Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Franco Napolitani

Modularità e distributività nell'insieme dei sottogruppi subnormali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 215-220
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__215_0>

MODULARITÀ E DISTRIBUTIVITÀ NELL'INSIEME DEI SOTTOGRUPPI SUBNORMALI

FRANCO NAPOLITANI *)

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *subnormale* in G, $H \lhd \lhd G$, se H può essere connesso con G per mezzo di una catena normale finita. Una sezione di un gruppo G è un gruppo H/K, dove $K \leqq H \leqq G$ *e* $K \lhd H$; una *sezione* dicesi subnormale se $H \lhd \lhd G$. Un gruppo *modulare* o *M-gruppo* è un gruppo avente il reticolo dei sottogruppi modulare. Per gruppi localmente nilpotenti questa condizione equivale alla permutabilità di ogni coppia di sottogruppi (per definizione due sottogruppi H e K di un gruppo si dicono permutabili se $HK = KH = \langle H, K \rangle$). In questa nota si considera l'insieme $sn(G)$ dei sottogruppi subnormali di un gruppo G e si cercano condizioni affinchè $sn(G)$ risulti un reticolo modulare oppure distributivo. I risultati trovati sono i seguenti:

TEOREMA A. *In un gruppo G l'insieme $sn(G)$ dei sottogruppi subnormali è un reticolo modulare se e solo se ogni sezione subnormale di G avente ordine p^3, p primo, è modulare* 1)*.*

Il teorema A estende ad un gruppo qualunque un teorema dato da Zappa [12] per i gruppi finiti. Per gli $\mathcal{M}^{\nu}_{s}$-gruppi 2) una dimostrazione (non pubblicata) molto semplice del precedente teorema è stata trovata da Zacher.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Sem. Mat. Univ., Padova.

1) I soli gruppi non modulari di ordine p^3 sono il gruppo diedrale e i gruppi extraspeciali di esponente p.

2) Gruppi a condizione minimale per i sottogruppi subnormali.

Teorema B. *L'insieme $sn(G)$ dei sottogruppi subnormali di un gruppo G è un reticolo distributivo se e solo se ogni sezione subnormale di G di ordine p^2, p primo, è ciclica.*

Anche il teorema B deve già ritenersi noto per alcune classi di gruppi: gruppi risolubili finiti (Zappa [11]), gruppi finiti (Zacher [10]), gruppi con catene normali finite (Tamaschke [9]), T-gruppi (Curzio e Permutti [3]), $\mathfrak{M}\mathfrak{C}_s^\vee$-gruppi [5].

1. Notazioni e risultati preliminari.

Se H e K sono sottogruppi di un gruppo G, denotiamo con H^K il sottogruppo generato da tutti i coniugati H^k $(k \in K)$ di H mediante elementi di K. La *serie normale di chiusura*

$$G = H_0 \triangleright H \triangleright \ldots \triangleright H_n \triangleright \ldots$$

di H in G viene definita ponendo $H_0 = G$ e $H_{i+1} = H^{H_i}$ per $i \geqq 0$. Il sottogruppo H_n si chiama l'*n-sima chiusura normale* di H in G. Si scrive $H \triangleleft^n G$ per esprimere che $H = H_n$. Il sottogruppo H è subnormale in G se e solo se $H = H_n$ per un certo n ed il più piccolo n per cui ciò accade si chiama l'*indice di subnormalità* di H in G e si denota con $s(G:H)$. Useremo infine la notazione γHK^n $(n \geqq 1)$ per il sottogruppo $[H, \underbrace{K, \quad, K}_{n}]$ e $G^{(m)}$ per l'm-simo termine della serie derivata di un gruppo G.

Lemma 1. *Siano H e K sottogruppi subnormali di G e sia $J = \langle H, K \rangle$. Se H e K sono permutabili, J è subnormale in G.*

Una dimostrazione di questo lemma si trova in [6].

Se H e K sono sottogruppi di G, il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi di H che sono permutabili con K è un sottogruppo permutabile con K, e quindi è il più grande sottogruppo di H che ha questa proprietà.

Roseblade e Stonehewer [8] chiamano questo sottogruppo il permutante $P_H(K)$ di K in H. In [8] è dimostrato il seguente:

Lemma 2. *Se $H \triangleleft\triangleleft G$ e $K \triangleleft\triangleleft G$, allora $P_H(K) \triangleleft\triangleleft G$.*

LEMMA 3. *Sia G un gruppo localmente nilpotente. Se ogni sezione di G d'ordine p^3, p primo, è modulare, anche G è modulare.*

DIM. Sia H un sottogruppo finitamente generato di G. Indicata con T la parte di torsione di H, si supponga H/T abeliano. Allora poichè H è finitamente generato, il suo centro $Z(H)$ ha indice finito in H. Siano A e B due sottogruppi ciclici di H; poichè essi hanno ordine finito rispetto a $Z(H)$, la sezione $\langle A, B\rangle/(A \cap Z(H))(B \cap Z(H))$ è finita. Iwasawa ha provato che un p-gruppo finito che ha tutte le sezioni di ordine p^3 modulari è un M-gruppo. Dunque, per la nilpotenza di H, $\langle A, B\rangle/(A \cap Z(H))(B \cap Z(H))$ è un M-gruppo, ed A e B, permutabili modulo $(A \cap Z(H))(B \cap Z(H))$, sono essi stessi permutabili. Pertanto se H/T è abeliano per ogni sottogruppo finitamente generato H di G, il gruppo G è un M-gruppo.

Ma questa condizione, nelle nostre ipotesi, è sempre verificata. Infatti posto $H/T=N$, esiste in N un sottogruppo normale abeliano M con N/M libero da torsione e massimo per queste condizioni. Sia $F \lhd N$ tale che F/M sia ciclico e che, se $N \neq F$, N/F sia libero da torsione. Detto M^p il sottogruppo di M generato dalle p-esime potenze dei suoi elementi, F/M^p è un M-gruppo per quanto detto sopra, e quindi, poichè il suo sottogruppo di torsione ha esponente p, è abeliano. Allora anche F è abeliano in quanto $\bigcap_{p\in\Pi} M^p=1$. Ma M è massimo, onde $F=N$.

LEMMA 4. *Se ogni sezione subnormale di ordine p^2, p primo, di un gruppo G è ciclica, il reticolo, $n(G)$, dei sottogruppi normali di G è distributivo.*

DIM. Il reticolo $n(G)$ è modulare. Allora, se non fosse distributivo, G conterrebbe tre sottogruppi normali distinti A, B, C tali che $AB=AC=BC$ e $A \cap B=A \cap C=B \cap C$ [2, Th. 2, pag. 134]. Da $AB/A \cap \cap B=A/A \cap B \times B/A \cap B=A/A \cap B \times C/A \cap B=B/A \cap B \times C/A \cap B$ segue che $A/A \cap B$ è abeliano ed isomorfo a $B/A \cap B$. Esistono pertanto quattro sottogruppi A_1, A_2, B_1, B_2 tali che $A \geqq A_1 > A_2 \geqq A \cap B, B \geqq B_1 > > B_2 \geqq A \cap B$ ed $|A_1/A_2|=|B_1/B_2|=p$, con p primo. Da ciò segue $A_1B_2/A_2B_2=A_1/A_2B_2 \times B_1/A_2B_2$ con $|A_1/A_2B_2|=|B_1/A_2B_2|=p$ ed A_1B_1 subnormale in G, il che è assurdo essendo G privo di sezioni subnormali abeliane elementari d'ordine p^2.

2. Dimostrazioni dei teoremi A e B.

DIM. TEOREMA A. Poichè la necessità è evidente dimostriamo la sufficienza. Sia G un gruppo in cui ogni sezione subnormale di ordine p^3, p primo, è modulare. Indicati con H e K due sottogruppi subnormali di G, mostriamo dapprima che:

1) se $H \not\lesseqgtr K$, il permutante $P_H(K)$ di K in H contiene propriamente $H \cap K$.

Sia $K \lhd^n G$; se $n=1$, K è normale in G ed ovviamente $P_H(K)=H$ è più grande di $H \cap K$. Supposto $K \lhd^n G$ con $n>1$, proviamo la 1) per induzione su n. Se $K_1 \cap H > H \cap K$, essendo $K \lhd^{n-1} K_1$ il sottogruppo $P_{H \cap K_1}(K) > H \cap K$ e quindi anche $P_H(K) > H \cap K$. Sia $K_1 \cap H = H \cap K$. Posto $P = P_H(K_{n-1})$, per l'ipotesi di induzione $P > H \cap K$. Allora $K_{n-1} \lhd PK_{n-1}$, perchè altrimenti $H \cap K_1 > H \cap K$; e da ciò, per un risultato di Roseblade (Corollary, pag. 368 di [7]), segue $(K^P)^{(m)} \leqq K(\gamma KP^m)$ per ogni intero positivo m. Poichè P è subnormale in G (lemma 2), esiste un intero positivo r per cui $\gamma KP^r \leqq P$. D'altra parte $\gamma KP^r \leqq K^P$, e pertanto $(K^P)^{(r)} \leqq K$. Indicato con Q il permutante di P in K, Q contiene $(K^P)^{(r)}$, in quanto $(K^P)^{(r)}$, quale sottogruppo caratteristico di K^P, è normale in $\langle K, P \rangle = PK^P$. Allora, se $Q \neq K$, dalla risolubilità di $K/(K^P)^{(r)}$ e dalla subnormalità di Q segue che esiste in K un sottogruppo $F \lhd \lhd G$ che normalizza Q e tale che F/Q sia ciclico.

Si osservi adesso che se si particolarizza H, supponendo $H \cap K \lhd H$ e $H/H \cap K$ ciclico, PQ/Q risulta ciclico e quindi $\langle PQ, F \rangle/Q$, essendo generato da due sottogruppi subnormali ciclici, è, a norma di un risultato di Baer [1], nilpotente. L'essere $\langle PQ, F \rangle/Q$ a condizione massimale per i sottogruppi implica $\langle PQ, F \rangle \lhd \lhd G$, onde, per il lemma 3, $\langle PQ, F \rangle/Q$ è modulare. PQ ed F sono allora permutabili e perciò tali sono anche P ed F. Ciò è in contraddizione con la definizione di Q e quindi $Q=K$. Dunque se H e K sono sottogruppi subnormali di G tali che $H \cap K \lhd H$ e $H/H \cap K$ sia ciclico la 1) è vera. Ma allora, poichè, ritornando al caso in cui H è qualunque PQ ed F sono tali che $PQ \cap F = Q$ ed F/Q è ciclico, il permutare di PQ in F è, per quanto visto sopra, più grande di Q e infine tale risulta anche $P_F(P)$. Pertanto anche adesso $K=Q$ e la 1) è provata.

Dalla 1) discende subito che H e K sono permutabili. Infatti, se

$P_H(K)$ fosse propriamente contenuto in H, dalla $KP_H(K) \cap H = P_H(K)$ discenderebbe che il permutante di $KP_H(K)$ in H è più grande di $P_H(K)$, e ciò porterebbe ad una contraddizione.

I sottogruppi subnormali di G sono dunque a due a due permutabili e questo fatto, tenendo conto del lemma 1, assicura che $sn(G)$ è un reticolo modulare.

DIM. DEL TEOREMA B. *Sufficienza.* Sia G un gruppo con sezioni subnormali di ordine p^2, p numero primo, cicliche. Per il teorema A $sn(G)$ è un reticolo modulare. Per provare che $sn(G)$ è distributivo utilizziamo la ben nota proprietà [2] che un reticolo L è distributivo se e solo se non contiene elementi distinti a, b, c tali che $a \cup b = a \cup c$, $a \cap b = a \cap c$. Allora, se, per assurdo, si suppone $sn(G)$ non distributivo G contiene tre sottogruppi subnormali distinti H, K, Y tali che

$$(1) \qquad HK = HY, \quad H \cap K = H \cap Y$$

e, posto $J = HK$, $s(H, K, Y) = s(J : H) + s(J : K) + s(J : Y)$ sia minimo rispetto a queste proprietà. Si ha $H(K \cap H^J) = (HK) \cap H^J = H^J = (HY) \cap \cap H^J = H(Y \cap H^J)$, per cui, essendo anche $H \cap (K \cap H^J) = H \cap (Y \cap H^J)$, la minimalità di $s(H, K, Y)$ comporta $K \cap H^J = Y \cap H^J$ e quindi $H = H^J \lhd J$. Posto $T = (H \cap K)^J$, sia $K^* = TK$, $Y^* = TY$. È $K^* \neq Y^*$, altrimenti $K^J = Y^J$ e quindi $(H \cap K^J)K = (H \cap K^J)Y$, $(H \cap K^J) \cap K = (H \cap K^J) \cap Y$, con $s((H \cap K^J), K, Y)) < s(H, K, Y)$. Si ha poi $s(J : K^*) \leqq s(J : K)$, $s(J : Y^*) \leqq \leqq s(J : Y)$ ed inoltre $H \cap K^* = H \cap Y^*$, $HK^* = HY^*$. Si considerino i tre sottogruppi H, K^* e Y^* e sia $s(J : K^*) \leqq s(J : Y^*)$. Se $s(J : K^*) > 1$, esiste un $h \in H$ tale che $h^{-1}K^*h \neq K^*$. Segue da ciò: $HK^* = H(h^{-1}K^*h)$ ed $H \cap K^* = H \cap (h^{-1}K^*h)$, con $s(H, K^*, h^{-1}K^*h) \leqq s(H, K^*, Y^*)$; e, applicando la relazione di modularità, si ottiene che $H \cap K^J$, K^*, $h^{-1}K^*h$ verificano delle relazioni del tipo (1) con $s(H \cap K^J, K^*, h^{-1}K^*h) < s(H, K^*, Y^*)$, contro la minimalità di $s(H, K, Y)$. Pertanto $s(J : K^*) = 1$, cioè K^* è normale in J e quindi tale è anche K.

Si ha così: $H \lhd J$, $K \lhd J$ $Y \lhd^n J$.

Posto adesso $N = Y^J \cap H$, sia $\overline{K} = NK$, $\overline{Y} = NY$. Si ha: $\overline{Y} = (Y^J \cap H)Y = = (YH) \cap Y^J = Y^J$ e, poichè $H\overline{Y} = H\overline{K}$, $H \cap \overline{Y} = H \cap \overline{K}$ con $\overline{Y} \neq \overline{K}$, è $n = 1$ e pertanto anche $Y \lhd J$. Ma ciò è assurdo, poichè, per il lemma 4, $n(J)$ è distributivo.

La *necessità* è evidente.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER R.: *Nilgruppen,* Math. Z. 62 (1955), 402-437.

[2] BIRKHOFF G.: *Lattice theory,* A.M.S., 1948.

[3] CURZIO M., PERMUTTI R.: *Distributività nel reticolo dei sottogruppi normali di un T-gruppo,* Le Matematiche, vol. XX, fasc. I (1965), 46-63.

[4] IWASAWA K.: *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen,* J. of Univ. Tokyo, 4-3 (1941), 171-199.

[5] NAPOLITANI F.: *Proprietà reticolari dell'insieme dei sottogruppi subnormali,* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXXVIII (1967), 293-304.

[6] ROBINSON D. S.: *Joins of subnormal subgroups,* Ill. J. Math. 9 (1965), 144-168.

[7] ROSEBLADE J. E.: *The permutability of orthogonal subnormal subgroups,* Math. Z. 90 (1965), 365-372.

[8] ROSEBLADE J. E., STONEHEWER S.: *Subjunctive and locally coalescent classes of groups,* J. Algebra 8 (1968), 423-435.

[9] TAMASCHKE O.: *Die Kongruenzrelationen in Verband der zuganglichen Subnormalteiler,* Math. Z. 75 (1961), 115-126.

[10] ZACHER G.: *Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo,* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXVII (1957), 75-79.

[11] ZAPPA G.: *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo,* Boll. U.M.I., XI (1956), 150-157.

[12] ZAPPA G.: *Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare,* Boll. U.M.I., XI (1956), 315-318.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 luglio 1969.