RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Sui gruppi relativamente complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 209-214

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__209_0>

SUI GRUPPI RELATIVAMENTE COMPLEMENTATI

FEDERICO MENEGAZZO (*)

Un gruppo G è relativamente complementato [3] se tale è il reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei suoi sottogruppi, e cioè se per ogni terna A, B, C di sottogruppi di G tali che $A \leq B \leq C$ esiste un sottogruppo L di G per il quale $C = B \cup L$, $A = B \cap L$. Se il gruppo G è finito, è allora noto [3] che esso è relativamente complementato se e solo se G è un $\overline{T}$-gruppo risolubile con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p [1]. In questa nota si dimostra (n. 1) che il gruppo risolubile o localmente finito G è relativamente complementato se e solo se G è un $\overline{T}$-gruppo risolubile periodico con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p, e tale che tutti i π-sottogruppi di Sylow di G ($\pi = \omega(G/G')$) siano complementi di G'; se in particolare G è finito si riottiene la caratterizzazione di [3].

Le notazioni e le definizioni sono quelle usuali della teoria dei gruppi. Il gruppo G si dice T-gruppo se $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ implica $A \trianglelefteq G$; G è un $\overline{T}$-gruppo se ogni suo sottogruppo è un T-gruppo.

Se H è un gruppo periodico $\omega(H)$ è l'insieme dei numeri primi p tali che H possiede un elemento di ordine p.

1. Mettiamo in evidenza una proprietà dei T-gruppi che sarà usata nel seguito.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) Nei lavori [4], [1] si affronta il problema dei gruppi infiniti relativamente complementati, ma le caratterizzazioni in essi ottenute non sono corrette (cfr. l'esempio al n. 2).

LEMMA 1.1. *Sia G un T-gruppo risolubile periodico con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p; poniamo $\omega(G/G')=\pi$. Se ogni π-sottogruppo di Sylow di G è un complemento di G', allora ogni π-sottogruppo di Sylow di H (di G/N) è un complemento in H (in G/N) di $G'\cap H$ (di G'/N), per ogni sottogruppo H di G e per ogni sottogruppo N di G'.*

i) $G'\leq H\leq G$. Un arbitrario π-sottogruppo di Sylow S di H è contenuto in un π-sottogruppo di Sylow T di G tale che $G=G'T$ e, poichè $S\leq T\cap H$, per la massimalità di S risulta $S=T\cap H$ da cui $G'S= =G'(T\cap H)=H$.

ii) $N\leq G'$ (e quindi [2] $N\lhd G$). Se S/N è un arbitrario π-sottogruppo di Sylow di G/N, scegliamo un π-sottogruppo di Sylow S_1 di S e un π-sottogruppo di Sylow T di G contenente S_1. Posto $G'=M\times N$ risulta $MT\cap S\cap G'=1$ e da $S_1\leq MT\cap S\leq S$ segue, per la massimalità di S_1, $MT\cap S=S_1$ da cui $NS_1=N(MT\cap S)=N(MT)\cap S=S$; in particolare $S\leq NT$. Ma allora $NT/N=S/N$ perchè S/N è di Sylow in G/N e dunque $(G'/N)(S/N)=(G'/N)(NT/N)=G'T/N=G/N$.

iii) Sia H un arbitrario sottogruppo di G. Posto $G'=(G'\cap H)\times N$, G/N soddisfa le ipotesi del lemma per ii) e perchè $(G/N)'=G'/N$; segue da $H\cong NH/N=G'H/N$ e da i) che anche H gode della proprietà enunciata.

TEOREMA 1.2. *Il gruppo risolubile G è relativamente complementato se e solo se è un T-gruppo periodico con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p, e tale che ogni π-sottogruppo di Sylow di G sia un complemento di G'* ($\pi=\omega(G/G')$).

Dimostriamo che la condizione è necessaria. G non contiene fattori ciclici di ordine p^2, p un primo, il cui reticolo non è complementato; quindi G è periodico e i p-sottogruppi di Sylow hanno esponente p. Se $A\trianglelefteq B\trianglelefteq C\leq G$, esiste $L\leq C$ tale che $A=B\cap L\trianglelefteq L$ e $\mathfrak{N}_G(A)\geq B\cup L=C$: G è un T-gruppo (e anzi un $\overline{T}$-gruppo); ma allora [2] G' è abeliano e di Hall in G, e quindi i p-sottogruppi di Sylow di G sono abeliani elementari. Per ogni π-sottogruppo di Sylow S di G esiste $C\leq G$ tale che $G'S\cap C=S$, $G=(G'S)C=G'C$; poichè $C\cap G'\leq S\cap G'=1$, C è un π-gruppo contenente S, da cui $S=C$ è un complemento di G'.

La condizione è sufficiente. Siano A, B, C sottogruppi di G tali che $A\leq B\leq C$; non è restrittivo supporre $A\cap G'=1$. Se S è un π-sottogruppo di Sylow di B contenente A, e T un π-sottogruppo di Sylow di C contenente S, risulta $B=(G'\cap B)S$, $C=(G'\cap C)T$ per il lemma; poichè T è abeliano elementare esiste $R\leq T$ tale che $T=SR$, $S\cap R=A$. Posto $G'\cap C=(G'\cap B)\times C_1$ e $F=C_1R$, si ha $C=(G'\cap C)T=(G'\cap B)C_1SR=$ $=(G'\cap B)SC_1R=BF$, $A\leq B\cap F$ e anzi se $x\in B\cap F=(G'\cap B)S\cap C_1R$, $x=bs=c_1r\in G'T$, con $b\in G'\cap B$, $s\in S$, $c_1\in C_1$, $r\in R$; poichè $G'\cap T=1$ si ha $b=c_1\in(G'\cap B)\cap C_1=1$, $x\in S\cap R=A$, $B\cap F=A$, c.v.d.

COROLLARIO 1.3. *Il gruppo localmente finito G è relativamente complementato se e solo se è un T-gruppo risolubile con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p, e tale che ogni π-sottogruppo di Sylow di G sia un complemento di G'* ($\pi=\omega(G/G')$).

I sottogruppi finitamente generati del gruppo localmente finito e relativamente complementato G sono $\overline{T}$-gruppi finiti, e quindi [2] sono metabeliani; G è allora risolubile e la conclusione segue subito dal teorema.

DEFINIZIONE. Siano G un gruppo periodico e π un insieme di numeri primi: una π-base completa di Sylow di G è una collezione $\mathfrak{S}=\{S_i\}$ di sottogruppi di G, di cui S_0 è un π-sottogruppo di Sylow di G e S_i $(i\neq 0)$ è un p_i-sottogruppo di Sylow G per ogni numero primo $p_i\notin\pi$ e inoltre

1) $S_iS_j=S_jS_i$ per ogni coppia di sottogruppi in $\mathfrak{S}$ e

2) $G=\bigcup_{S_i\in\mathfrak{S}} S_i$.

COROLLARIO 1.4. *Il gruppo risolubile (localmente finito) G è relativamente complementato se e solo se è un T-gruppo periodico (risolubile) con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p, e tale che ogni π-sottogruppo di Sylow di G (π un arbitrario insieme di primi) è immergibile in una π-base completa di Sylow di G.*

Infatti, posto $\pi=\omega(G/G')$, ciò equivale ad ammettere che i π-sottogruppi di Sylow di G sono complementi di G'.

2. La struttura dei T-gruppi risolubili periodici con p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p è ben nota [2]: G' è abeliano elementare, di Hall in G e non contiene 2-elementi, G/G'

è elementare, e gli automorfismi indotti dagli elementi di G mediante coniugazione in G' sono automorfismi potenze. Se G è finito queste condizioni sono sufficienti, per il teorema di Schur-Zassenhaus, a garantire in base al teorema 1.2 che G è relativamente complementato: in questo caso quindi si è riottenuta la caratterizzazione di [3].

LEMMA 2.1. *Sia G un T-gruppo risolubile periodico con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p. Allora $\mathcal{C}_G(G')=G'\times H$, H è un fattore diretto di G e G è relativamente complementato se e solo se G/H è relativamente complementato.*

G' è un sottogruppo di Hall contenuto nel centro di $\mathcal{C}_G(G')$, e quindi $\mathcal{C}_G(G')=G'\times H$. G/G' è abeliano elementare, pertanto $G/G'=$ $=\mathcal{C}_G(G')/G'\times K/G'$ da cui $G=(H\times G')K=H\times K$ poichè $H\trianglelefteq G$ e $H\cap K=1$. Supponiamo ora che (G/H e quindi) K sia relativamente complementato. Per ogni π-sottogruppo di Sylow S di G ($\pi=\omega(G/G')$) $H\trianglelefteq G$ implica $H\leq S$; se T è un π-sottogruppo di Sylow di K contenente $S\cap K$ risulta $G'T=K$, $S=S\cap(K\times H)=(S\cap K)\times H\leq TH$, da cui $S=TH$; quindi $G'S=G'TH=KH=G$, e per l'arbitrarietà di S G è relativamente complementato.

Non è quindi restrittivo supporre, come faremo talora nel seguito, che $G'=\mathcal{C}_G(G')$; il problema, tuttora aperto, è dunque di determinare quali sottogruppi abeliani elementari C del gruppo $P(G')$ degli automorfismi potenze di G', per i quali $\omega(C)\cap\omega(G')=\emptyset$, siano tali che se $G/G'\cong C$ allora G è relativamente complementato.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia G un T-gruppo risolubile periodico con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p. G è relativamente complementato se e solo se è relativamente complementato $G/(G'\cap\mathcal{C}_G(g))$ per ogni $g\in G$.*

È sufficiente dimostrare che un arbitrario π-sottogruppo di Sylow S di G ($\pi=\omega(G/G')$) è un complemento di G'. Per un fissato $g\in G$ $G'=[g, G']\times(G'\cap\mathcal{C}_G(g))=[g, G']\times K_g$ per un conveniente sottogruppo K_g di G' e $\langle g\rangle^G=[g, G']\langle g\rangle$; poichè G/K_g è relativamente complementato per ipotesi e $\langle g\rangle^G S\cong(K_g[g, G']\langle g\rangle S)/K_g=(G'\langle g\rangle S)/K_g\leq$ $\leq G/K_g$ anche $\langle g\rangle^G S$ è relativamente complementato, da cui $\langle g\rangle^G S=[g, G']S$ e $g\in G'S$. Ciò vale per ogni $g\in G$ e dunque $G=G'S$, c.v.d.

Poichè G' è il prodotto diretto dei suoi p-sottogruppi di Sylow G'_p, $P(G')$ è il prodotto cartesiano (senza restrizione) dei gruppi $P(G'_p)$ degli automorfismi potenze dei G'_p, cioè $P(G') \cong \underset{p \in \omega(G')}{\times} C(p-1)$ dove $C(p-1)$ indica un gruppo ciclico di ordine $p-1$. Pertanto $G/G' = C$ è un sottogruppo periodico elementare di $\underset{p \in \omega(G')}{\times} C(p-1)$, $\omega(C) \cap \omega(G') = \emptyset$ e C ha, in generale, la potenza del continuo.

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia G un T-gruppo periodico risolubile con i p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari. Se, con riferimento alle notazioni precedenti, $G/\mathcal{C}_G(G') = C \leq \prod_{p \in \omega(G')} C(p-1)$ (prodotto diretto ordinario), allora G è relativamente complementato.*

Infatti per ogni $g \in G$ $\omega([g, G'])$ è in questo caso un sottoinsieme finito di $\omega(G')$; il centralizzante di $G'/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ in $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ ha quindi indice finito in $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$: vale in $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ il teorema di Schur-Zassenhaus sull'esistenza e il coniugio dei complementi di $G'/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ e dunque $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ è relativamente complementato. La conclusione segue ora dalla proposizione 2.2.

ESEMPIO. Si considerino infiniti gruppi non abeliani $H_i = \langle a_i, b_i \rangle$ di ordine $p_i q_i$ con p_i, q_i numeri primi dispari tali che $p_i > q_i$, $|a_i| = p_i$, $|b_i| = q_i$, di ordini a due a due primi tra loro; detto $H = \prod_i H_i$, poniamo $G = \langle z, H \rangle$, dove $z^2 = 1$, $z^{-1} a_i z = a_i^{-1}$, $z^{-1} b_i z = b_i$.

Allora $G' = \prod_i \langle a_i \rangle$ è abeliano elementare di Hall in G e non ha elementi di periodo 2; $C = \langle z, \prod_i \langle b_i \rangle \rangle$ è abeliano elementare e gli automorfismi interni indotti dagli elementi di G subordinano in G' automorfismi potenze, sicchè G è un T-gruppo risolubile periodico a p-sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p. G non è relativamente complementato: infatti il sottogruppo $S = \prod_i \langle a_i b_i \rangle$ è un π-sottogruppo di Sylow di G ($\pi = \omega(G/G')$) che non è un complemento di G' (è sufficiente notare che, per ogni $a \in G'$, $[az, a_i b_i] \neq 1$ non appena $(|a|, p_i) = 1$).

Si osservi che, qualunque sia il numero primo p, ogni p-sottogruppo di Sylow di G è inseribile in una base completa di Sylow di G, in contraddizione con quanto affermato in [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] Abramovskiǐ I. N., *Sui gruppi il cui reticolo dei sottogruppi è relativamente complementato,* Algebra i Logica Seminar 6 (1967), 1, 5-8.

[2] Robinson D. J. S., *Groups in which normality is a transitive relation,* Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 21-38.

[3] Zacher G., *Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementati,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, (4) 19 (1952), 200-206.

[4] Zacher G. e Emaldi M., *I gruppi risolubili relativamente complementati,* Ricerche di matematica XIV (1965), 1, 1-8.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1969.