Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Ubaldo Richard

Su un classico controesempio della teoria della stabilità delle equazioni differenziali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 221-227

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__221_0>

SU UN CLASSICO CONTROESEMPIO DELLA TEORIA DELLA STABILITÀ DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

UBALDO RICHARD *)

RIASSUNTO - Rilevato un errore di calcolo numerico, si conferma e si precisa la validità di un esempio di R. Bellman.

1. Esposizione dei risultati.

È noto che, se $x(t)$ è una funzione scalare, se l'equazione

$$x''+a(t)x=0$$

ha le soluzioni limitate sulla semiretta $[t_0, +\infty)$, e se $\int_{t_0}^{+\infty} |b(t)| \, dt<+\infty$, allora anche l'equazione perturbata

$$y''+[a(t)+b(t)]y=0$$

ha le soluzioni limitate in $[t_0, +\infty)$.

È pure noto che la proposizione non si estende ai sistemi di equazioni differenziali lineari. Se $X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$ sono vettori a due componenti, $A(t)$, $B(t)$ sono matrici 2×2, e se $B(t)$ è sommabile in $[t_0 \; +\infty)$, può avvenire che delle due equazioni

(1) $$X'=A(t)X,$$

(2) $$Y'=[A(t)+B(t)]Y,$$

la prima sia stabile e la seconda no.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università, Padova.

Nel libro di Bellman [1]) si riporta il controesempio seguente:

$$A(t)=\begin{Bmatrix} -a & 0 \\ 0 & \sin\log t+\cos\log t-2a \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

$$B(t)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-at} & 0 \end{Bmatrix}, \tag{3'}$$

dove la costante a verifica la condizione [2])

$$a\geq\tfrac{1}{2}. \tag{3''}$$

In questo esempio le soluzioni della (1) sono

$$\begin{cases} x_1=c_1e^{-at} \\ x_2=c_2e^{t\sin\log t-2at}, \end{cases}$$

e sono limitate, per la (3''), sulla semiretta $[1, +\infty)$. Le soluzioni della (2) sono invece

$$\begin{cases} y_1=c_1e^{-at} \\ y_2=c_1e^{t\sin\log t-2at}\int\limits_0^t e^{-u\sin\log u}du+c_2e^{t\sin\log t-2at}. \end{cases}$$

Ora, studiando il comportamento asintotico della funzione

$$f(t)=e^{t\sin\log t-2at}\int\limits_0^t e^{-u\sin\log u}du, \tag{4}$$

si trova che esiste un intorno destro di $a=\frac{1}{2}$ per il quale $f(t)$ non è limitata per $t\to+\infty$.

---

1) R. BELLMAN: *Stability theory of differential equations*, New York, McGraw-Hill, 1953 - Ch. 2, Th. 5, pp. 42-43.

2) Nel libro citato il problema è trattato per $a>\frac{1}{2}$.

Nel citato testo di Bellman la determinazione numerica di un tale intorno è tuttavia errata: nel terzo membro della formula (8) di pagina 43 si deve leggere

$$\exp\left(+\frac{e^{-\pi t}}{2}\right) \tag{5}$$

in luogo di

$$\exp\left(-\frac{e^{-\pi t}}{2}\right), \tag{5'}$$

e nella successiva formula (9) si deve leggere

$$1<2a<1+\tfrac{1}{2}e^{-\pi} \tag{6}$$

in luogo di

$$1<2a<1+e^{-\pi/2}. \tag{6'}$$

Ciò significa che la validità del controesempio è assicurata dal Bellman per

$$0{,}5<a<0{,}5108 \tag{6a}$$

e non per

$$0{,}5<a<0{,}6039. \tag{6'a}$$

L'errore numerico è passato poi in altri Autori [3]).

Poichè una semplice applicazione della regola del De L'Hospital mostra che la

$$f(t)=\frac{\int_0^t e^{-u\sin\log u}du}{e^{-t\sin\log t+2at}}$$

[3]) R. Conti: *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari*, Riv. Mat. Università di Parma, 6 (1955), pp. 3-35.

L'esempio di Bellman è citato a pag. 26, con l'inessenziale sostituzione di t in $t+1$.

è limitata (anzi tende a zero) per

$$a > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071,$$

mi è venuta la curiosità di determinare il valore di a attraverso il quale il sistema (2) cambia di comportamento .

Il risultato è il seguente: esiste un a_0 tale che il sistema (2) non è stabile per

$$\tfrac{1}{2} \leq a \leq a_0 ,$$

mentre è stabile per

$$a > a_0 ;$$

numericamente si trova

$$a_0 = 0{,}5347.$$

L'errore di (6a′) è quindi effettivo!

2. Dimostrazione.

Decomponiamo la semiretta $[1, +\infty)$ in due insiemi I_1, I_2. L'insieme I_1 è costituito dagli intervalli

$$2n\pi < \log t < (2n+1)\pi, \tag{8}$$

l'insieme I_2 dagli intervalli

$$(2n+1)\pi \leq \log t \leq (2n+2)\pi. \tag{8'}$$

Se $t \in I_2$, si ha sempre

$$0 < f(t) \leq 1.$$

Infatti, dalle (4), (3″) si ha

$$0 < f(t) < e^{-2at} \int_0^t e^u du < e^{t(1-2a)} \leq 1.$$

Supponiamo dunque verificata la (8), e studiamo il comportamento asintotico dell'integrale

$$J(t)=\int_0^t e^{-u \sin \log u} du. \tag{9}$$

Fissato n nella (8), il massimo assoluto della funzione integranda nell'intervallo $[0, t]$ si ottiene per

$$u_0=e^{\left(2n-\frac{1}{4}\right)\pi}; \tag{10}$$

ponendo nella (9)

$$\begin{cases} u=u_0 v \\ h(v)=v(\cos \log v - \sin \log v)/\sqrt{2} \end{cases}$$

si trova poi

$$J(t)=u_0\int_0^{t/u_0} e^{u_0 h(v)} dv,$$

quindi

$$\int_0^{e^{\pi/4}} e^{u_0 h(v)} dv < u_0^{-1} J(t) < \int_0^{e^{5\pi/4}} e^{u_0 h(v)} dv. \tag{11}$$

Nell'intervallo $[0, e^{5\pi/4}]$ la funzione $h(v)$ verifica le condizioni

$$\max h(v)=h(1)=1/\sqrt{2},$$
$$h'(1)=0, \ h''(1)=-\sqrt{2};$$

applicando il metodo di Laplace al primo ed al terzo degli integrali (11) se ne trova il comune valore asintotico [4])

[4]) N. G. De Bruijn: *Asymptotic Methods in Analysis*, Amsterdam, North-Holland, 1958, Ch. 4.

$$(2\pi)^{1/2}[-u_0 h''(1)]^{-1/2} e^{u_0 h(1)} = 2^{1/4}\pi^{1/2} u_0^{-1/2} e^{u_0/\sqrt{2}}.$$

Dunque si ha, per $t \to +\infty$, $t \in I_1$,

$$J(t) \sim 2^{1/4}\pi^{1/2} u_0^{1/2} e^{u_0/\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Ricordando le (4), (10) se ne deduce, sempre per $t \to +\infty$, $t \in I_1$, che

$$f(t) \sim 2^{1/4}\pi^{1/2} u_0^{1/2} \cdot \exp\left\{t \sin\log t - 2at + \frac{u_0}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{13}$$

Poniamo ora

$$\log t = \log u_0 + \frac{3\pi}{4} - \tau;$$

tenendo conto della (8), per ogni valore di n si avrà $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$, e la (13) si potrà scrivere

$$f(t) \sim 2^{1/4}\pi^{1/2} u_0^{1/2} \exp\{t\varphi(\tau)\}, \tag{13'}$$

avendo posto

$$\varphi(\tau) = \cos\tau - 2a + 2^{-1/2} e^{-3\pi/4} e^{\tau}. \tag{14}$$

Variando τ nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi(\tau)$ è massima per il valore τ_0, unica radice dell'equazione

$$\sin\tau = 2^{-1/2} e^{-3\pi/4} e^{\tau} \tag{15}$$

nell'intervallo suddetto; tale massimo vale

$$\varphi(\tau_0) = \sin\tau_0 + \cos\tau_0 - 2a.$$

Concludendo, $f(t)$ è limitata se

$$a > a_0 = \tfrac{1}{2}(\sin\tau_0 + \cos\tau_0),$$

non è limitata se [5]) $a \leq a_0$.

Infine si trova [6])

$$\tau_0 = 0{,}0720\ 9219$$

$$a_0 = 0{,}5347\ 1612\ 24.$$

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 settembre 1969.

[5]) La non limitatezza di $f(t)$ per $a = a_0$ dipende dalla presenza del fattore $u_0^{1/2}$ nella (13′).

[6]) Le serie di Lagrange forniscono eleganti espressioni di a_0, τ_0, assai buone per il calcolo numerico; si veda la nota di A. M. BRESQUAR: « Su una applicazione delle serie di Lagrange alla equazione $\sin z = \lambda e^z$ », Atti Sem. Mat. Fis., Università di Modena, vol. XIX (1970).