RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

IULIUS GY. MAURER
MIKLÓS SZILÁGYI

Sur les produits filtrés de certains groupes topologiques

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 247-259
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__247_0>

SUR LES PRODUITS FILTRÉS DE CERTAINS GROUPES TOPOLOGIQUES

IULIUS GY. MAURER — MIKLÓS SZILÁGYI *)

Il est bien connue que dans le cas des groupes abstraits il existe une connexion étroite entre les notions de produit direct discret extérieur et de produit direct discret intérieur: le produit direct $\mathcal{G}$ d'une famille $\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ de groupes peut être représenté comme le produit discret d'une famille $\{H'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ de sous-groupes normaux de $\mathcal{G}$, tel que $H'_\nu \cong H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. Une telle liaison n'a pas lieu évidement dans le cas de la notion de produit direct complet, parce que même la notion de produit direct complet intérieur n'a pas de sens dans le cas de groupes abstraits.

Dans cette note nous éliminons cette lacune dans de certains conditions topologiques. Nous définirons une décomposition d'un groupe G muni par une topologie filtrée $\mathfrak{F}$, qui généralise la notion de produit direct intérieur — c'est-à-dire la notion de décomposition directe — des groupes abstraits: si $\mathfrak{F}$ est la topologie discrète, alors la notion de produit filtré coïncide avec la notion de produit direct discret. Nous démontrerons, que si G est le produit filtré d'une famille $\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ de sous-groupes normaux de G, alors tout élément de G peut être représenté d'une manière unique comme un produit fini ou infini d'éléments, qui appartiennent aux sous-groupes H_ν $(\nu\in\Delta)$. Si $\mathcal{H}=\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ représente une famille quelconque de groupes munis par des topologie filtrées $\mathfrak{F}_\nu$, alors leurs produit direct complet $\mathcal{G}=\underset{\nu\in\Delta}{\times} H_\nu$ — muni par la topologie produit

---

*) Indirizzo degli A.A.: Iulius Gy. Maurer, Institut Mathématique, Université, Cluj, Roumanie.

Miklós Szilágyi, Faculté de Mathématique, Institut Pédagogique, Tg.-Mureş, Roumanie.

induite par les topologies $\mathfrak{F}_\nu$ — peut être représenté comme le produit filtré d'une famille $\mathcal{H}'=\{H'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ de sous-groupes normaux de $\mathcal{G}$, où $H'_\nu\cong H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. Par conséquent la notion de produit filtré peut être considérée comme une notion de produit direct extérieur dans le cas des groupes munis par des topologies filtrées.

Observons que le note contient une série de lemmes, qui établissent certains propriétés concernant les produits infinis, définis dans une groupe muni par une topologie filtrée. Les premiers trois lemmes — énoncés dans des conditions restrictives — sont contenus aussi dans le travail [6].

Soit G un groupe, ayant une famille $\{G_\xi\}_{\xi\in I}$ de sous-groupes normaux [1]), tels que

1*. *I est un ensemble quelconque d'indices, dirigé par une relation* $\leq$;

2*. *si* $\xi_1\geq\xi_2$ $(\xi_1, \xi_2\in I)$, *alors* $G_{\xi_1}\subseteq G_{\xi_2}$;

3*. $\bigcap\limits_{\xi\in I} G_\xi=\{e\}$, *où e désigne l'élément unité de G.*

Observation. Les conditions 1* et 2* sont équivalentes avec le fait que même *la famille* $\{G_\xi\}_{\xi\in I}$ *de sous-groupes normaux de G forme un système dirigé par rapport la relation d'inclusion.*

Si on considère *la famille* $\{G_\xi\}_{\xi\in I}$ *de sous-groupes normaux de G comme un système complet de voisinages de l'élément unité* $e\in G$, *alors G devient un groupe topologique de Hausdorff* (voir par ex. [4] au [5]). La topologie $\mathfrak{F}$ introduite de cette manière est denommée topologie filtrée [1].

Nous dirons qu'*un système* (dirigé) $\{a_\xi\}_{\xi\in I}$ $(a_\xi\in G)$ *est fondamental respectivement converge vers* $a\in G$ $(a_\xi\to a)$ si et seulement si pour tout $\xi\in I$ il existe un $\xi_0\in I$, tel que $a_\nu^{-1}a_\mu\in G_\xi$ pour tous ν, $\mu\geq\xi_0$ $(\nu, \mu\in I)$, respectivement $a_\nu^{-1}a\in G_\xi$ pour tous les $\nu\geq\xi_0$. Nous supposons que *l'espace topologique* $(G, \mathfrak{F})$ *est complet*, c'est-à-dire que tous les systèmes fondamentaux sont convergents.

Soit $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ un système infini quelconque d'éléments de G. Pour

---

[1]) Nous utiliserons les notations $A\subseteq| G$ respectivement $A\lhd G$ pour exprimer le fait que $A\subseteq G$ est un sous-groupe respectivement un sous-groupe normal de G.

introduire la notion de produit de ce système, nous utiliserons *une notion de convergence Moore-Smith particulière,* notamment nous dirons que le système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ Δ-*converge* vers l'élément $a\in G$ ($a_\nu \xrightarrow{\Delta} a$), si et seulement si pour tout $\xi\in I$ il existe un sous-ensemble fini $\Delta_0=\Delta_0(\xi)\subset\Delta$, tel que $a_\nu^{-1}a\in G_\xi$ pour tous les $\nu\in\Delta\backslash\Delta_0$. Supposons que $\Delta=(\Delta, <)$ *est un ensemble (totalement) ordonné et que* $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$. Désignons par A_ξ ($\xi\in I$) le produit (fini) d'éléments $a_\nu\notin G_\xi$, où l'ordre des facteurs est déterminé par la relation $<$.*Le système* $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$ *est denommé produit* πa_ν *du système* $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$[2]). Si le système dirigé $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$ converge vers l'élément $a\in G$ ($A_\xi \to a$), alors a est denommé *valeur* de πa_ν. Si au moins un des ensembles I ou Δ est fini, on définit le produit πa_ν *comme le produit (fini) de tous les éléments de* $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, *qui diffèrent de lélément* $e\in G$. Le produit πa_ν *converge inconditionnellement,* si et seulement si la convergence et le valeur de πa_ν ne dépendent pas de l'ordre des facteurs de πa_ν, donc de la relation d'ordre de Δ.

LEMME 1. *Le produit* πa_ν *est convergent.*

DÉMONSTRATION. L'affirmation du théorème est évidement vraie dans le cas où moins un des ensembles I et Δ est fini. Supposons donc que I et Δ sont des ensembles infinis. Soit ξ élément arbitraire de I. Puisque $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$, il s'ensuit que tout au plus un nombre fini d'éléments $a_{\nu_i}\in\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ ($i=1, 2, ..., k$) n'appartiennent pas à G_ξ. Donc si ν, $\mu\geq\xi=\xi_0$ (ν, $\mu\in I$), — c'est-à-dire si G_ν, $G_\mu\subseteq G_\xi$ — alors A_ν et A_μ contiennent les éléments $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, ..., a_{\nu_k}$ comme des facteurs et tous les autres facteurs possibles de A_ν et A_μ appartiennent à G_ξ. Puisque $G_\xi\lhd G$, il s'ensuit que $A_\nu^{-1}A_\mu\in G_\xi$. In en résulte — en tenant compte du fait que $(G, \mathfrak{F})$ est un espace complet — que πa_ν est convergent.

LEMME 2. *Soit* πa_ν *un produit inconditionnellement convergent,* $\pi a_\nu=a$ *et désignons par* π_ρ *le produit qu'on obtient de* πa_ν *par la suppression de l'élément* a_ρ[3]). *Alors le produit* π_ρ *converge inconditionnellement et* $\pi_\rho=a_\rho^{-1}a$.

---

[2]) Si les éléments d'un système quelconque $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ sont commutatifs deux a deux, alors la définition de πa_ν peut être donnée sans tenir compte de l'ordre de Δ.

[3]) Équivalente avec la substitution de a_ρ par l'élément unité e de G.

DÉMONSTRATION. Soit O' un ordre quelconque de Δ dans lequel a_ρ est le premier élément de $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ et soit $\pi a'_\nu$ le produit attaché au système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta'}$, ordonné d'après la relation O'. Puisque πa_ν converge inconditionnellement, il s'ensuit que $\pi a'_\nu=a$, donc pour tout $\xi\in I$ il existe un $\xi'_0\in I$, tel que $(A'_\lambda)a\in G_\xi$ pour $\lambda\geq\xi_0$. Désignons par π'_ρ le produit obtenu de $\pi a'_\nu$ par la suppression de l'élément a_ρ et soient ${}_\rho A'_\lambda$ $(\lambda\in I)$ les produits partiels de ce produit. Nous avons pour tout $\lambda\geq\xi_0$ les relations suivantes:

$$({}_\rho A'_\lambda)^{-1}(a_\rho^{-1}a)=[a_\rho({}_\rho A'_\lambda)]^{-1}a=\begin{cases}(A'_\lambda)^{-1}a\in G_\xi \text{ si } a_\rho\notin G_\xi\\ [(A'_\lambda)^{-1}a]a^*_\rho\in G_\xi \text{ si } a_\rho\in G_\xi\,.\end{cases}$$

Observons que, dans le second cas ${}_\rho A'_\lambda=A'_\lambda$ et que a^*_ρ est l'élément du sous-groupe normal G_ξ, déterminé par l'égalité $a_\rho^{-1}a=aa^*_\rho$. Donc $\pi'_\rho=a_\rho^{-1}a$ est puisque π'_ρ est le produit obtenu de π_ρ conformément à l'ordre arbitraire O', il s'ensuit que π_ρ converge inconditionnellement et que $\pi_\rho=a_\rho^{-1}a$.

LEMME 3. *Le produit πa_ν converge inconditionnellement si et seulement si les facteurs du produit sont commutatifs deux à deux.*

DÉMONSTRATION. Supposons que le produit πa_ν converge inconditionnellement et que $\pi a_\nu=a$. Conformément au lemme 2, le produit $\pi_{\rho\tau}$, obtenu de πa_ν par la suppréssion des éléments a_ρ et a_τ, converge inconditionnellement et $\pi_{\rho\tau}=(a_\rho a_\tau)^{-1}a=(a_\tau a_\rho)^{-1}a$. Il en résulte que $a_\tau a_\rho=a_\rho a_\tau$ $(\rho,\ \tau\in\Delta)$.

Soient maintenant $a_\rho a_\tau=a_\tau a_\rho$ et $\pi a_\nu=a$. En tenant compte de l'hipothèse que les facteurs du produit sont commutatifs deux à deux, il en résulte que les produits πa_ν et $\pi a'_\nu$ sont définis par le même système $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I'}$. Donc $\pi a'_\nu=a$.

Si $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ $(a_\nu\in G)$ est un système donné, alors nous désignons par πa_ν^{-1} *le produit attaché au système* $\{a_\nu^{-1}\}_{\nu\in\Delta}$, où Δ est ordonné conformément à l'ordre inverse de l'ordre initial de Δ.

LEMME 4. *Si $\pi a_\nu=a$, alors $\pi a_\nu^{-1}=a^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. Observons tout d'abord que $a_\nu\overset{\Delta}{\longrightarrow}e$ implique la relation $a_\nu^{-1}\overset{\Delta}{\longrightarrow}e$. Donc le produit πa_ν^{-1} est convergent, en vertu du lemme 1. Soit ξ un élément quelconque de I. Il s'ensuit de $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$ que, la relation $a_\nu \notin G_\xi$ est vraie seulement dans le cas d'un nombre fini d'éléments du système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$. Désignons ces élément par $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_k$. Donc $A_\xi = a_{\nu_1}\cdot a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_k}$. La relation $a_\nu^{-1} \notin G_\xi$ est également vraie si et seulement si $\nu = \nu_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Par conséquent les éléments $\overline{A_\xi}$ $(\xi\in I)$ du système $\{\overline{A_\xi}\}_{\xi\in I}$, par lequel est défini le produit πa_ν^{-1}, vérifient l'égalité:

$$\overline{A_\xi} = a_{\nu_k}^{-1} a_{\nu_{k-1}}^{-1} \ldots a_{\nu_1}^{-1} = (a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_{k-1}} a_{\nu_k})^{-1} = A_\xi^{-1} \quad (\xi\in I).$$

Puisque $(G, \mathfrak{F})$ est un groupe topologique, il s'ensuit que $A_\xi^{-1} \to a^{-1}$, donc que $\overline{A}_\xi \to a^{-1}$. Il en résulte que $\pi a_\nu^{-1} = a^{-1}$.

COROLLAIRE. *Si le produit πa_ν converge inconditionnellement, alors le produit πa_ν^{-1} converge également inconditionnellement.*

Étant donnés deux produits πa_ν et πb_ν, nous désignons par $\pi a_\nu \times \pi b_\nu$ *le produit attaché au système* $\{a_\nu b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$. Donc $\pi a_\nu \times \pi b_\nu = \pi(a_\nu b_\nu)$, par définition. Observons que l'existence de ce produit est assuré, parce que les relations $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$ et $b_\nu \xrightarrow{\Delta} e$ impliquent la validité de la relation $a_\nu b_\nu \xrightarrow{\Delta} e$.

LEMME 5. *Soient πa_ν et πb_ν deux produits inconditionnellement convergents, tels que $a_\nu b_\mu = b_\mu a_\nu$ pour tous les $\nu, \mu\in\Delta$ $(\nu\neq\mu)$ et soient $\pi a_\nu = a$ et $\pi b_\nu = b$. Alors $\pi a_\nu \times \pi b_\nu$ est également un produit inconditionnellement convergent et $\pi a_\nu \times \pi b_\nu = ab$.*

DÉMONSTRATION. Puisque les produits considérés convergent inconditionnnellement, il en résulte conformément au lemme 3, que $a_\nu a_\mu = a_\mu a_\nu$ et $b_\nu b_\mu = b_\mu b_\nu$ pour tous les $\nu, \mu\in\Delta$. Il s'ensuit, en tenant compte aussi de la condition $a_\nu b_\mu = b_\mu a_\nu$ $(\nu, \mu\in\Delta;\ \nu\neq\mu)$ que,

$$(a_\nu b_\nu)(a_\mu b_\mu) = a_\nu a_\mu b_\nu b_\mu = a_\mu a_\nu b_\mu b_\nu = (a_\mu b_\mu)(a_\nu b_\nu).$$

In en résulte conformément au lemme 3 que, $\pi a_\nu \times \pi b_\nu$ converge inconditionnellement. Soit ξ un élément quelconque de I et désignons par $a_{\nu_i} b_{\nu_i}$ $(i=1, 2, \ldots k)$ tous les éléments du système $\{a_\nu b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, qui satisfont la relation $a_{\nu_i} b_{\nu_i} \notin G_\xi$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Alors les éléments du système

$\{G_\xi\}_{\xi\in I}$, par lequel est défini le produit $\pi a_\nu \times \pi b_\nu$, s'écrivent sous la forme:

$$C_\xi = a_{\nu_1} b_{\nu_1} a_{\nu_2} b_{\nu_2} \dots a_{\nu_k} b_{\nu_k} \quad (\xi \in I).$$

En tenant compte du fait que $a_\nu b_\mu = b_\mu a_\nu$ pour tous les ν, $\mu \in \Delta$ $(\nu \neq \mu)$, que $a_\nu a_\mu = a_\mu a_\nu$ et $b_\nu b_\mu = b_\mu b_\nu$ pour tous les ν, $\mu \in \Delta$ $(\nu \neq \mu)$ et que $G_\xi \lhd G$ $(\xi \in I)$, il s'ensuit que $C_\xi = A_\xi B_\xi g_\xi$, où A_ξ et B_ξ sont les éléments de certains systèmes qui définissent les produits μa_ν et πb_ν et $g_\xi \in G_\xi$ $(\xi \in I)$. Les égalités $\pi a_\nu = a$ et $\pi b_\nu = b$ sont équivalentes avec les relations $A_\xi \to a$ et $B_\xi \to b$. Il en résulte que pour l'élément $\xi \in I$ arbitrairement choisi, il existe des éléments ξ_0, $\xi'_0 \in I$, tels que $A_\nu^{-1} a \in G_\xi$ pour tout $\nu \geq \xi_0$ et que $B_\nu^{-1} b \in G_\xi$ pour tout $\nu \geq \xi'_0$. Donc ces deux relations subsistent simultanément pour tout $\nu \geq \overline{\xi}_0$, où $\overline{\xi}_0 \geq \xi$ et $\overline{\xi}_0 \geq \xi'_0$. En tenant compte aussi du fait que $G_\xi \lhd G$ $(\xi \in I)$, il s'ensuit que

$$C_\nu^{-1} ab = (A_\nu B_\nu g_\xi)^{-1} ab = g_\xi^{-1} B_\nu^{-1} (A_\nu^{-1} a) b = g_\xi^{-1} B_\xi^{-1} \overline{g}_\xi b = g_\xi^{-1} \overline{\overline{g}}_\xi B_\xi^{-1} b = g_\nu^{-1} \overline{\overline{g}}_\xi g^*_\xi$$

pour tout $\nu \geq \overline{\xi}_0$, où $\overline{g}_\xi = A_\nu^{-1} a \in G_\xi$, $\overline{\overline{g}}_\xi \in G_\xi$ est déterminé par l'égalité $B_\nu^{-1} \overline{g}_\xi = \overline{\overline{g}}_\xi B_\nu^{-1}$ et enfin $g^*_\xi = B_\nu^{-1} b \in G_\xi$. Il en résulte que $C_\nu^{-1} ab \in G_\xi$ pour tout $\xi \geq \xi_0$, c'est-à-dire que $\pi a_\nu \times \pi b_\nu = ab$.

Soient πa_ν un produit convergent et b un élément quelconque de G. Considérons *un système* $\{b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *tel que* $b_\nu = b$ *pour un* $\nu = \nu_0$ *et* $b_\nu = e$ *pour tout* $\nu \neq \nu_0$. Le produit attaché à ce système converge inconditionellement et $\pi b_\nu = b$. *Le produit* $\pi a_\nu \times \pi b_\nu$ *sera dénommé produit* $\pi a_\nu \times b$ *de* πa_ν *avec l'élément* b. Le produit $b \times \pi a_\nu$ est défini d'une manière analogue.

La proposition suivante est un cas particulier du lemme 5:

LEMME 6. *Soit* πa_ν *un produit inconditionnellement convergent et soit* $\pi a_\nu = a$. *Si* b *est un élément de* G, *qui satisfait la propriété* $a_\nu b = b a_\nu$ *pour tout* $\nu \in \Delta$ *excepté tout au plus un* $\nu = \nu_0$, *alors* $\pi a_\nu \times b = ab$ *et* $b \times \pi a_\nu = ba$.

Considérons *un système quelconque* $\mathcal{H} = \{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ de sous-groupes normaux de G. Un système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ $(a_\nu \in H_\nu;\ \nu \in \Delta)$ sera dénommé *système* $\mathcal{H}$*-normal* si et seulement si A) *les éléments de ce système son commutatifs deux à deux et* B) *dans le cas où* Δ *est infini,* *la propriété* $a_\nu \overset{\Delta}{\longrightarrow} e$ *est également vraie.* Si S est un sous-groupe quelconque de G, alors nous désignons par $\tilde{S}$ *l'ensemble de tous les éléments de* S, *completé par la totalité des éléments de* G, *qui peuvent être obtenus comme des valeurs des produits* $\mathcal{H}$*-normaux* $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ $(a_\nu \in S)$.

La notion de sistème $\mathcal{H}$-normal permet l'introduction d'un *opérateur de fermeture* $\mathcal{C}$ *sur l'ensemble* G, c'est-à-dire [2] d'une application univoque de l'ensemble $\mathfrak{B}(G)$ de tous les sous-ensembles de G dans lui même, ayant les propriétés suivantes: (i) $X \subseteq \mathcal{C}(X)$ *pour tout* $X \in \mathfrak{B}(X)$; (ii) $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{C}(Y)$ *pour deux éléments quelconques* X, $Y \in \mathfrak{B}(G)$ *qui satisfont la relation* $X \subseteq Y$; (iii) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{C}(X)$ *pour tout* $X \in \mathfrak{B}(G)$. Observons que $\mathcal{C}(X)$ désigne l'image de l'élément $X \in \mathfrak{B}(G)$ dans l'application $\mathcal{C}$.

Dans le cas considéré, nous définissons l'opérateur $\mathcal{C}$ de la manière suivante: si X est un élément quelconque de $\mathfrak{B}(G)$, *soit* $\mathcal{C}(X) = \overleftarrow{\{X\}}$, *où* $\{X\}$ *représente le sous-groupe de* G, *engendré par le sous-ensemble* X *de* G.

Étant donné la famille $\mathcal{H} = \{X_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ de sous-groupes normaux de G, nous utiliserons la notation $H_\nu^* = \bigvee_{\mu\in\Delta\setminus\{\nu\}} H_\mu$, où la réunion $\bigvee$ est considéré au sens algébrique. Puisque $H_\nu \lhd G$ $(\nu \in \Delta)$, il s'ensuit que $H_\nu^* \lhd G (\nu \in \Delta)$.

Théorème 1. *Si la famille* $\mathcal{H} = \{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *de sous-groupes normaux de* G *satisfait la condition* $H_\nu \cap \overleftarrow{H_\nu^*} \{e\}$ *pour tout* $\nu \in \Delta$, *alors* $\mathcal{C}$ *est un opérateur de fermeture.*

Démonstration. L'opérateur $\mathcal{C}$, défini ci-dessus, a évidement les propriétés (i) et (ii). La propriété (i) implique la relation $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$ pour tout $X \in \mathfrak{B}(G)$. Donc il faut encore de démontrer que $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X)) \subseteq$ $\subseteq \mathcal{C}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{B}(G)$. Supposons par absurde qu'il existe au moins un élément $a \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$, tel que $a \notin \mathcal{C}(X)$. Ce signifie que $a = \pi a_\nu$, où $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ est un système $\mathcal{H}$-normal ayant au moins un élément $a_{\nu_0} \in \mathcal{C}(X) \setminus X$. Il en résulte l'existence d'un système $\mathcal{H}$-normal $\{b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, tel que $\pi b_\nu = a_{\nu_0}$ et $b_\nu \in X$ $(\nu \in \Delta)$. En vertu du lemme 2, nous avons la relation $\pi_{\nu_0} = b_{\nu_0}^{-1} a_{\nu_0} \in H_{\nu_0}$. D'autre part $\pi_{\nu_0} \in \overleftarrow{H_{\nu_0}^*}$. Il s'ensuit que $b_{\nu_0}^{-1} a_{\nu_0} \in$ $H_{\nu_0} \cap \overleftarrow{H_{\nu_0}^*} = \{e\}$ et par conséquent $a_{\nu_0} = b_{\nu_0} \in X$, qui contredit la relation $a_{\nu_0} \in \mathcal{C}(X) \setminus X$.

Nous disons que G est le *produit filtré* de la famille $\mathcal{H} = \{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$

de sous-groupes normaux de $G(G=\times^{\mathfrak{F}} H_\nu)$, si et seulement si 1^0. $G=\mathcal{C}(\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu)$ et 2^0 $H_\nu \cap \mathcal{C}(H^*_\nu)=\{e\}$ *pour tout* $\nu\in\Delta$. Observons qu'ici Δ représente un ensemble quelconque d'indices.

Si *la topologie* $\mathfrak{F}$ *définie sur* G *est discrète, alors* $\mathcal{C}(\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu)=\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu$ et $\mathcal{C}(H^*_\nu)=H^*_\nu$, donc en ce cas particulier *la notion de produit filtré coïncide avec la notion de produit direct (discret).*

LEMME 7. *Soit* $\mathcal{H}=\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *une famille de sous-groupes normaux de* G, *ayant la propriété* $H_\nu \circ H^*_\nu=\{e\}$ $(\nu\in\Delta)$[4]. *Alors tous les systèmes* $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ $(a_\nu\in H_\nu\,;\ \nu\in\Delta)$ *finis ou bien infinis et ayant la propriété* $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$, *sont des systèmes* $\mathcal{H}$*-normaux.*

DÉMONSTRATION. Il faut de montrer que les éléments de $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ sont commutatifs deux à deux. Soient a_ν et a_μ $(\nu\neq\mu)$ deux éléments quelconques de $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$. En tenant compte du fait que $a_\nu\in H_\nu$ et $a_\mu\in H^*_\nu$, il s'ensuit l'égalité $H_\nu\circ H^*_\nu=\{e\}(\nu\in\Delta)$, d'où il en résulte que $a_\nu\circ a_\mu=e$, donc que $a_\nu a_\mu=a_\mu a_\nu$.

THÉORÈME 2. *Soit* $\mathcal{H}=\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *une famille de sous-groupes normaux de* G. $G=\times^{\mathfrak{F}} H_\nu$ *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*: 1_1^0. $H_\nu\circ H^*_\nu=\{e\}$ *pour tout* $\nu\in\Delta$ *et* 2_1^0. *À chaque élément* $g\in G$ *correspond un système uniquement déterminé* $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ $(a_\nu\in H_\nu\,;$ $v\in\Delta)$, *tel que* $g=\pi a_\nu$.

DÉMONSTRATIONS. Supposons que $G=\times^{\mathfrak{F}} H_\nu$. Puisque $H_\nu\lhd G$ $(\nu\in\Delta)$ nous avons les relations $H_\nu\circ G\subseteq G_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. En tenant compte aussi des relations évidement vraies $H_\nu\circ H^*_\nu\subseteq H_\nu\circ G$ $(\nu\in\Delta)$, on déduit que $H_\nu\circ H^*_\nu\subseteq H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. Puisque $H^*_\nu \circ\lhd G$ $(\nu\in\Delta)$, on obtient d'une manière analogue les relations $H_\nu\circ H^*_\nu\subseteq G\circ H^*_\nu\subseteq H^*_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. Il en résulte que $H_\nu\circ H^*_\nu\subseteq H_\nu\cap H^*_\nu\subseteq H_\nu\cap\mathcal{C}(H^*_\nu)=\{e\}$ $(\nu\in\Delta)$, donc la validité de la condition 1_1^0.

Soit g un élément quelconque de G. La propriété 1^0 implique l'une des deux relations suivantes: $g\in\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu$ ou $g\in\mathcal{C}(\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu)\setminus\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu$.

Si $g\in\bigvee\limits_{\nu\in\Delta} H_\nu$, alors g peut être représenté sous la forme $g=a_{\nu_1}a_{\nu_2}\ \ldots$

---

[4]) Si $A\subseteq G$ et $B\subseteq|\,G$, alors on désigne par $A\circ B$ le sous-groupe de G, engendré par tous les commutateurs $a\circ b=a^{-1}b^{-1}ab$ $(a\in A,\ b\in B)$.

a_{ν_k}, où $e \neq a_{\nu_i} \in H_{\nu_i}$ $(i=1, 2, ..., k)$ et $\nu_i \neq \nu_j$ si $i \neq j$ $(i, j=1, 2, ..., k)$. Nous construisons un système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, où $a_\nu = a_{\nu_i}$, si $\nu = \nu_i$ $(i=1, 2, ..., k)$ et $a_\nu = e$, si $\nu \neq \nu_i$ $(i=1, 2, ..., k)$. Si Δ est infini, alors $a_\nu \xrightarrow{\Delta} e$, parce que $a_\nu = e$ seulement dans le cas d'un nombre fini d'indices ν. En tenant compte de la condition 1_1^0, il s'ensuit conformément au lemme 7, que $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ est un système $\mathcal{H}$-normal. Puisque la famille $\{G_\xi\}_{\xi\in I}$ de sous-groupes normaux de G — qui forme un système complet de voisinages de l'élément $e\in G$ — satisfait les conditions 1^*, 2^* et 3^*, il s'ensuit l'existence d'un $\xi_0 \in I$, tel que les éléments du système $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$ sont égaux avec $a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots a_{\nu_k} \in G$ pour tout $\xi \geq \xi_0$. Il s'ensuit que $\pi a_\nu = g$. Nous attachons à l'élément g le système $\mathcal{H}$-normal construit de cette manière.

Si $g \in \mathcal{C}(\bigvee_{\nu\in\Delta} H_\nu) \setminus \bigvee_{\nu\in\Delta} H_\nu$, alors il résulte conformément à la définition de $\mathcal{C}(\bigvee_{\nu\in\Delta} H_\nu)$, l'existence d'un système $\mathcal{H}$-normal $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, tel que $\pi a_\nu = g$.

Démontrons l'unicité du système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, attaché à l'élément $g\in G$. Supposons qu'il existe aussi un autre système $\{b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ $(b_\nu \in H_\nu, \ \nu\in\Delta)$, ayant la propriété $\pi b_\nu = g$. Puisque l'hypotèse $G = \times^{\mathfrak{F}} H_\nu$ implique les relations 1_1^0 et puisque conformément à la définition de πb_ν, la relation $b_\nu \xrightarrow{\Delta} e$ est vraie, il s'ensuit en vertu du lemme 7, que $\{b_\nu\}_{\in\Delta}$ est un système $\mathcal{H}$-normal. Par conséquent πb_ν converge inconditionnellement, conformément au lemme 3. D'autre part, l'égalité $g = a_\nu$ implique — en vertu du lemme 4 — l'égalité $g^{-1} = \pi a_\nu^{-1}$. En utilisant le lemme 5, nous déduisons que $e = gg^{-1} = \pi b_\nu \times \pi a_\nu^{-1} = \pi(b_\nu a_\nu^{-1})$ et que ce produit converge inconditionnellement. Soit ν_0 un élément quelconque de Δ. En tenant compte du fait que $\pi(b_\nu a_\nu^{-1})$ converge inconditionnellement et que $\pi(b_\nu a_\nu^{-1}) = e$, il s'ensuit conformément au lemme 2, que

$$(b_{\nu_0} a_{\nu_0}^{-1})^{-1} = (b_{\nu_0} a_{\nu_0}^{-1})^{-1} e = \pi_{\nu_0} \in \mathcal{C}(H_{\nu_0}^*).$$

D'autre part $b_{\nu_0} a_{\nu_0}^{-1} \in H_{\nu_0}$. Donc

$$(b_{\nu_0} a_{\nu_0}^{-1})^{-1} \in H_{\nu_0} \cap \mathcal{C}(H_{\nu_0}^*) = \{e\},$$

d'où il résulte que $a_{\nu_0} = b_{\nu_0}$ pour tout $\nu_0 \in \Delta$.

Donc les conditions 1_1^0 et 2_1^0 sont nécessaires.

Ces conditions sont aussi suffisantes. Nous démontrons tout d'abord que $H_{\nu_0} \lhd G$ pour tout $\nu_0 \in \Delta$. En effet, soit g un élément quelconque de

G et soit a un élément arbitraire de H_{ν_0}. Nous avons l'égalité $g=\pi a_\nu$, où $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ est un système $\mathcal{H}$-normal conformément au lemme 7. En utilisant les lemmes 4, 6 et 5, nous obtenons les égalités

$$g^{-1}ag=(g^{-1}a)g=(\pi a_\nu^{-1}\times a)\times\pi a_\nu=\pi(a_\nu^{-1}\varepsilon_\nu)a=\pi(a_\nu^{-1}\varepsilon_\nu a_\nu),$$

où $\varepsilon_\nu=a$ si $\nu=\nu_0$ et $\varepsilon_\nu=e$ pour tout $\nu\neq\nu_0$. Il s'ensuit que $g^{-1}ag=$ $=a_{\nu_0}^{-1}aa_{\nu_0}\in H_{\nu_0}$.

La propriété 1^0 est une conséquence de 2_1^0.

Supposons par absurde, que la propriéte 2^0 n'a pas lieu, donc qu'il existe au moins un $\nu_0\in\Delta$, tel que

$$H_{\nu_0}\cap\mathcal{C}(H_{\nu_0}^*)\neq\{e\}.$$

Soit

$$e\neq g\in H_{\nu_0}\cap\mathcal{C}(H_{\nu_0}^*).$$

Puisque $g\in H_{\nu_0}$, il s'ensuit que g peut être représenté sous la forme $g=\pi a_\nu$, où le système $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ contient un seul élément $a_{\nu_0}=g$ différent de e. D'autre part la relation $g\in\mathcal{C}(H^*{}_\nu)$ implique la validité de l'égalité $g=\pi b_\nu$, où $b_{\nu_0}=e$. Donc il existe deux système différents $\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ et $\{b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$. tels que $g=\pi a_\nu$ et $g=\pi b_\nu$, qui contredit la condition 2_1^0.

Soit $\mathcal{H}=\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *un système quelconque de groupes, munis de topologies filtrées* $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in\Delta)$, introduites en H_ν $(\nu\in\Delta)$ conformément à certains systèmes

$$\{G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}\}_{\xi(\nu)\in I(\nu)}(G^{(\nu)}_{\xi_0^{(\nu)}}=H_\nu\ (\nu\in\Delta))$$

de sous-groupes normaux H_ν $(\nu\in\Delta)$, ayant les propriétés 1^*, 2^* et 3^*. Ces systèmes de sous-groupes normaux de H_ν $(\nu\in\Delta)$ forment des systèmes complets de voisinages d'éléments unité $e_\nu\in H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. *Considérons le produit direct complet* $\mathcal{G}=\underset{\nu\in\Delta}{\times}H_\nu$ *de la famille de groupes* $\mathcal{H}$ *et introduisons en* $\mathcal{G}$ *la topologie produit* $\mathfrak{F}$, *induite par les topologies* $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in\Delta)$.

LEMME 8. *Si les éléments de la famille de groupes* $\mathcal{H}=\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *sont munis par des topologies filtrées de Hausdorff* $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in\Delta)$ [5]), *alors la*

---

[5]) C'est-à-dire les familles de sous-groupes de H_ν $(\nu\in\Delta)$ qui définissent $\mathfrak{F}^\wedge$ $(\nu\in\Delta)$, satisfont les conditions 1^*, 2^* et 3^*.

topologie produit $\mathfrak{F}$ introduite dans le produit direct complet $\mathfrak{G} = \underset{\nu\in\Delta}{\times} H_\nu$ *par les topologies* $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in\Delta)$ *est une topologie filtrée de Hausdorff pour* $\mathfrak{G}$.

DÉMONSTRATION. En tenant compte de la forme des systèmes de voisinages des éléments $e_\nu \in H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$, il s'ensuit conformément à la notion de topologie produit (voir par ex. [3]), qu'un système complet $\mathfrak{V}$ de voisinages de l'élément unité $e=\{e_\nu\}_{\nu\in\Delta}\in\mathfrak{G}$ est formé par tous les sous-ensembles de $\mathfrak{G}$ de la forme $V=\{\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta}$; $a_\nu\in G^{\nu}_{\xi(\nu)}(\xi^{(\nu)}_\lambda\neq\xi^{(\nu)}_0)$ si $\nu\in\Delta'_0$, où Δ'_0 représente un sous-ensemble fini de $\Delta\}$. $\mathfrak{V}$ forme évidement une famille de sous-groupes normaux de $\mathfrak{G}$, ordonné partiellement par rapport à la relation d'inclusion. Soit U un autre élément de $\mathfrak{V}$: $U=\{\{b_\nu\}_{\nu\in\Delta}$; $b_\nu\in G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}(\xi^{(\nu)}_\mu\neq\xi^{(\nu)}_0)$ si $\nu\in\Delta''_0$, où Δ''_0 représente un sous-ensemble fini de $\Delta\}$. En tenant compte du fait que les ensembles $\{G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}\}_{\xi(\nu)\in I(\nu)}$ sont dirigés par rapport à la relation d'inclusion, on peut choisir pour chaque $\nu\in\Delta'_0\cup\Delta''_0=\Delta$ un $G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}$, tel que $G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}\subseteq G^{(\nu)}_{\xi_\lambda^{(\nu)}}$ et $G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}\subseteq G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}$. Il s'ensuit — en tenant compte du fait que Δ_0 est un sous-ensemble fini de Δ — que $W=\{\{c_\nu\}_{\nu\in\Delta}$; $c_\nu\in G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}(\xi^{(\nu)}\neq\xi^{(\nu)}_0)\}$ si $\nu\in\Delta_0\}\in\mathfrak{V}$ et que $W\subseteq U$ et $W\subseteq V$. Donc l'ensemble $\mathfrak{V}$ de sous-groupes de $\mathfrak{G}$ est dirigé par rapport à la relation d'inclusion. L'ensemble $\mathfrak{V}$ satisfait aussi la condition 3*, parce que tous les systèmes$\{G^{(\nu)}_{\xi(\nu)}\}_{\xi(\nu)\in I(\nu)}$ ont cette propriété, conformément à l'hypothèse.

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathfrak{H}=\{H_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *un système quelconque de groupes, munis par des topologies filtrées* $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in\Delta)$ *et soit* $\mathfrak{G}$ *le produit direct complet* $\underset{\nu\in\Delta}{\times} H_\nu$, *muni par la topologie produit* $\mathfrak{F}$, *induite par les topologie* $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. *Le groupe topologique* $\mathfrak{G}$ *est le produit filtré d'une famille* $\mathfrak{H}'=\{H'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ *de sous-groupes normaux de* $\mathfrak{G}$, *où* $H'_\nu\cong H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$.

DÉMONSTRATION. La topologie $\mathfrak{F}$ est — conformément au lemme 8 — une topologie filtrée pour le groupe $\mathfrak{G}$, donc une éventuelle décomposition filtrée de $\mathfrak{G}$ a un sens. Considérons les projections φ_ν de $\mathfrak{G}$: $\varphi_\nu(G)=H_\nu\cong H'_\nu\subseteq|\,\mathfrak{G}$ $(\nu\in\Delta)$. Soit $\mathfrak{H}'=\{H'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$.

Nous affirmons que $\mathfrak{G}=\underset{\nu\in\Delta}{\times}{}^{\mathfrak{F}} H'_\nu$. En tenant compte du fait que $H'_\nu\lhd\mathfrak{G}$ $(\nu\in\Delta)$, il reste de démontrer que les conditions 1^0 et 2^0 sont satisfaites par $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}'$.

Soit g un élément quelconque de $\mathfrak{G}$: $g=\{h_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, où $h_\nu\in H_\nu$ $(\nu\in\Delta)$. Considérons pour tout $\nu\in\Delta$ l'élément $h'_\nu\in H'_\nu$, qui correspond à l'élément $h_\nu \in H_\nu$ $(\nu \in \Delta)$ dans l'isomorphie $H_\nu \cong H'_\nu$. Donc $h'_\nu = \{a_\mu^{(\nu)}\}_{\nu\in\Delta}$, où $a_\mu^{(\nu)} = h_\nu$ pour $\nu = \mu$ et $a_\mu^{(\nu)} = e_\mu$ pour tous les $\mu \neq \nu$.

Le système $\{h'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$ est $\mathcal{H}'$-normal. En effet, si h'_ν et h'_ρ $(\nu \neq \rho)$ sont deux éléments quelconques du système $\{h'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, alors — en tenant compte de la forme de h'_ν et du fait que $h'_\rho = \{b_\mu^{(\rho)}\}_{\mu\in\Delta}$, où $b_\mu^{(\rho)} = h_\rho$ pour $\mu = \rho$ et $b_\mu^{(\rho)} = e_\mu$ pour tous les $\mu \neq \rho$ — il en résulte que $h'_\nu h'_\rho = h'_\rho h'_\nu$. D'autre part $h'_\nu \xrightarrow{\Delta} e = \{e_\nu\}_{\nu\in\Delta}$. En effet, considérons un voisinage quelconque V de l'élément unité $e \in \mathcal{G}$: $V = \{\{a_\nu\}_{\nu\in\Delta};\ a_\nu \in G^{(\nu)}_{\xi_\lambda^{(\nu)}}(\xi_\lambda^{(\nu)} \neq \neq \xi_0^{(\nu)})$ si $\nu \in \Delta_0$, où Δ_0 représente un sous-ensemble fini de $\Delta\}$. V ne contenant tout au plus un nombre fini d'éléments $h'_\nu \in \{h'_\nu\}_{\nu\in\Delta}$, parce que seuls les éléments h'_ν pour lesquels $\nu \in \Delta_0$ pourraient appartenir à V, il s'ensuit que $h'_\nu \xrightarrow{\Delta} e$.

Puisque dans la topologie produit $\mathfrak{F}$ la convergence est une convergence ponctuelle, il en résulte que $\pi h'_\nu = \{\underset{\mu\in\Delta}{\pi}\ a_\mu^{(\nu)}\}_{\nu\in\Delta}$. Mais $\pi a_\mu^{(\nu)} = h_\nu$ $(\nu \in \Delta)$, donc $\pi h'_\nu = g$. Il en résulte que la condition 1^0 est satisfaite: $\mathcal{G} = \mathcal{C}(\bigvee H'_\nu)$.

Soit ν_0 un élément arbitrairement choisi de Δ. Un élément $h'_{\nu_0} \in H'_{\nu_0}$ est de la forme $h'_{\nu_0} = \{a_\mu^{(\nu_0)}\}_{\mu\in\Delta}$, où $a_\mu^{(\nu_0)} = e_\mu$ pour tous les $\mu \neq \nu_0$. D'autre part, un élément quelconque $h^*_{\nu_0} \in (H'_{\nu_0})^*$ est de la forme $h^*_{\nu_0} = \{b_\mu^{(\nu_0)}\}_{\mu\in\Delta}$, où $c_\mu^{(\nu_0)} = e_{\nu_0}$. En tenant compte de la convergence ponctuelle dans le groupe topologique $(\mathcal{G}, \mathfrak{F})$, il s'ensuit que pour les éléments $\{c_\mu^{(\nu_0)}\}_{\mu\in\Delta} \in \mathcal{C}((H'^{\nu_0})^*)$ la propriété suivante est vraie: $c_\mu^{(\nu_0)} = e_{\nu_0}$. Il en résulte que $H \cap \mathcal{C}((H'_{\nu_0})^*) = \{e\}$, donc la condition 2^0 est également satisfaite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki N.: *Éléments de Math.*, fasc. XXVIII, Algèbre commutative, ch. 3-4, Paris, 1961.

[2] Cohn P. M.: *Universal Algebra*, New York-London-Tokyo, 1965.

[3] Kelley J. L.: *General Topology*, Toronto-New York-London, 1964.

[4] Krull W., *Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppentopologie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 28, 51-97, 1965.

[5] MAUERER I. GY. - SZILÁGYI M.: *Über eine Untergruppentopologie der Operatorgruppen,* Miskolci Nehézipari Egyetem Közlemenyei XXX, 289-298, 1970.

[6] MAURER I. GY. - SZILÁGYI M.: *Über ein unendliches Produkt von geordneten Systemen beliebiger Mächtigkeit in Operatorgruppen mit Untergruppentopologie,* Studia Univ. « Babeş-Bolyai », f. 1, 3-6, 1968.

Manoscritto pervenuto il 10 ottobre 1969.