RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIO MATTEI

Sulla propagazione di piccole perturbazioni in un plasma rotante in presenza di effetto Hall

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 349-361
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__349_0>

SULLA PROPAGAZIONE DI PICCOLE PERTURBAZIONI IN UN PLASMA ROTANTE IN PRESENZA DI EFFETTO HALL

GIULIO MATTEI (Pisa) *)

SUNTO - Si studia l'influenza dell'effetto Hall sulla propagazione di piccole perturbazioni piane in un plasma comprimibile in rotazione uniforme descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica nello schema del continuo.

SUMMARY - In this paper we discuss the propagation of small plane perturbations in a rotating compressible plasma considered as a continuous medium taking account of the Hall effect.

1. Introduzione.

È noto che in Fisica dei plasmi assume spesso un ruolo rilevante l'effetto Hall (cfr. per es. [1] e la Bibliografia ivi indicata). Ciò accade, in particolare, (cfr. per es. T. G. Cowling [2] Cap. VI) in vari casi relativi a plasmi di interesse Astrofisico; per questi ultimi è d'altronde nota l'importanza degli effetti che su di essi ha una rotazione uniforme (per una Bibliografia al riguardo cfr. per es. [3]).

È sembrato perciò di un qualche interesse lo studio, oggetto del presente lavoro, della influenza dell'effetto Hall sulla propagazione di piccole perturbazioni piane in un plasma comprimibile in rotazione uniforme descritto dalle equazioni magnetofluidodinamiche (MFD) nello schema del continuo.

Analogo studio, in assenza di effetto Hall, è stato fatto in un pre-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R. (Anno 1970) presso l'Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini » della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.

cedente lavoro [4]. Come in [4], anche qui il mezzo è considerato barotropico e il campo magnetico uniforme nello stato imperturbato.

Nella parte I si considera il caso del mezzo non viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità, mentre nella parte II si esamina l'influenza della conducibilità elettrica finita; in entrambe si studia la propagazione sia nella direzione ortogonale che in quella parallela all'asse di rotazione.

Parte I

MEZZO NON VISCOSO E PERFETTO CONDUTTORE DELL'ELETTRICITÀ

2. Le equazioni delle perturbazioni.

Con riferimento a una terna di assi uniformemente rotante con la velocità di rotazione $\underline{\Omega}$ della massa fluida, le equazioni delle perturbazioni correntemente usate sono

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho_0}\operatorname{grad}\rho_* + \frac{1}{4\pi\mu\rho_0}(\operatorname{rot}\underline{b})\wedge\underline{B}_0 + 2\underline{v}\wedge\underline{\Omega} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \underline{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\underline{v}\wedge\underline{B}_0) + \beta\operatorname{rot}(\underline{B}_0\wedge\operatorname{rot}\underline{b}) \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}\underline{b} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} = -\rho_0\operatorname{div}\underline{v} \tag{2.4}$$

dove si è posto

$$\beta = \frac{c^2\beta_H}{4\pi\mu} \tag{2.5}$$

essendo β_H il coefficiente di Hall.

Nelle (2.1)-(2.4) a è la velocità locale del suono, $\underline{v}$, $\underline{b}$, ρ_* le perturbazioni dello stato d'equilibrio relativo nel quale i valori dell'induzione magnetica e della densità sono $\underline{B}_0$ e ρ_0.

Per quanto riguarda queste equazioni cfr. per es. [3] n. 1 e 2 e, per la (2.2), [1] n. 5.

Assumiamo come terna di riferimento rotante una terna di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z di versori $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$ ed $\underline{i}_3$ con $\underline{i}_3$ parallelo e concorde ad $\underline{\Omega}$. Si ha quindi

$$\underline{\Omega}=\Omega\underline{i}_3 \qquad (\Omega=|\underline{\Omega}|).$$

3. Propagazione in direzione ortogonale all'asse di rotazione.

Assunto l'asse x parallelo alla direzione di propagazione, avendosi nel caso generale

$$\underline{B}_0=B_{0x}\underline{i}_1+B_{0y}\underline{i}_2+B_{0z}\underline{i}_3\,,$$

le (2.1)-(2.4) forniscono il seguente sistema di equazioni scalari

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho_*}{\partial x}-\frac{B_{0y}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{B_{0z}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x}+2v_y\Omega \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{B_{0x}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x}-2v_x\Omega \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{B_{0x}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t}=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t}=B_{0x}\frac{\partial v_y}{\partial x}-B_{0y}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\beta B_{0x}\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t}=B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial x}-B_{0z}\frac{\partial v_x}{\partial x}-\beta B_{0x}\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x}=0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial x}. \tag{3.8}$$

Da (3.4) e (3.7) abbiamo intanto $b_x = \text{cost} = 0$, mentre le rimanenti sei perturbazioni v_x, v_y, v_z, b_y, b_z e ρ_* soddisfano al sistema di sei equazioni differenziali (3.1), (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) e (3.8). Di tale sistema, come già in [4], cerchiamo soluzioni del tipo

$$(3.9) \qquad \begin{cases} v_x = \bar{v}_x e^{i(kx-\omega t)} & b_z = \bar{b}_z e^{i(kx-\omega t)} \\ v_y = \bar{v}_y e^{i(kx-\omega t)} & b_y = \bar{b}_y e^{i(kx-\omega t)} \\ v_z = \bar{v}_z e^{i(kx-\omega t)} & \rho_* = \bar{\rho}_* e^{i(kx-\omega t)} \end{cases}$$

di cui è chiaro il significato fisico dei simboli; corrispondentemente si perviene alla seguente equazione di dispersione

$$(3.10) \qquad (A_x^2 k^2 - \omega^2)\{\omega^4 - [k^2(A^2+a^2)+4\Omega^2]\omega^2 + a^2 A_x^2 k^4\} + \\ + k^4\omega^2\beta^2 B_{0x}^2(\omega^2 - a^2k^2 - 4\Omega^2) - 4\Omega\omega^2\beta A_x^2 k^4 B_{0z} = 0,$$

dove

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \frac{1}{4\pi\mu\rho_0}(B_{0x}^2 + B_{0y}^2 + B_{0z}^2)$$

è il quadrato della velocità di Alfvén.

Consideriamo dapprima onde piane armoniche nello spazio e perciò assumiamo k prefissato reale.

La (3.10) è un'equazione di terzo grado in ω^2 a coefficienti reali; quindi, per ogni prefissato valore reale del numero d'onda, ci sono in generale tre possibili modi di propagazione. Il termine fra parentesi tonde eguagliato a zero caratterizza l'onda di Alfvén pura. Quello fra parentesi graffe eguagliato a zero caratterizza, (cfr. [4] n. 1), i due modi di propagazione nel plasma rotante che corrispondono all'onda acustica modificata e all'onda idromagnetica modificata [1]) del plasma non rotante; su queste due onde la rotazione introduce un effetto dispersivo. In assenza di effetto Hall l'onda di Alfvén pura è disaccoppiata dalle altre due, mentre ciò non accade più in presenza di detto effetto, come la (3.10) mette in rilievo.

Passiamo ora ad esaminare dei casi particolari apparsi di interesse.

---

[1]) Onde « slow » e « fast » nella letteratura Anglosassone.

3.1. *Campo magnetico ortogonale alla direzione di propagazione* ($B_{0x}=0$).

Nel caso presente scompare l'influenza dell'effetto Hall, come si deduce dalle (3.5) e (3.6), e perciò sussistono inalterate le considerazioni fatte nel n. 1.2 di [4].

La (3.10) fornisce per le velocità di fase u_{I}, u_{II}, u_{III} dei tre modi di propagazione di cui sopra i valori: $u_{\mathrm{I}}=u_{\mathrm{II}}=0$ e

$$u_{\mathrm{III}}=\pm(A^2+a^2+4\Omega^2/k^2)^{1/2}. \tag{3.1-1}$$

Per $\Omega=0$ la (3.1-1) caratterizza l'onda magnetoacustica (cfr. per es. R. Nardini [5] n. 3, H. Alfvén [6] pp. 99-100), la quale quindi non è influenzata dall'effetto Hall; osserviamo che, contrariamente a quanto qui accade per il mezzo barotropico, per il mezzo incomprimibile (cfr. [1] n. 6.3), sia in assenza che in presenza di corrente Hall, non c'è propagazione in direzione ortogonale al campo magnetico.

Per $\Omega\neq0$ la (3.1-1) mette in luce il fatto che la rotazione incrementa la velocità di fase dell'onda magnetoacustica di un termine funzione di k, oltrechè di Ω, introducendo quindi un effetto dispersivo (per l'indicazione di un possibile ordine di grandezza di detto termine, come pure per quanto riguarda la velocità di gruppo, cfr. [4]).

Per quanto riguarda infine le onde piane armoniche nel tempo (ω prefissata positiva), la (3.10) mette in rilievo l'esistenza della frequenza critica $\nu_c=\omega_c/2\pi$ con

$$\omega_c=2\Omega. \tag{3.1-2}$$

Infatti, mentre per $\omega\leq\omega_c$ non c'è propagazione, per $\omega>\omega_c$ c'è propagazione e la velocità di fase ha il valore

$$\pm\omega\left(\frac{A^2+a^2}{\omega^2-\omega_c^{\,2}}\right)^{1/2}.$$

3.2. *Campo magnetico parallelo alla direzione di propagazione* ($B_{0y}=$ $=B_{0z}=0$).

Scegliamo $\underline{i}_1$ in modo da avere $\underline{B}_0=B_0\underline{i}_1(B_0=|\underline{B}_0|)$.

Esaminiamo dapprima il caso $\Omega=0$ e, successivamente, quello $\Omega\neq0$.

3.2 *a*). *Plasma non rotante.*

La (3.10) in tal caso diventa

$$(a^2k^2-\omega^2)[(A^2k^2-\omega^2)^2-\omega^2\beta_*^2k^4]=0 \tag{3.2-1}$$

dove si è posto

$$\beta_*=\beta B_0\,. \tag{3.2-2}$$

La (3.2-1) si spezza nella

$$\omega^2-a^2k^2=0, \tag{3.2-3}$$

che caratterizza l'onda acustica pura, non influenzata dall'effetto Hall, e nella

$$(A^2k^2-\omega^2)^2-\omega^2\beta_*^2k^4=0. \tag{3.2-4}$$

Dal sistema di equazioni differenziali (3.1)-(3.8) discende che, nel caso in esame, le perturbazioni v_x e ρ_* sono disaccoppiate dalle altre e obbediscono, per (3.1) e (3.8), separatamente, alla equazione di d'Alembert

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(v_x\,,\ \rho_*)=0 \tag{3.2-5}$$

da cui la (3.2-3).

Le rimanenti perturbazioni v_y, v_z, b_y e b_z soddisfano alle (3.2), (3.3), (3.5) e (3.6) che, in corrispondenza alle soluzioni (3.9), conducono alla (3.2-4). Appare qui, tipicamente, l'effetto di accoppiamento dovuto alla corrente Hall, già riscontrato in [1] per il mezzo incomprimibile: in assenza di tale corrente infatti le perturbazioni v_y e b_y sono disaccoppiate dalle altre e obbediscono, per (3.2) e (3.5), separatamente, alla equazione di d'Alembert

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-A^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(v_y\,,\ b_y)=0,$$

caratterizzante l'onda di Alfvén pura. Allo stesso modo si comporta la coppia di perturbazioni v_z, b_z.

La (3.2-4) si spezza nelle

$$\omega^2 - \beta_* k^2 \omega - A^2 k^2 = 0$$

$$\omega^2 + \beta_* k^2 \omega - A^2 k^2 = 0$$

che coincidono con le (7.1) e (7.2) di [1], dove si faccia $\theta = 0$; queste ultime sono relative alla propagazione nella direzione del campo magnetico di piccole perturbazioni piane nel mezzo incomprimibile [2]). Si trasportano perciò al mezzo barotropico i risultati trovati al n. 7 di [1] relativi alla influenza dell'effetto Hall sull'onda di Alfvén nel mezzo incomprimibile. Specificatamente:

1) L'onda piana di Alfvén pura a causa della corrente Hall si scinde in due onde polarizzate circolarmente le cui velocità di fase sono date da

$$u_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta_*^2 k^2 + 4A^2} \pm \beta_* k \right). \tag{3.2-6}$$

2) Una delle due onde suddette ha velocità maggiore e l'altra minore della velocità di Alfvén e la differenza delle loro velocità di fase è direttamente proporzionale al campo magnetico, al numero d'onda e al coefficiente di Hall.

3) Per dette onde, al contrario di ciò che accade per l'onda di Alfvén pura, non c'è equipartizione fra la densità d'energia magnetica e la densità d'energia cinetica.

4) La loro velocità di gruppo è ancora diretta, come nel caso dell'onda di Alfvén, parallelamente al campo magnetico, ma ora, a causa dell'effetto Hall, non coincide più con la velocità di fase.

5) Per le onde di prefissata frequenza infine, la corrente Hall introduce un effetto di soglia con frequenza critica proporzionale direttamente al campo magnetico e inversamente al coefficiente di Hall e alla densità.

---

[2]) In [1] al n. 7 è $\underline{B}_0 = B_0 \underline{i}_3$ e si è assunto l'asse z quale direzione di propagazione; le perturbazioni poi sono considerate proporzionali al fattore $\exp i(\omega t - kz)$ e non a $\exp i(kz - \omega t)$ come in [4] e nel presente lavoro.

3.2 *b*). *Plasma rotante.*

L'equazione di dispersione è ora

(3.2-7) $(a^2k^2-\omega^2)\{(A^2k^2-\omega^2)^2-\omega^2\beta_*^2k^4\}+4\Omega^2\omega^2[\omega^2-A^2k^2-\beta_*^2k^4]=0.$

Il termine fra parentesi tonde eguagliato a zero caratterizza l'onda acustica pura, mentre quello fra parentesi graffe eguagliato a zero caratterizza le due onde polarizzate circolarmente nelle quali, nel plasma non rotante, si scinde l'onda di Alfvén pura, come sopra si è visto. La rotazione quindi, come la (3.2-7) mette in rilievo, ha un effetto di accoppiamento fra questi tre tipi di onde.

4. Propagazione in direzione parallela all'asse di rotazione.

Assunto l'asse x nel piano di $\underline{B}_0$ ed $\underline{\Omega}$ le (2.1)-(2.4) conducono al seguente sistema di equazioni scalari

(4.1) $$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{B_{0z}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_x}{\partial z}+2v_y\Omega$$

(4.2) $$\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{B_{0z}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial z}-2v_x\Omega$$

(4.3) $$\frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_*}{\partial z}-\frac{B_{0x}}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_x}{\partial z}$$

(4.4) $$\frac{\partial b_x}{\partial t}=-B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial z}+B_{0z}\frac{\partial v_x}{\partial z}+\beta B_{0z}\frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2}$$

(4.5) $$\frac{\partial b_y}{\partial t}=B_{0z}\frac{\partial v_y}{\partial z}-\beta B_{0z}\frac{\partial^2 b_x}{\partial z^2}$$

(4.6) $$\frac{\partial b_z}{\partial t}=0$$

(4.7) $$\frac{\partial b_z}{\partial z}=0$$

(4.8) $$\frac{\partial\rho_*}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Da (4.6) e (4.7) abbiamo intanto: $b_z = \text{cost} = 0$.

Sono apparsi di interesse i seguenti casi particolari:

4.1. *Campo magnetico ortogonale alla direzione di propagazione* ($B_{0z}=0$).

Analogamente a quanto accadeva al n. 3.1 anche qui scompare l'influenza dell'effetto Hall, come si deduce da (4.4) e (4.5), e perciò resta inalterato quanto visto nel n. 2.1 di [4]. In particolare da (4.3), (4.4) e (4.8) discende la

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = (a^2 + A^2)\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2},$$

che indica la presenza, nel caso in esame, di un'onda magnetoacustica pura, non influenzata dall'effetto Hall nè dalla rotazione.

4.2. *Campo magnetico parallelo alla direzione di propagazione* ($B_{0x}=0$).

In questo caso v_z *e* ρ_* sono disaccoppiate dalle altre perturbazioni e obbediscono, per (4.3) e (4.8), alla equazione di d'Alembert

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(v_z\,,\ \rho_*) = 0 \tag{4.2-1}$$

caratterizzante l'onda acustica pura.

Per le rimanenti perturbazioni v_x, v_y, b_x e b_y procedendo al solito modo si è condotti alla seguente equazione di dispersione

$$\omega^4 - (2A^2k^2 + 4\Omega^2 + \beta^2 B_{0z}^2 k^4)\omega^2 + (A^2 + 2\Omega\beta B_{0z})^2 k^4 = 0. \tag{4.2-2}$$

La (4.2-2) per $\beta=0$ ridà la (31) di [4].

Per le onde piane armoniche nello spazio, dato che il discriminante della (4.2-2) risulta sempre positivo per qualsiasi valore dei parametri, possiamo trarre la conclusione che, nel caso presente, per ogni prefissato valore del numero d'onda, ci sono tre modi di propagazione sempre stabili: l'onda acustica pura e i due modi caratterizzati da

(4.2-2), le cui velocità di fase sono date dalla

$$(4.2\text{-}3) \qquad u_{1,2} = \pm$$

$$\pm\left\{\frac{(2A^2+4\Omega^2/k^2+\beta^2B_{0z}^2k^2)\pm(2\Omega/k^2-\beta B_{0z})[(2\Omega+\beta B_{0z}k^2)^2+4A^2k^2]^{1/2}}{2}\right\}^{1/2}.$$

La (4.2-3) per $\Omega\neq 0$ e $\beta=0$ ridà la (32) di [4] e per $\Omega=0$ e $\beta=0$ fornisce

$$u_{1,2} = \pm A,$$

come deve essere.

Osserviamo che, sia la corrente Hall che la rotazione, mentre non influenzano il primo modo di propagazione, sugli altri due introducono un effetto dispersivo, come mette in evidenza la (4.2-3).

Parte II

EFFETTI DISSIPATIVI

È noto (cfr. per es. V. C. A. Ferraro, C. Plumpton [7] p. 84, T. G. Cowling [2] p. 38) che, di solito, in problemi Astrofisici l'azione dissipativa della viscosità è trascurabile rispetto a quella della conducibilità elettrica finita. In conseguenza di ciò in questa parte consideriamo il plasma non viscoso, ma dotato di una conducibilità elettrica finita. Va d'altronde osservato che il ritenere i termini viscosi, come per es. si è fatto in [4], non comporterebbe particolari difficoltà, se si eccettua un appesantimento dei calcoli algebrici.

Indicata con σ la conducibilità elettrica e posto

$$\chi = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$$

le equazioni delle perturbazioni sono ora le (2.1), (2.3) e (2.4) inalterate e la (2.2) con l'aggiunta a secondo membro del termine $\chi\nabla^2\underline{b}$.

5. Propagazione in direzione ortogonale all'asse di rotazione.

Nel caso in cui il campo magnetico è ortogonale alla direzione di propagazione ($B_{0x}=0$) anche ora, come già per $\chi=0$ (cfr. n. 3.1), scompare l'influenza dell'effetto Hall e quindi ci si può direttamente riferire a quanto visto in [4]; per conseguenza studiamo qui il caso in cui il campo magnetico è parallelo alla direzione di propagazione.

Scelto anche qui $\underline{i}_1$ in modo da avere $\underline{B}_0=B_0\underline{i}_1$, $B_0=|\underline{B}_0|$, riferiamoci dapprima al plasma non rotante.

Dal sistema di equazioni differenziali scalari caratterizzanti il caso in esame deduciamo che anche qui $b_x=\text{cost}=0$ e v_x e ρ_* soddisfano ancora la (3.2-5) caratterizzante l'onda acustica pura.

Per le perturbazioni v_y, v_z, b_y e b_z, ancor qui accoppiate dalla corrente Hall, si è condotti, procedendo al solito modo, alla seguente equazione di dispersione

$$(5.1) \qquad [i\omega(i\omega-\chi k^2)+A^2k^2]^2-\beta_*^2\omega^2k^4=0.$$

La (5.1), che per $\chi=0$ ridà la (3.2-4), coincide, con l'avvertenza della nota [2]), con l'equazione di dispersione trovata in [1] relativa al mezzo incomprimibile (analogamente a quanto si è già visto accadere alla (3.2-4)). Si trasporta quindi anche qui al mezzo barotropico quanto da detta equazione di dispersione si è dedotto al n. 6.2 di [1] per il mezzo incomprimibile. In particolare, per le onde di prefissata frequenza, la determinazione della velocità di fase e della profondità di penetrazione e il confronto di questa ultima con quella relativa a un ordinario conduttore solido; per le onde di prefissato numero d'onda il fatto che, mentre in assenza di effetto Hall c'è propagazione solo per i valori di k minori di un certo valore critico, cfr. [1] (6.2.19), in presenza di tale effetto si ha propagazione per qualsiasi valore di k.

Per quanto riguarda infine il plasma rotante si riscontra anche qui l'effetto di accoppiamento dovuto alla rotazione, già visto al n. 3.2 b) per il caso $\chi=0$, fra il modo di propagazione acustico puro e i due modi di propagazione caratterizzati dalla (5.1).

6. Propagazione in direzione parallela all'asse di rotazione.

Nel caso in cui il campo magnetico è ortogonale alla direzione di propagazione ($B_{0z}=0$), anche ora, come già per $\chi=0$ (cfr. n. 4.1), scompare l'influenza dell'effetto Hall e perciò sussiste inalterato quanto visto nel n. 4.1 di [4]; ci riferiamo perciò al caso in cui il campo magnetico è parallelo alla direzione di propagazione ($B_{0x}=0$).

Anche nel caso presente abbiamo $b_z=$ cost $=0$ e v_z e ρ_* soddisfacenti la (4.2-1). Per le rimanenti perturbazioni v_x, v_y, b_x e b_y si è condotti alla seguente equazione di dispersione

$$(6.1)\quad [A^2k^2+i\omega(i\omega-\chi k^2)]^2-\omega^2\beta^2B_{0z}^2k^4+4\Omega^2[(i\omega-\chi k^2)^2+\beta^2B_{0z}^2k^4]+ \\ +4A^2\Omega\beta B_{0z}k^4=0.$$

La (6.1) per $\chi=0$ ridà la (4.2-2) e per $\beta=0$ la corrispondente di [4] (n. 4.2).

7. Conclusioni.

a) *Propagazione in direzione ortogonale all'asse di rotazione.*

1) Nel caso di direzione generica del campo magnetico si riscontra ad opera della corrente Hall un effetto di accoppiamento fra l'onda di Alfvén pura e i due modi di propagazione nel plasma rotante che corrispondono all'onda acustica modificata e all'onda idromagnetica modificata del plasma non rotante.

2) Se il campo magnetico è ortogonale alla direzione di propagazione scompare l'influenza dell'effetto Hall e, per conseguenza, sussistono, per questo caso, i risultati di un precedente lavoro [4] nel quale si trascurava l'effetto suddetto.

3) Se il campo magnetico è parallelo alla direzione di propagazione, per il plasma non rotante si riscontra che l'onda acustica non è influenzata dalla corrente Hall, mentre l'onda di Alfvén, a causa di detta corrente, si scinde in due onde polarizzate circolarmente che godono di varie proprietà, cfr. 3.2 *a*); l'influenza su queste due ultime onde dovuta alla conducibilità elettrica finita è indicata al n. 5. Sui tre suddetti tipi di onde la rotazione introduce un effetto di accoppiamento.

b) *Propagazione in direzione parallela all'asse di rotazione.*

Ancor qui se il campo magnetico è ortogonale alla direzione di propagazione scompare l'influenza dell'effetto Hall.

Se il campo magnetico è parallelo alla direzione di propagazione, per ogni prefissato valore reale del numero d'onda ci sono tre modi di propagazione sempre stabili: quello acustico e i due con velocità di fase date dalla (4.2-3); sia la corrente Hall che la rotazione non influenzano il primo, mentre sugli altri due introducono un effetto dispersivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] MATTEI, G.: *Sulla influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un fluido incomprimibile,* Annali di Matematica pura ed applicata, 84 (1970), 1-32.

[2] COWLING, T. G.: *Magnetohydrodynamics,* Interscience, New York, 1957.

[3] MATTEI, G.: *Wave propagation and instabilities in a rotating anisotropic plasma,* Meccanica, 3 (1968), 214-30.

[4] MATTEI, G.: *Sulla propagazione di piccole perturbazioni magnetofluidodinamiche in un fluido comprimibile in rotazione uniforme,* Rendiconti Seminario Matematico Università Padova, 37 (1967), 324-40.

[5] NARDINI, R.: *Sulle onde magnetofluidodinamiche e magneto-acustiche,* Atti Simposio Magnetofluidodinamica, Bari 1961, pp. 160-67, Ed. Cremonese, Roma.

[6] ALFVÉN, H.: *Cosmical Electrodynamics,* Oxford, 1963.

[7] FERRARO, V. C. A., PLUMPTON, C.: *Magneto-fluid mechanics,* Oxford, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 gennaio 1970.