta propria, per l'ammessa invarianza in forma di f, si ha $f=\bar{f}$. Allora, stante (27) (ed essendo f uno scalare invariante nel senso del calcolo tensoriale), si ha:

$$f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = f(\overline{w}_p^{(1)}, \dots, \overline{w}_p^{(\omega)}) = \bar{f}(\overline{w}_p^{(1)}, \dots, \overline{w}_p^{(\omega)}) = f(w_p^{(1)}, \dots, w_p^{(\omega)}).$$

Quindi, per l'estensione del Teorema I nella quale in luogo delle relazioni (15) figurano le (24), (25), (24′), (25′), f è una funzione delle σ^{rs} e di $D^{s_1 \dots s_m}$, cioè vale (26).

Viceversa, supponiamo che la funzione f abbia la forma (26); dimostriamo che allora f è invariante in forma per trasformazioni ortogonali proprie.

Per tali trasformazioni le quantità σ^{rs} e $D^{s_1 \dots s_m}$ — cfr. (24) e (25) — rimangono invariate, valgono cioè le uguaglianze

$$\bar{\sigma}^{rs} = \sigma^{rs}, \qquad \overline{D}^{s_1 \dots s_m} = D^{s_1 \dots s_m}$$

ove, per es., è $\overline{D}^{s_1 \dots s_m} = \varepsilon^{p_1 \dots p_n} \bar{v}_{p_1}^{(s_1)} \dots \bar{v}_{p_n}^{(s_m)}$.

Si può allora scrivere:

$$\bar{f}(\bar{v}_p^{(1)}, \dots, \bar{v}_p^{(\omega)}) = f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = \Psi(\sigma^{rs}, D^{s_1 \dots s_m}) = \Psi(\bar{\sigma}^{rs}, \overline{D}^{s_1 \dots s_m}),$$

da cui, confrontando con la (26), si ha: $f=\bar{f}$ in corrispondenza ad ogni trasformazione ortogonale propria. c.d.d.

§ 6. Tensori emisotropi ed emitropici.

Chiameremo *tensore emisotropo elementare* di rango $\omega = n+2m$ un tensore $\boldsymbol{E}$ del tipo

$$E_{i_1 \dots i_{n+2m}} = \varepsilon_{i_{s_1} \dots i_{s_n}} a_{i_{s_{n+1}} i_{s_{n+2}}} \dots a_{i_{s_{n+2m-1}} i_{s_{n+2m}}} \tag{28}$$

ove $s_1, \dots, s_{n+2m}$ è una qualunque permutazione dei numeri $1, \dots, n+2m$. $\boldsymbol{E}$ è evidentemente emisotropo.

Scambiando fra loro due indici appartenenti alla ε oppure ad una stessa a il tensore (28) cambia al più di segno. Conviene quindi identificare i tensori emisotropi elementari ottenuti da (28) con tali scambi. Scambi d'altro tipo mutano il tensore emisotropo elementare in considerazione.

Tenuto conto di ciò, si riconosce facilmente che il numero $e_{n,m}$ dei tensori emisotropi elementari di rango $n+2m$ in S_n è

$$e_{n,m}=\binom{n+2m}{n} i_m=\binom{n+2m}{n}\binom{2m}{m} m!2^{-m}. \tag{29}$$

Chiameremo *tensori emitropici elementari* i tensori isotropi elementari e i tensori emisotropi elementari.

Facciamo per i tensori emitropici l'analogo delle considerazioni riguardanti i tensori isotropi svolte al § 4.

Identifichiamo G col gruppo delle trasformazioni ortogonali proprie e conseguentemente l'invariante $\mathfrak{I}$ per trasformazioni del gruppo G con la precedente funzione f che, inoltre, supponiamo multilineare nelle componenti di $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(\omega)}$. Per il Teorema IV vale la (26) ove la funzione Ψ è un polinomio nelle $\sigma^{rs}, D^{s_1 \cdots s_m}$, in cui non figurano fattori del tipo $\sigma_{is_1}\sigma_{is_2}$, nè del tipo $D_{s_1 \ldots s_m} D_{t_1 \ldots t_m}$ ove qualche s_h è uguale a qualche t_k, nè del tipo $\sigma_{ij} D_{s_1 \ldots s_m}$ con qualche s_h eguale ad i o a j. Quindi, tale polinomio, è una somma di termini o del tipo (22) o del tipo

$$c\varepsilon_{i_{s_1} \ldots i_{s_n}} a_{i_{s_{n+1}} i_{s_{n+2}}} v^{i_{s_{n+1}}} v^{i_{s_{n+2}}} \ldots a_{i_{s_{n+2m-1}} i_{s_{n+2m}}} v^{i_{s_{n+2m-1}}} v^{i_{s_{n+2m}}} \tag{30}$$

ove c è una costante, $n+2m \leq \omega$ e $s_1 \ldots s_{n+2m}$ è una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots, n+2m$.

Ora il tensore $H_{i_1 \ldots i_\omega}$ espresso mediante (21) si identifica col generico tensore emitropico $E'_{i_1 \ldots i_\omega}$. Evidentemente danno contributo al secondo membro di (21) solo i termini (30) con $n+2m=\omega$ e i termini del tipo (22) con $2m=\omega$; cosicchè il generico tensore emitropico $E'_{i_1 \ldots i_\omega} (= H_{i_1 \ldots i_\omega})$ è una combinazione lineare dei tensori *emitropici elementari* (19) (isotropi) e (28) (emisotropi) di rango ω. Ovviamente i tensori di tipo (28) si presentano solo se $\omega \geq n$ e, affinchè tensori non nulli di tale tipo esistano, $\omega - n$ deve essere pari. In particolare per ω dispari ed n pari, in S_n non vi sono tensori emitropici non nulli di rango ω.

In base ai ragionamenti precedenti il generico tensore emitropico $\boldsymbol{E}'$ può esprimersi come somma di un tensore isotropo $\boldsymbol{I}$ (combinazione lineare di tensori isotropi elementari) e di un tensore emisotropo $\boldsymbol{E}$ (combinazione lineare di tensori emisotropi elementari). Le *componenti* di $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}$ cambiano di segno per una qualunque trasformazione ortogonale impropria se e solo se $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}$, ossia se il generico tensore emitropico è una combinazione lineare di tensori emisotropi elementari.

La precedente espressione del generico tensore emitropico $\boldsymbol{E}'$ implica che il numero $N_n(\omega)$ delle dimensioni di $S_{n,\omega}$ è espresso dalla $(2)_1$.

§ 7. Un'interpretazione della decomposizione (7). Invarianti lineari (elementari) isotropi ed emisotropi.

Dati comunque in $S_{n,\omega}$, il tensore $\boldsymbol{V}$, il tensore isotropo elementare $\boldsymbol{I}$ — cfr. (19) — e il tensore emisotropo elementare $\boldsymbol{E}$ — cfr. (28) — chiameremo i prodotti scalari

$$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{I}=V_{i_1\dots i_\omega}I^{i_1\dots i_\omega}\,,\qquad \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}=V_{i_1\dots i_\omega}E^{i_1\dots i_\omega} \tag{31}$$

invariante lineare (*elementare*) *isotropo* del tensore $\boldsymbol{V}$ e rispettivamente *invariante lineare* (*elementare*) *emisotropo* di $\boldsymbol{V}$.

Diremo i considerati invarianti isotropi ed emisotropi, *invarianti lineari* (*elementari*) *emitropici* di $\boldsymbol{V}$.

Il generico invariante $(31)_1$ si ottiene considerando una qualunque successione $r_1, r_2, \dots, r_m$ di interi positivi ≥ 1 e non maggiori di $2m$, considerando una successione $s_1, \dots, s_m$ formata coi rimanenti interi positivi non maggiori di $2m$, e saturando l'indice r_h-mo di $V_{i_1\dots i_{2m}}$ col suo indice s_h-mo per $h=1, \dots, m$.

Un invariante del tipo $(31)_2$ può aversi solo se $\omega-n$ è pari, ossia $\omega=n+2m$, e si ottiene considerando due qualsiasi m-ple $r_1, \dots, r_m$, $s_1, \dots, s_m$ soddisfacenti le condizioni precedenti, saturando tra di loro gli indici r_h-mo ed s_h-mo di $V_{i_1\dots i_\omega}$ $(h=1, 2, \dots, m)$, e infine saturando i rimanenti n indici col tensore orientato di Ricci.

In base alla decomposizione (7), per $\bar{S}_{n,\omega}=S'_{n,\omega}$ — cfr. § 2 — si può affermare che *$\boldsymbol{v}$ è decomponibile nella somma di due tensori $\boldsymbol{v}^*$ e $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*$ ove $\boldsymbol{v}^*$ è isotropo* — cfr. $(7)_2$ — *e ha gli stessi invarianti lineari* *isotropi di* $\boldsymbol{v}$ — cfr. (12) — *cosicchè* $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*$ *ha gli invarianti lineari isotropi tutti nulli.*

Per $\bar{S}_{n,\omega}=S''_{n,\omega}$ la (7) dice che $\boldsymbol{v}$ *è decomponibile nella somma di due tensori* $\boldsymbol{v}^*$ *e* $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*$ *ove* $\boldsymbol{v}^*$ *è emisotropo* — cfr. $(7)_2$ — *e ha gli stessi invarianti lineari emisotropi di* $\boldsymbol{v}$ — cfr. (12) — *cosicchè* $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*$ *ha gli invarianti lineari emisotropi tutti nulli.*

Poichè $\boldsymbol{b}_h \times \boldsymbol{u}_k=0$, la possibilità e unicità della decomposizione (7) per $\bar{S}_{n,\omega}=S'_{n,\omega}$ e per $\bar{S}_{n,\omega}=S''_{n,\omega}$ equivalgono alla possibilità e unicità delle seguenti due decomposizioni di un qualunque tensore $\boldsymbol{v}$ di rango ω in S_n : la decomposizione di $\boldsymbol{v}$ in un tensore isotropo ed uno ad invarianti lineari isotropi tutti nulli e la decomposizione di $\boldsymbol{v}$ in un tensore emisotropo ed uno ad invarianti lineari emisotropi tutti nulli.

Per $\bar{S}_{n,\omega}=S_{n,\omega}$ la (7) permette di estendere le considerazioni precedenti sui tensori isotropi ed emisotropi, ai tensori emitropici.

§ 8. Alcune relazioni di carattere generale tra tensori emisotropi di rango $2m+n$ in S_n per $m>0$.

Consideriamo in S_n un riferimento cartesiano $(a_{il}=\delta_{il})$, indi dimostriamo l'uguaglianza:

$$(32)\qquad \sum_{u=1}^{n+1}(-1)^{nu}a_{ls_u}\varepsilon_{s_{u+1}\cdots s_{u+n}}=0 \quad \text{ove} \quad s_{u+n+1}=s_u \qquad (u=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Fissiamo ad arbitrio gli $n+2$ indici l, s_1, ..., s_{n+1} nell'insieme (1, ..., n). Sia N il numero degli indici s_1, ..., s_{n+1} eguali ad l.

Per $N=0$ la $(32)_1$ vale perchè $a_{ls_u}=0$ per $u=1$, ..., $n+1$.

Sia ora $N=1$ ed $s_\alpha=l$. Per $u\neq\alpha$, $a_{ls_u}=0$ e per $u=\alpha$ gli n indici s_{u+1}, ..., s_{u+n} hanno valori trovantisi tra gli $n-1$ numeri ottenuti dai numeri 1, ..., n togliendo da essi l. Dunque almeno due dei suddetti indici hanno uno stesso valore e quindi $\varepsilon_{s_{u+1}\cdots s_{u+n}}=0$. Ne segue di nuovo la validità di $(32)_1$.

Sia ora $N\geq 3$. Allora almeno due degli indici s_{u+1}, ..., s_{u+n} sono uguali ad l, onde $\varepsilon_{s_{u+1}\cdots s_{u+n}}=0$ per $u=1$, ..., $n+1$.

Dunque $(32)_1$ vale anche per $N\geq 3$.

Sia ora $N=2$. A meno di un cambiamento circolare della nostra denominazione degli indici, possiamo ritenere $s_1=l$. Sia pure $s_{\rho+1}=l$ con $1\leq\rho\leq n$. Per $u\neq l$ e $u\neq\rho+1$ sono eguali ad l due degli indici $s_{u+1}, \ldots, s_{u+n}$ onde $\varepsilon_{s_{u+1}\ldots s_{u+n}}=0$. Ne segue che la (32) può porsi nella forma:

$$(33)\qquad (-1)^n a_{ls_1}\varepsilon_{s_2\ldots s_{n+1}}+(-1)^{n(\rho+1)}a_{ls_{\rho+1}}\varepsilon_{s_{\rho+2}\ldots s_{n+1}s_1\ldots s_\rho}=0 \qquad (s_1=s_{\rho+1}=l)$$

e quindi anche nella forma:

$$(34)\qquad \varepsilon_{s_2\ldots s_{n+1}}=(-1)^{1+n\rho}\varepsilon_{s_{\rho+2}\ldots s_{n+1}s_1\ldots s_\rho} \qquad (s_1=s_{\rho+1}=l).$$

Per assodare la (32) anche per $N=2$ basta dimostrare la (34). A tale scopo si osservi che per $(34)_{2,3}$ e note proprietà di $\varepsilon_{l_1\ldots l_n}$, si ha (essendo $s_1=s_{\rho+1}$)

$$(35)\qquad \varepsilon_{s_1\ldots s_{n+1}}=\varepsilon_{s_2\ldots s_\rho s_1 s_{\rho+2}\ldots s_{n+1}}=(-1)^{\rho-1}\varepsilon_{s_1 s_2\ldots s_\rho s_{\rho+2}\ldots s_{n+1}}=$$
$$=(-1)^{\rho-1+(n-\rho)\rho}\varepsilon_{s_{\rho+2}\ldots s_{n+1}s_1\ldots s_\rho}.$$

Infatti la $(35)_2$ vale perchè l'indice s_1 può essere portato al primo posto con $\rho-1$ scambi. Quanto alla $(35)_3$ basta osservare che si passa dall' n-pla $s_1 \ldots s_\rho s_{\rho+2} \ldots s_{n+1}$ alla $s_{\rho+2} \ldots s_{n+1}s_1 \ldots s_\rho$ arretrando di ρ posti ciascuno degli $n-\rho$ indici $s_{\rho+2}, \ldots, s_{n+1}$. Poichè $\rho-1+(n-\rho)\rho=1+$ $+n\rho-[(\rho-1)\rho+2]$ e la [ ] è pari, la (35) equivale alla (34) e quindi alla $(32)_1$. Dunque quest'ultima vale anche per $N=2$ e quindi in ogni caso.

Da (32) segue immediatamente la seguente relazione per tensori emisotropi di rango $n+2m$ in S_n:

$$(32')\qquad \sum_{u=1}^{n+1}(-1)^{nu}a_{l_1p_1}\ldots a_{l_{m-1}p_{m-1}}a_{l_m s_u}\varepsilon_{s_{u+1}\ldots s_{u+n}}=0$$
$$(s_{u+n+1}=s_u \text{ per } u=1, \ldots, n).$$

Moltiplicando per $\varepsilon_{s_{u+1}\ldots s_{u+r}h_{r+1}\ldots h_n}$, dalla (32') si ottengono facilmente delle relazioni tra tensori isotropi — cfr. § 10 —.

§ 9. Tensori isotropi di rango 2 o 4 in S_n per $n \geq 1$ e di rango 6 in S_n per $n \geq 3$.

Poniamo:

$$\alpha_{hk} = \boldsymbol{I}_{(h)} \times \boldsymbol{I}_{(k)}\,, \qquad \alpha_{hr}\alpha^{rk} = \delta_h^{\,k}. \tag{36}$$

È istruttivo applicare la precedente teoria al caso ben noto dei tensori isotropi di rango 2 in S_n. Il generico di essi è ca_{ik}.

Sia $\bar{S}_{n,2} = S'_{n,2}$, onde $\mu = N'_n\,(2)$ [§ 2] e $\boldsymbol{b}_{(h)} = \boldsymbol{I}_{(h)}$ $(h = 1, ..., \mu)$. Allora le γ_{hk} espresse da (10) si riducono all'unica $\alpha_{11} = n$, onde, per (11), $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{I}_{(1)}\alpha^{11}\boldsymbol{I}_{(1)} = T_i^{\,i}\alpha^{11}\boldsymbol{I}_{(1)} = n^{-1}T_i^{\,i}a_{ik}$, ossia $\boldsymbol{v}^*$ è il tensore isotropo ultimo termine nella (1).

Trattiamo ora il caso dei tensori isotropi di rango 4 in S_n, determinando le α_{hk} ed esplicitando quindi la (11).

È noto che il numero dei tensori isotropi indipendenti di rango 4 è tre; siano $\boldsymbol{I}_{(1)}$, $\boldsymbol{I}_{(2)}$, $\boldsymbol{I}_{(3)}$ i seguenti tensori isotropi:

$$\boldsymbol{I}_{(1)ilrs} = a_{il}a_{rs}\,, \qquad \boldsymbol{I}_{(2)ilrs} = a_{ir}a_{ls}\,, \qquad \boldsymbol{I}_{(3)ilrs} = a_{is}a_{lr}\,. \tag{37}$$

Stanti le posizioni (36), per $\omega = 4$ la (11) può scriversi:

$$\begin{aligned} v^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{n^4 - 3n^2 + 2n}\{ & [(n^2-1)a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} + (1-n)(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}])v^{ir}_{ir} + \\ & + [(n^2-1)a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + (1-n)(a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma})]v^{il}_{il} + \\ & + [(n^2-1)a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} + (1-n)(a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta})]v^{li}_{il}\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Conveniamo d'intendere

$$\boldsymbol{I}_{(\alpha)} \;\dots\; = \boldsymbol{I}_{(\alpha)ilrshk}\,.$$

Nel caso di tensori di rango 6 in S_n, indichiamo un procedimento atto alla determinazione delle α_{hk}.

Siano $\boldsymbol{I}_{(1)}$ ..., $\boldsymbol{I}_{(15)}$ i 15 tensori isotropi elementari di rango 6

— cfr. (20) —. Si ha precisamente:

$$
(39) \quad \begin{cases}
I_{(1)} \dots = a_{il}a_{rs}a_{hk} & I_{(2)} \dots = a_{il}a_{rh}a_{sk} & I_{(3)} \dots = a_{il}a_{rk}a_{sh} \\
I_{(4)} \dots = a_{ir}a_{sh}a_{kl} & I_{(5)} \dots = a_{ir}a_{sk}a_{hl} & I_{(6)} \dots = a_{ir}a_{sl}a_{kh} \\
I_{(7)} \dots = a_{is}a_{hk}a_{lr} & I_{(8)} \dots = a_{is}a_{hl}a_{kr} & I_{(9)} \dots = a_{is}a_{hr}a_{kl} \\
I_{(10)} \dots = a_{ih}a_{kl}a_{rs} & I_{(11)} \dots = a_{ih}a_{kr}a_{ls} & I_{(12)} \dots = a_{ih}a_{ks}a_{lr} \\
I_{(13)} \dots = a_{ik}a_{lr}a_{sh} & I_{(14)} \dots = a_{ik}a_{ls}a_{rh} & I_{(15)} \dots = a_{ik}a_{lh}a_{rs} .
\end{cases}
$$

Supponiamo $n \geq 3$, cosicchè per il Teorema III [§ 4] i tensori (39) costituiscono una base in $S'_{n,6}$ per $n \geq 3$.

Si può dimostrare [3]) che

$$
(40) \qquad \alpha_{h+3,\,k+3} = \alpha_{hk}\,, \quad \alpha_{hh} = n^3,
$$

$$
\alpha_{1r} = \alpha_{2s} = n^2 \quad (r = 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 15;\ s = 3,\ 5,\ 9,\ 12)
$$

$$
\alpha_{1r} = \alpha_{2s} = \alpha_{3l} = n \quad (r = 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14;\ s = 6,\ 8,\ 15;\ l = 6,\ 9).
$$

Siccome $n^{-1}\alpha_{hk}$ è intero, possiamo calcolare esattamente con le macchine calcolatrici il determinante $D' = n^{-15}D_{(n)}$ della matrice $\| n^{-1}\alpha_{hk} \|$ relativa a $S_{(n)}$ e la corrispondente matrice complementare $\| A'^{hk} \| = \| n^{-14}A^{hk}_{(n)} \|$. Ne segue:

$$
(41) \qquad \alpha^{hk} = \frac{A^{hk}_{(n)}}{D_{(n)}} = \frac{A'^{hk}}{nD'}\,.
$$

---

[3]) Ciascuna colonna nel quadro (39) è invariante per la permutazione ciclica non involgente l'indice i: $S_1 = \begin{pmatrix} lrshk \\ rshkl \end{pmatrix}$. Anzi S_1 permuta circolarmente gli elementi di tale colonna.

Inoltre l'h-mo elemento della k-ma colonna si ottiene dal primo elemento della k-ma colonna stessa applicando la $(h-1)$-ma potenza della permutazione ciclica $(lrshk)$. Il secondo ed il terzo elemento della riga h-ma si ottengono dal 1° elemento della riga h-ma scambiando fra loro gli indici quarto e quinto. Ne segue $(40)_1$.

§ 10. Tensori isotropi di rango 6 in S_2.

In questo caso, per la (32), si ha:

$$\sum_{u=1}^{3} a_{ls_u} \varepsilon_{s_{u+1}s_{u+2}} = 0. \tag{42}$$

Moltiplichiamo ora la (42) per $\varepsilon_{r_1 r_2}$; per una nota proprietà del prodotto $\varepsilon_{s_{u+1}s_{u+2}}\varepsilon_{r_1 r_2}$, si ha

$$\sum_{u=1}^{3} a_{ls_u} \det \begin{Vmatrix} a_{s_{u+1} r_1} & a_{s_{u+1} r_2} \\ a_{s_{u+2} r_1} & a_{s_{u+2} r_2} \end{Vmatrix} = \sum_{u=1}^{3} a_{ls_u} (a_{s_{u+1} r_1} a_{s_{u+2} r_2} - a_{s_{u+1} r_2} a_{s_{u+2} r_1}) = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} a_{ls_1}a_{s_2r_1}a_{s_3r_2} - a_{ls_1}a_{s_2r_2}a_{s_3r_1} + a_{ls_2}a_{s_3r_1}a_{s_1r_2} - \\ - a_{ls_2}a_{s_3r_2}a_{s_1r_1} + a_{ls_3}a_{s_1r_1}a_{s_2r_2} - a_{ls_3}a_{s_1r_2}a_{s_2r_1} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

La (43) è una relazione tra tensori isotropi di rango 6 in S_2.
Per $(ls_1s_2s_3r_2r_1) = (ilrshk)$, la (43) si scrive:

$$a_{il}a_{rk}a_{sh} - a_{il}a_{rh}a_{sk} + a_{ir}a_{sk}a_{lh} - a_{ir}a_{sh}a_{lk} + a_{is}a_{lk}a_{rh} - a_{is}a_{lh}a_{rk} = 0. \tag{43'}$$

Tenuto fisso l'indice i, permutiamo circolarmente i rimanenti indici $l\ r\ s\ h\ k$: si ottengono delle relazioni che per (39) possono porsi nella forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{I}_5 + \boldsymbol{I}_9 - \boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{I}_8 \,, \\ \boldsymbol{I}_5 = \boldsymbol{I}_6 + \boldsymbol{I}_8 + \boldsymbol{I}_{12} - \boldsymbol{I}_7 - \boldsymbol{I}_{11} \,, \\ \boldsymbol{I}_8 = \boldsymbol{I}_9 + \boldsymbol{I}_{11} + \boldsymbol{I}_{15} - \boldsymbol{I}_{10} - \boldsymbol{I}_{14} \,, \\ \boldsymbol{I}_{11} = \boldsymbol{I}_{12} + \boldsymbol{I}_{14} + \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{I}_{13} - \boldsymbol{I}_2 \,, \\ \boldsymbol{I}_{14} = \boldsymbol{I}_{15} + \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_6 - \boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_5 \,. \end{cases} \tag{44}$$

Si può dimostrare che le cinque relazioni (44) sono linearmente indipendenti [4]).

Con calcolo materiale dalle (44) si giunge alle seguenti espressioni di $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_5$, $\boldsymbol{I}_8$, $\boldsymbol{I}_{11}$, $\boldsymbol{I}_{14}$ in funzione dei rimanenti tensori (39):

$$(45)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_9+\boldsymbol{I}_{12}-\boldsymbol{I}_7-\boldsymbol{I}_{10}\,, \\ \boldsymbol{I}_5=\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{I}_{12}+\boldsymbol{I}_{15}-\boldsymbol{I}_{10}-\boldsymbol{I}_{13}\,, \\ \boldsymbol{I}_8=\boldsymbol{I}_7+\boldsymbol{I}_{15}+\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{I}_{13}-\boldsymbol{I}_1\,, \\ \boldsymbol{I}_{11}=\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{I}_6+\boldsymbol{I}_{10}-\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_4\,, \\ \boldsymbol{I}_{14}=\boldsymbol{I}_6+\boldsymbol{I}_9+\boldsymbol{I}_{13}-\boldsymbol{I}_4-\boldsymbol{I}_7\,. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice della $\alpha_{hk}=\boldsymbol{I}_h \times \boldsymbol{I}_k$, ove $\boldsymbol{I}_h$ e $\boldsymbol{I}_k$ sono arbitrari tensori appartenenti alla prima o alla terza colonna nel quadro (39). Conformemente a osservazioni fatte prima della (41), $\alpha'_{hk}=\alpha_{hk}/2$ è intero. In base a (39) si ha precisamente:

$$\|\alpha'_{hk}\|=\left\|\begin{matrix} 4&2&1&2&2&1&2&1&1&2\\ 2&4&2&1&1&1&1&1&2&1\\ 1&2&4&2&1&2&2&1&2&1\\ 2&1&2&4&2&1&1&1&1&1\\ 2&1&1&2&4&2&1&2&2&1\\ 1&1&2&1&2&4&2&1&1&1\\ 2&1&2&1&1&2&4&2&1&2\\ 1&1&1&1&2&1&2&4&2&1\\ 1&2&2&1&2&1&1&2&4&2\\ 2&1&1&1&1&1&2&1&2&4 \end{matrix}\right\|$$

Il determinante D' della matrice considerata vale 4096 cosicchè i

---

[4]) Detti $T^{ilrshk}_{(\beta)}$ $(\beta=1, \ldots, 5)$ i tensori aventi rispettivamente le sole componenti T^{112222}, T^{121222}, T^{122122}, T^{122212}, T^{122221} non nulle ed eguali ad 1, risulta facilmente $\mathfrak{F}_{(\alpha)ilrshk}T^{ilrshk}_{(\beta)}=\delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta=1, \ldots, 5)$ ove $\mathfrak{F}_{(\alpha)ilrshk}$ è il primo membro dell'α-ma delle relazioni (44) — cfr. quadro (39) —.

dieci tensori $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_3$, $\boldsymbol{I}_4$, $\boldsymbol{I}_6$, $\boldsymbol{I}_7$, $\boldsymbol{I}_9$ $\boldsymbol{I}_{10}$, $\boldsymbol{I}_{12}$, $\boldsymbol{I}_{13}$, $\boldsymbol{I}_{15}$, costituenti la prima e terza colonna nel quadro (39), costituiscono una base in $S'_{2,6}$.

Detto A'^{hk} il complemento algebrico di α'_{hk} nella matrice considerata si, ha:

$$\| A'^{hk} \| = \left\| \begin{array}{rrrrrrrrrr} 4096 & -2048 & 1024 & -1024 & -2048 & 1024 & -2048 & 1024 & 1024 & -1024 \\ -2048 & 2560 & -1024 & 512 & 1024 & -512 & 1024 & -512 & -1024 & 512 \\ 1024 & -1024 & 4096 & -2048 & 1024 & -1024 & -2048 & 1024 & -2048 & -1024 \\ -1024 & 512 & -2048 & 2560 & -1024 & 512 & 1024 & -512 & 1024 & -512 \\ -2048 & 1024 & 1024 & -1024 & -4096 & -2048 & 1024 & -1024 & -2048 & 1024 \\ 1024 & -512 & 1024 & 512 & -2048 & 2560 & -1024 & 512 & 1024 & -512 \\ -2048 & 1024 & -2048 & 1024 & 1024 & -1024 & 4096 & -2048 & 1024 & -1024 \\ 1024 & -512 & 1024 & -512 & -1024 & 512 & -2048 & 2560 & 1024 & 512 \\ 1024 & -1024 & -2048 & 1024 & -2048 & 1024 & -1024 & -1024 & 4096 & -2048 \\ -1024 & 512 & 1024 & -512 & 1024 & -512 & -1024 & 512 & -2048 & 2560 \end{array} \right\| .$$

Allora, in base alla (41) per $n=2$ e all'eguaglianza $D'=4096$, nel caso in considerazione, la (11) diviene:

$$(46) \qquad \overset{*}{v}_{\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} = \frac{1}{8192} \sum_h \Big(\sum_k A'^{hk} I_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} \Big) v^{ilrstu} I_{(h)ilrstu} .$$

§ 11. Tensori emisotropi di rango ≤ 5.

Conformemente alla tabella del Racah al § 2, ogni tensore emisotropo di rango ω in S_ω ha la forma $c\varepsilon_{l_1 \dots l_\omega}$; inoltre, l'unico caso interessante di tensore emisotropo di rango $\omega \leq 4$ in S_n si ha per $\omega=4$ ed $n=2$.

Consideriamo tale caso, ossia lo spazio $S''_{2,4}$ di dimensioni $N''_2(4)=3$.

Siano $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ i seguenti tensori emisotropi elementari:

$$(47) \qquad \boldsymbol{E}_{(1)ilst} = \varepsilon_{il} a_{st}, \quad \boldsymbol{E}_{(2)ilst} = \varepsilon_{is} a_{lt}, \quad \boldsymbol{E}_{(3)ilst} = \varepsilon_{it} a_{ls} .$$

Si ha:

$$(48) \qquad \beta_{hk} = \boldsymbol{E}_{(h)} \times \boldsymbol{E}_{(k)} = 2(1+\delta_{hk}), \qquad \det \| \beta_{hk} \| = 32.$$

Ne segue l'indipendenza lineare dei tensori (47) e, siccome $N_2''(4)=3$, essi costituiscono una base di $S_{2,4}''$.

Fatte $\boldsymbol{b}_h=\boldsymbol{E}_h$, la (11) si può porre nella forma:

$$v^*_{\alpha\beta\gamma\delta}=\tfrac{1}{4}\{[3v_{[12]s}{}^s-v_{[1l2]}{}^l-v_{[1l}{}^l{}_{2]}\varepsilon_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}+ \tag{49}$$

$$+[3v_{[1l2]}{}^l-v_{[12]s}{}^s-v_{[1l}{}^l{}_{2]}]\varepsilon_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}+[3v_{[1l}{}^l{}_{2]}-v_{[12]s}{}^s-v_{[1l2]}{}^l]\varepsilon_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}\}.$$

Dalla tabella del Racah risulta che la considerazione dei tensori di rango 5 in S_n ha interesse solo per $n=3$, nel quale caso essi costituiscono il sottospazio $S_{3,5}''$ di S_{3^5} di dimensioni $N_3''(5)=6$ [§ 2].

Per (29) i tensori emisotropi elementari sono dieci. Identifichiamoli con i tensori $\boldsymbol{E}_1$, ..., $\boldsymbol{E}_{10}$ le cui componenti sono espresse nel seguente quadro: [5])

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{E}_{(1)ilmns}=\varepsilon_{ilm}a_{ns}\,, & \boldsymbol{E}_{(5)}\ldots=\varepsilon_{iln}a_{ms}\,, & \boldsymbol{E}_{(7)}\ldots=\varepsilon_{mns}a_{il} \\ \boldsymbol{E}_{(2)}\ldots=\varepsilon_{imn}a_{sl}\,, & \boldsymbol{E}_{(6)}\ldots=\varepsilon_{ims}a_{nl}\,, & \boldsymbol{E}_{(8)}\ldots=\varepsilon_{nsl}a_{im} \\ \boldsymbol{E}_{(3)}\ldots=\varepsilon_{ins}a_{lm}\,, & -\boldsymbol{E}_{(5)}\ldots=\varepsilon_{inl}a_{sm}\,, & \boldsymbol{E}_{(9)}\ldots=\varepsilon_{slm}a_{in} \\ \boldsymbol{E}_{(4)}\ldots=\varepsilon_{isl}a_{mn}\,, & -\boldsymbol{E}_{(6)}\ldots=\varepsilon_{ism}a_{ln}\,, & \boldsymbol{E}_{(10)}\ldots=\varepsilon_{lmn}a_{is}\,. \end{array}\right. \tag{50}$$

Posto

$$\beta_{hk}=\boldsymbol{E}_{(h)}\times\boldsymbol{E}_{(k)}=6\beta'_{hk},\qquad \beta_{hr}\beta^{rk}=\delta_h^k\ (h,\ k=1,\ \ldots,\ 6) \tag{53}$$

---

[5]) In questo quadro sono state messe le espressioni di $-\boldsymbol{E}_{(5)}$ e $-\boldsymbol{E}_{(6)}$ affinchè la permutazione ciclica $S_2=\begin{pmatrix} lmns \\ mnsl \end{pmatrix}$ non involgente i lasci invariata ogni colonna di (50). Nel nostro caso, la (32) vale per $n=3$ onde $\varepsilon_{mns}a_{li}=\varepsilon_{nsi}a_{lm}-$ $-\varepsilon_{sim}a_{ln}+\varepsilon_{imn}a_{ls}$, ossia

$$\varepsilon_{mns}a_{li}=\varepsilon_{ins}a_{lm}-\varepsilon_{ims}a_{ln}+\varepsilon_{imn}a_{ls}\,. \tag{51}$$

Allora, per (50) e la seconda proprietà di S_2, si ha:

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{E}_7=\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{E}_6+\boldsymbol{E}_2\,, & \boldsymbol{E}_8=\boldsymbol{E}_4+\boldsymbol{E}_5+\boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{E}_9=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_6+\boldsymbol{E}_4\,, & \boldsymbol{E}_{10}=\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_5+\boldsymbol{E}_1\,. \end{array}\right. \tag{52}$$

e indicato con B'_{hk} il complemento algebrico di β'_{hk} nella matrice $\|\beta'_{hk}\|$ $(h, k=1, \ldots, 6)$ e con D' il suo determinante, si ha:

$$(54) \qquad D'=125, \qquad \beta^{hk}=\frac{B'^{hk}}{6D'},$$

$$\|B'^{hk}\|=\left\|\begin{array}{cccccc} 75 & 25 & 0 & 25 & -25 & 25 \\ 25 & 75 & 25 & 0 & -25 & -25 \\ 0 & 25 & 75 & 25 & 25 & -25 \\ 25 & 0 & 25 & 75 & 25 & 25 \\ -25 & -25 & 25 & 25 & 75 & 0 \\ 25 & -25 & -25 & 25 & 0 & 75 \end{array}\right\|.$$

Nel caso presente va fatto $\boldsymbol{b}_h=\boldsymbol{E}_h$, onde $\gamma_{hk}=\beta_{hk}$ — cfr. (10) e $(53)_1$ — e la (11) può porsi nella forma:

$$(55) \qquad v^*_{\alpha\beta\gamma\delta\xi}=\frac{1}{750}\sum_{k=1}^{6}\varepsilon_{ilm}[B'^{1k}v^{ilmn}{}_n+B'^{2k}v^{inlm}{}_n+B'^{3k}v^{in}{}_n{}^{lm}+$$
$$+B'^{4k}v^{imn}{}_n{}^l+B'^{5k}v^{ilmn}{}_n+B'^{6k}v^{inlm}{}_n]E_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi}.$$

§ 12. Tensori emisotropi di rango 6 in S_2.

In base ad un risultato ottenuto al § 6, il generico tensore emisotropo di rango 6 in S_2 è una combinazione lineare dei tensori emisotropi elementari (28) che per (29) sono 45.

Consideriamo le seguenti determinazioni del generico tensore $\boldsymbol{E}_{ilmnst}$ avente la forma (28), nelle quali la i è un indice della ε:

$$(56) \quad \begin{cases} \boldsymbol{E}_{(1)ilmnst}=\varepsilon_{il}a_{mn}a_{st}, & \boldsymbol{E}_{(6)}\ldots=\varepsilon_{il}a_{ms}a_{tn}, & \boldsymbol{E}_{(11)}\ldots=\varepsilon_{il}a_{mt}a_{ns} \\ \boldsymbol{E}_{(2)}\ldots=\varepsilon_{im}a_{ns}a_{tl}, & \boldsymbol{E}_{(7)}\ldots=\varepsilon_{im}a_{nt}a_{ls}, & \boldsymbol{E}_{(12)}\ldots=\varepsilon_{im}a_{nl}a_{st} \\ \boldsymbol{E}_{(3)}\ldots=\varepsilon_{in}a_{st}a_{lm}, & \boldsymbol{E}_{(8)}\ldots=\varepsilon_{in}a_{sl}a_{mt}, & \boldsymbol{E}_{(13)}\ldots=\varepsilon_{in}a_{sm}a_{tl} \\ \boldsymbol{E}_{(4)}\ldots=\varepsilon_{is}a_{tl}a_{mn}, & \boldsymbol{E}_{(9)}\ldots=\varepsilon_{is}a_{tm}a_{nl}, & \boldsymbol{E}_{(14)}\ldots=\varepsilon_{is}a_{tn}a_{lm} \\ \boldsymbol{E}_{(5)}\ldots=\varepsilon_{it}a_{lm}a_{ns}, & \boldsymbol{E}_{(10)}\ldots=\varepsilon_{it}a_{ln}a_{sm}, & \boldsymbol{E}_{(15)}\ldots=\varepsilon_{it}a_{ls}a_{mn}. \end{cases}$$

Nel caso presente la (32′) può porsi nella forma

$$(57) \qquad a_{l_1l_2}a_{l_3s_1}\varepsilon_{s_2s_3} + a_{l_1l_2}a_{l_3s_2}\varepsilon_{s_3s_1} + a_{l_1l_2}a_{l_3s_3}\varepsilon_{s_1s_2} = 0.$$

Per esempio, con la sostituzione $(l_1l_2l_3s_1s_2s_3) = (stlimn)$ la (57) diviene:

$$(57') \qquad a_{st}a_{li}\varepsilon_{mn} + a_{st}a_{lm}\varepsilon_{ni} + a_{st}a_{ln}\varepsilon_{im} = 0.$$

Più in generale, nella (57) facciamo sempre $s_1 = i$ e identifichiamo s_2, s_3, l_1, l_2, l_3 con $l, m, n, s, t,$ prescindendo dall'ordine, in tutti i modi possibili.

Si riconosce facilmente che il primo termine della (57) è il generico dei trenta tensori emisotropi elementari diversi dai quindici tensori (56). Infatti gli indici s_2, s_3 si possono scegliere fra gli indici m, n, s, t, l essenzialmente in $\binom{5}{2} = 10$ modi.

Fatto ciò, l_3 può scegliersi in tre modi e la coppia non ordinata l_1, l_2 resta determinata. Le trenta determinazioni del 1° membro di (57) così ottenute sono appunto i tensori emisotropi elementari esclusi dalle (56) e per (57) essi possono esprimersi mediante semplici combinazioni lineari dei tensori (56).

Vogliamo dimostrare che le prime due colonne nel quadro (56) — ossia i tensori $\boldsymbol{E}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{E}_{(10)}$ — costituiscono una base nello spazio $S''_{2,6}$ dei tensori emisotropi di cui nel titolo. Inoltre, vogliamo esplicitare la (11) nel caso presente. Ai suddetti scopi, ritenendo $\beta_{hk} = \boldsymbol{E}_{(h)} \times \boldsymbol{E}_{(k)}$, — cfr. $(48)_1$ — consideriamo la matrice $\| 2^{-1}\beta_{hk} \|$ $(h, k = 1, \ldots, 10)$. Si ha:

$$\left\| \frac{\beta_{hk}}{2} \right\| = \left\| \begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{matrix} \right\| .$$

Detto D' il suo determinante, $\| B'^{hk} \|$ la matrice complementare e β^{hk} il reciproco di β_{hk} nella matrice $\| \beta_{hk} \|$ $(h, k = 1, ..., 10)$, si ha:

$$\| B'^{hk} \| = \begin{Vmatrix} 8704 & 512 & -3584 & -3584 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & 512 \\ 512 & 8704 & 512 & -3584 & -3584 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 \\ -3584 & 512 & 8704 & 512 & -3584 & 512 & 512 & -3584 & 512 & 512 \\ -3584 & -3584 & 512 & 8704 & 512 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 512 \\ 512 & -3584 & -3584 & 512 & 8704 & 512 & 512 & 512 & 512 & -3584 \\ -3584 & 512 & 512 & 512 & 512 & 8704 & -3584 & 512 & 512 & -3584 \\ 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 8704 & -3584 & 512 & 512 \\ 512 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 8704 & -3584 & 512 \\ 512 & 512 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 8704 & -3584 \\ 512 & 512 & 512 & 512 & -3584 & -3584 & 512 & 512 & -3584 & 8704 \end{Vmatrix} .$$

$$D' = 16384, \quad \beta^{hk} = \frac{B'^{hk}}{2D'} \qquad (h, k = 1, ..., 10). \tag{58}$$

Dalla $(58)_1$, fra l'altro, segue l'indipendenza lineare dei tensori $\boldsymbol{E}_{(r)}$ $(r = 1, ..., 10)$ in armonia col fatto che, come risulta dal quadro al § 2, $N_2''(6) = 10$.

Nel caso presente, $(\gamma_{hk} = \beta_{hk})$, la (11), stante $(58)_2$, può porsi nella forma:

$$\begin{aligned} v^*_{\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} = \frac{1}{16384} \sum_{k=1}^{10} [& B'^{1k} v_{[12]m}{}^m{}_s{}^s + B'^{2k} v_{[1l2]n}{}^{nl} + B'^{3k} v_{[1l}{}^l{}_{2]s}{}^s + \\ & + B'^{4k} v_{[1lm}{}^m{}_{2]}{}^l + B'^{5k} v_{[1l}{}^l{}_n{}^n{}_{2]} + B'^{6k} v_{[12]mn}{}^{mn} + B'^{7k} v_{[1l2]n}{}^{ln} + \\ & + B'^{8k} v_{[1lm2]}{}^{lm} + B'^{9k} v_{[1lm}{}^l{}_{2]}{}^m + B'^{10k} v_{[1lm}{}^{lm}{}_{2]}] E_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} . \end{aligned} \tag{59}$$

I tensori $\boldsymbol{E}_{(11)}$, ..., $\boldsymbol{E}_{(15)}$ possono esprimersi come segue nella considerata base $\boldsymbol{E}_{(1)}$, ..., $\boldsymbol{E}_{(10)}$:

$$(60)\quad \begin{cases} E_{11}=\frac{1}{2}(E_1+E_2-E_3-E_4+E_5+E_6-E_7+E_8+E_9-E_{10}) \\ E_{12}=\frac{1}{2}(E_2+E_3-E_4-E_5+E_1+E_7-E_8+E_9+E_{10}-E_6) \\ E_{13}=\frac{1}{2}(E_3+E_4-E_5-E_1+E_2+E_8+E_9-E_{10}+E_6-E_7) \\ E_{14}=\frac{1}{2}(E_4+E_5-E_1-E_2+E_3+E_9-E_{10}+E_6+E_7-E_8) \\ E_{15}=\frac{1}{2}(E_5+E_1-E_2-E_3+E_4+E_{10}-E_6+E_7+E_8-E_9). \end{cases}$$

§ 13. Tensori emisotropi di rango 6 in S_4 o S_n per $n\neq 2$.

Come risulta dalla tabella del Racah al § 2, ha interesse considerare i tensori emisotropi di rango 6 in S_n per $n\neq 2$, solo nel caso $n=4$. Consideriamo appunto questo caso. Allora, come è stato dimostrato al § 6, ogni tensore emisotropo di rango 6 è una combinazione lineare dei seguenti [6]):

$$(61)\quad \begin{cases} E_{(1)ilmnst}=\varepsilon_{inst}a_{lm}\,, & E_{(6)}\ldots=\varepsilon_{imnt}a_{ls}\,, & E_{(11)}\ldots=\varepsilon_{mnst}a_{il} \\ E_{(2)}\ldots=\varepsilon_{istl}a_{mn}\,, & E_{(7)}\ldots=\varepsilon_{insl}a_{mt}\,, & E_{(12)}\ldots=\varepsilon_{nstl}a_{im} \\ E_{(3)}\ldots=\varepsilon_{itlm}a_{ns}\,, & E_{(8)}\ldots=\varepsilon_{istm}a_{nl}\,, & E_{(13)}\ldots=\varepsilon_{stlm}a_{in} \\ E_{(4)}\ldots=\varepsilon_{ilmn}a_{st}\,, & E_{(9)}\ldots=\varepsilon_{itln}a_{sm}\,, & E_{(14)}\ldots=\varepsilon_{tlmn}a_{is} \\ E_{(5)}\ldots=\varepsilon_{imns}a_{tl}\,, & E_{(10)}\ldots=\varepsilon_{ilms}a_{tn}\,, & E_{(15)}\ldots=\varepsilon_{lmns}a_{it}\,. \end{cases}$$

Nel caso presente ($n=4$), la (32) diviene:

$$(62)\qquad \varepsilon_{s_2s_3s_4s_5}a_{ls_1}+\varepsilon_{s_3s_4s_5s_1}a_{ls_2}+\varepsilon_{s_4s_5s_1s_2}a_{ls_3}+\varepsilon_{s_5s_1s_2s_3}a_{ls_4}+\varepsilon_{s_1s_2s_3s_4}a_{ls_5}=0.$$

Ora sostituiamo nella (62) l'indice l successivamente con $m\ n\ s\ t$ e contemporaneamente sostituiamo (ordinatamente) $s_1, \ldots, s_5$ con quelli degli indici $i\ l\ m\ n\ s\ t$ distinti da quello sostituito ad l. Si ottengono così delle

[6]) La permutazione ciclica $\begin{pmatrix} lmnst \\ mnstl \end{pmatrix}$ non involgente l'indice i lascia invariata ogni colonna del quadro (61) e permuta cicolarmente le righe di questo.

relazioni che per (61) possono scriversi:

$$\text{(63)}\qquad \begin{cases} \boldsymbol{E}_{11}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_8+\boldsymbol{E}_6-\boldsymbol{E}_5\,, & \boldsymbol{E}_{12}=\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_9+\boldsymbol{E}_7-\boldsymbol{E}_1\,, \\ \boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{E}_{10}+\boldsymbol{E}_8-\boldsymbol{E}_2\,, & \boldsymbol{E}_{14}=\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{E}_6+\boldsymbol{E}_9-\boldsymbol{E}_3\,, \\ \boldsymbol{E}_{15}=\boldsymbol{E}_5-\boldsymbol{E}_7+\boldsymbol{E}_{10}-\boldsymbol{E}_4\,. & \end{cases}$$

Per $r=11, ..., 15$ $\boldsymbol{E}_{(r)ilmnst}$ è dunque una combinazione lineare dei tensori $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_{10}$, inclusi fra i tensori (61). Siccome $N_4''(6)=10$ [§ 2], e ogni tensore emisotropo di rango 6 è una combinazione lineare dei tensori (61), i tensori $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_{10}$ devono essere linearmente indipendenti. Del resto la loro indipendenza risulterà direttamente da successive considerazioni.

Intendendosi $\beta_{hk}=\boldsymbol{E}_h \times \boldsymbol{E}_k$ — cfr. $(48)_1$ —, posto $4\cdot 3!\beta'_{hk}=\beta_{hk}$, e detto B'_{hk} il complemento algebrico di β'_{hk} nella matrice $\|\beta'_{hk}\|$ $(h, k=1, ..., 10)$, D' il determinante della stessa matrice, e β^{hk} il reciproco di β_{hk} nella matrice $\|\beta_{hk}\|$ $(h, k=1, ..., 10)$, si ha

$$\|B'^{hk}\|=\left\|\begin{array}{cccccccccc} 3\cdot 6^5 & -6^5 & 0 & 0 & -6^5 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 \\ -6^5 & 3\cdot 6^5 & -6^5 & 0 & 0 & 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 \\ 0 & -6^5 & 3\cdot 6^5 & -6^5 & 0 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 \\ 0 & 0 & -6^5 & 3\cdot 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 \\ -6^5 & 0 & 0 & -6^5 & 3\cdot 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 \\ 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 3\cdot 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 & 0 \\ -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & 0 & 3\cdot 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 \\ -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & 0 & 3\cdot 6^5 & 0 & -6^5 \\ 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 & 0 & 3\cdot 6^5 & 0 \\ 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 & 0 & 3\cdot 6^5 \end{array}\right\|,$$

$$\text{(64)}\qquad D'=46656,\quad \beta^{hk}=\frac{B'^{hk}}{4\cdot 3!D'}=\frac{B'^{hk}}{1.119.744}\,.$$

Nel caso presente ($\boldsymbol{b}_h=\boldsymbol{E}_h$, $\gamma_{hk}=\beta_{hk}$) la (11) può scriversi:

$$(65) \quad v^*_{\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} = \frac{1}{1119744} \sum_{k=1}^{10} \varepsilon_{ilmn} [B'^{1k} v^{is_s lmn} + B'^{2k} v^{ins_s lm} + B'^{3k} v^{imns_s l} + B^{4'k} v^{ilmns_s} + B'^{5k} v^{islmn_s} + B'^{6k} v^{islm_s n} + B'^{7k} v^{inslm_s} + B'^{8k} v^{isn_s lm} + B'^{9k} v^{imsn_s l} + B'^{10k} v^{ilmsn_s}] E_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} \,.$$

dove sono stati messi in evidenza gli invarianti lineari (elementari) emisotropi del tensore $\boldsymbol{v}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Pastori Maria: *Sui tensori isotropi: relazione fra le componenti,* Rend. Acc. Lincei, serie 6ª, vol. XII, 1930, pag. 374.

[2] Pastori Maria: *Espressione generale dei tensori isotropi,* Rend. Acc. Lincei, serie 6ª, vol. XII, 1930, pag. 499.

[3] Racau G.: *Numero dei tensori isotropi ed emisotropi in spazi a più dimensioni,* Rend. Acc. Lincei, serie 6ª, vol. XVIII, 1933, pag. 135.

[4] Smith G. F. and Rivlin R. S.: *The anisotropic tensors,* Quart. Appl. Math., vol. XV, 1957, pag. 308.

Manoscritto pervenuto il 23 aprile 1969.