

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MICHEL ARTOLA

Dérivées intermédiaires dans les espaces de Hilbert pondérés. Application au comportement à l' ∞ des solutions des équations d'évolution

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 43 (1970), p. 177-202

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__177_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉRIVÉES INTERMÉDIAIRES DANS LES ESPACES
DE HILBERT PONDÉRÉS
APPLICATION AU COMPORTEMENT À L^∞
DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

MICHEL ARTOLA *)

INTRODUCTION

Cet article est le développement (avec quelques compléments) d'une note aux C.R.A.S. de l'auteur (voir Artola [1]).

Son objet est l'étude du comportement pour $t \rightarrow +\infty$ des solutions « L^2 » d'équations différentielles opérationnelles linéaires.

Plus précisément, si V et H sont deux espaces de Hilbert complexes ($V \hookrightarrow H$ avec injection continue, V dense dans H) et V' l'antidual de V , on s'intéresse à l'équation d'évolution dans V' :

$$(I) \quad \begin{cases} D_t^m u + A(t)u = f \\ f \text{ convenable, } A(t) \text{ opérateur non borné dans } H. \end{cases}$$

D'une manière générale la fonction

$$Q \mid t \rightarrow \| A(t) \|_{\mathcal{L}(V, V')}$$

que l'on peut supposer croissante vérifie

$$(II) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = +\infty.$$

Dans ces conditions, pour

*) Indirizzo dell'A.: Michel Artola, Institut de Mathématique, Faculté des Sciences, Bordeaux (France).

$$(III) \quad \begin{cases} u \in L^2(H)^1 \text{ (} u \text{ solution de (I))} \\ f \text{ convenable.} \end{cases}$$

On a

$$(IV) \quad D_t^m \in L_{l/q}^2(V')^2.$$

Ceci suggère l'étude des espaces

$$(V) \quad H^m(C_0, V; C_m, (V), D_t^m u \in L_{C_0}^2(V), D_t^m u \in L_{(V')}^2).$$

An n. I nous démontrons des théorèmes de dérivées intermédiaires, généralisant celui de Lions [1] (cas de $C_0, C_m=1$), en nous plaçant dans des hypothèses restrictives pour les poids commandées par le but à atteindre.

Pour des résultats du même type, on peut consulter Baouendi [1]³) (cas $C_0=t^a, C_m=1$) et pour des généralisations aux cas L^p Lions [2] et Artola [2].

Notons cependant que les théorèmes présentés ici donnent les résultats plus précis en ce qui concerne les espaces que le résultat de Artola [2] qui est cependant valable pour une classe de poids très générale.

Monsieur J. L. Lions m'a guidé très efficacement dans ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

I. THEOREMES DE DERIVEES INTERMEDIAIRES

1. Hypothèses - Données générales.

On se donne deux espaces de Hilbert complexes séparables

$$(1.1) \quad \begin{cases} A_i \text{ } \{i=0, m\} \\ A_0 \hookrightarrow A_m \text{ (injection continue)} \\ A_0 \text{ dense dans } A_m. \end{cases}$$

¹) Si X est un Banach $L^p(X)$ désigne (sauf mention du contraire) l'espace des classes de fonctions fortement mesurables de puissance p . sommable pour la mesure de Lebesgue $(0, +\infty)$ à valeurs dans X .

²) $L_p^p(X) = \{u \mid \rho u \in L^p(X)\}$.

³) Le résultat de Baouendi [1] rentre dans le cadre de ce qui est fait ici (voir remarque I.6).

Nous désignons par

$$H^{(m)}(C_0, A_0; C_m, A_m) = H_{C_0, C_m}^{(m)} \text{ } ^4$$

l'espace:

$$(1.2) \quad \{ \text{classe des } u \mid u \in L_{C_0}^2(A_0), u^{(m)} \in L_{C_m}^2(A_m) \} \text{ } ^5.$$

D'une manière générale, les C_i étant des poids, A_i des Hilberts, avec $i \in \mathbf{N}$, nous poserons

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_i(t) = \int_0^t C_i^2(\sigma) |u^{(i)}(\sigma)|^2 d\sigma \\ \mathfrak{N}_i(+\infty) = \mathfrak{N}_i \quad i \in \mathbf{N}. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions $H_{C_0, C_m}^{(m)}$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$(1.4) \quad u \rightarrow |u|_{H_{C_0, C_m}^{(m)}} = (\mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_m)^{1/2}.$$

Si l'on note $(,)_i$ le produit scalaire dans A_i , on désigne par Λ l'opérateur auto-adjoint positif de domaine $D(\Lambda)$ l'ensemble des $u \in A_0$ tels que la forme antilineaire

$$(1.5) \quad v \rightarrow (u, v)_0$$

soit continue sur A_0 , pour la topologie de A_m , et donné sur $D(\Lambda)$ par

$$(1.6) \quad (u, v)_0 = (\Lambda u, v)_m.$$

L'espace $(A_0, A_m)_\theta$ $\theta \in (0, 1)$ est alors le domaine de l'opérateur $\Lambda^{\frac{1-\theta}{2}}$; c'est un espace de Hilbert pour la norme du graphe.

On sait (cf. Lions [1]) que

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in H_{1,1}^{(m)} \text{ implique } u^{(j)} \in L^2(A_j) \\ A_j = (A_0, A_m)_{j/m} \quad 0 < j < m. \end{array} \right.$$

⁴) Les C_i ($i = 0, m$) sont des poids.

⁵) La dérivée est prise au sens des distributions à valeurs vectorielles. Donc u et $u^{(m)}$ sont supposés localement sommables pour que (1-2) ait un sens.

Nous allons étendre ce résultat au cas des espaces H_{c_0, c_m}^m en faisant l'hypothèse (restrictive) ⁶⁾:

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les fonctions } C_i \ (i=0, m) \text{ sont décroissantes au sens large} \\ \text{positives et continues dans }]0, +\infty[. \end{array} \right.$$

L'hypothèse de décroissance entraîne:

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'espace des fonctions } u \in H_{c_0, c_m}^m \text{ avec } \text{supp } u \in]0, +\infty[\text{ } ^7) \\ \text{est dense dans} \\ H_{c_0, c_m}^{(m)} = \{u \mid u \in H_{c_0, c_m}^{(m)}, u^{(j)}(0) = 0 \ j=0, 1, \dots, m-1\} \text{ } ^8). \end{array} \right.$$

Nous laissons la vérification de (1.9) au lecteur (cf. Artola [2]).

2. Un lemme préliminaire.

LEMME I.1. *L'hypothèse (1.8) étant vérifiée et étant donné $u \in \overset{\circ}{H}_{c_0, c_m}^{(m)}$, on a*

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \geq 0 \quad \mathcal{O}\mathcal{C}_j(t) \leq 9\{\mathcal{O}\mathcal{C}_{j-1}(t) + \mathcal{O}\mathcal{C}_{j+1}(t)\} \\ j=0, 1, \dots, m-1. \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME I.1. D'après (1.9) on peut supposer u nulle dans un voisinage de 0.

1) On considère la diagonalisation avec somme mesurable de l'opérateur Λ

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une isométrie} \\ u \rightarrow \widehat{u} \\ A_m \rightarrow \mathcal{H} = \int^{\otimes} \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda) \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0 \\ (\nu \text{ mesure positive}) \text{ telle que} \\ u \in D(\Lambda^p) \Leftrightarrow \lambda^p \widehat{u} \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

⁶⁾ Voir introduction.

⁷⁾ $\text{supp} = \text{support}$.

⁸⁾ On montre alors aisément que l'espace $\mathfrak{D}(]0, +\infty[; A_0)$ est dense dans $H_{c_0, c_m}^{(m)}$.

Dans ces conditions, notons que

$$(2.3) \quad u^{(j)} \in L^2_{C_j}[(a, b); A_j] \Leftrightarrow \lambda^{1/2-j/2m} \widehat{u}^{(j)} \in L^2[(a, b); \mathcal{H}]$$

2) En notant (abusivement) $\widehat{u}(t)$ au lieu de $\widehat{u}(t; \lambda)$ et en désignant par $(\cdot, \cdot)_\lambda$ (resp. $|\cdot|_\lambda$) le produit scalaire (resp. la norme) dans $\mathcal{H}(\lambda)$, on a :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\widehat{u}^{(j+1)}(\tau), \widehat{u}^{(j-1)}(\tau))_\lambda = \frac{d}{d\tau} (u^{(j)}(\tau), \widehat{u}^{(j-1)}(\tau))_\lambda - |\widehat{u}^{(j)}(\tau)|_\lambda^2 \\ d\nu \text{ p.p. en } \lambda \text{ pour tout } \tau > 0 \text{ si } j \leq m-2 \text{ et p.p. en } \tau \text{ si } \\ j = m-1. \end{array} \right.$$

Posons

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_j = C_0^{1-j/m} C_m^{j/m} \\ \widehat{\mathcal{C}}_j(t, \lambda) = \int_0^t \lambda^{1-j/m} C_j^2(\tau) |\widehat{u}^{(j)}(\tau)|_\lambda^2 d\tau \end{array} \right.$$

alors

$$(2.6) \quad \widehat{\mathcal{C}}_j(t; \lambda) \leq |\widehat{X}(t, \lambda)| + |\widehat{Y}(t, \lambda)| + |\widehat{Z}(t, \lambda)|$$

avec

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(t, \lambda) = C_j^2(t) \lambda^{1-j/m} \Re e(\widehat{u}^{(j)}(t), \widehat{u}^{(j-1)}(t))_\lambda \\ \widehat{Y}(t, \lambda) = 2 \Re e \int_0^t \lambda^{1-j/m} \Re e(\widehat{u}^{(j)}(\tau), \widehat{u}^{(j-1)}(\tau))_\lambda C_j(\tau) dC_j(\tau) \\ dC_j(\tau) = C'_j(\tau) d\tau \text{ p.p.} \\ \widehat{Z}(t, \lambda) = \int_0^t C_j^2(\tau) \lambda^{1-j/m} \Re e(\widehat{u}^{(j+1)}(\tau), \widehat{u}^{(j-1)}(\tau))_\lambda d\tau \end{array} \right.$$

Or

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\widehat{X}(t, \lambda)| \leq \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_j(t, \lambda) \\ \widehat{\Phi}_j = \alpha_j C_{j+\frac{1}{2}}^2 + \beta_j C_{j-\frac{1}{2}}^2 \\ \widehat{\alpha}_j(\tau, \lambda) = \lambda^{1-\frac{2j+1}{2m}} |\widehat{u}^{(j)}(\tau)|^2; \quad \widehat{\beta}_j = \lambda^{1-\frac{2j-1}{2m}} |\widehat{u}^{(j-1)}(\tau)|^2 \end{array} \right.$$

et

$$(2.9) \quad |\widehat{Z}(t, \lambda)| \leq \frac{1}{2} [\widehat{\mathcal{U}}_{j+1}(t, \lambda) + \widehat{\mathcal{U}}_{j-1}(t, \lambda)]$$

donc de (2.6) on déduit en notant que $dC_j \leq 0$, $0 \leq j \leq m$:

$$(2.10) \quad \widehat{\mathcal{U}}_j(t, \lambda) \leq \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_j(t, \lambda) - \int_0^t \widehat{\Phi}_j(\tau, \lambda) \frac{dC_j}{C_j} + \frac{1}{2} \{ \widehat{\mathcal{U}}_{j+1}(t, \lambda) + \widehat{\mathcal{U}}_{j-1}(t, \lambda) \}.$$

Admettons alors provisoirement

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_j(t, \lambda) - \int_0^t \widehat{\Phi}_j(\tau, \lambda) \frac{dC_j(\tau)}{C_j(\tau)} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{U}}_j(t, \lambda) + 4(\widehat{\mathcal{U}}_{j-1}(t, \lambda) + \widehat{\mathcal{U}}_{j+1}(t, \lambda)) \end{aligned}$$

alors

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathcal{U}}_j(t, \lambda) \leq 9[\widehat{\mathcal{U}}_{j+1}(t, \lambda) + \widehat{\mathcal{U}}_{j-1}(t, \lambda)] \\ \forall t > 0 \quad d\nu \text{ p.p. en } \lambda \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{array} \right.$$

Par intégration en λ par rapport à $d\nu(\lambda)$ et en tenant compte de (2.3) on obtient la conclusion du lemme pour les fonctions de $\dot{H}_{c_0, c_m}^{(m)}$ nulles dans un voisinage de 0. Par densité de cet espace dans $\dot{H}_{c_0, c_m}^{(m)}$ la démonstration du lemme est achevée sous réserve de vérifier (2.11).

3) Vérification de (2.11)

i) On commence par noter (le ' désignant la dérivée en t):

$$(2.13) \quad \text{1er membre (2.11)} =$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{\Phi}_j(t, \lambda) + \int_0^t \widehat{\Phi}'_j(\tau, \lambda) d\tau - \int_0^t \widehat{\Phi}_j(\tau, \lambda) \frac{dC_j(\tau)}{C_j(\tau)}$$

et que l'on peut écrire:

$$(2.14) \quad \left\{ \widehat{\Phi}'_j = \Psi_{1j} + \Psi_{2j} \text{ avec } \begin{cases} \Psi_{1j} = \widehat{\alpha}'_j C_{j-\frac{1}{2}}^2 + \widehat{\beta}'_j C_{j+\frac{1}{2}}^2 \\ \Psi_{2j} = 2(\widehat{\alpha}_j C_{j+1/2} dC_{j+1/2} + \widehat{\beta}_j C_{j-1/2} dC_{j-1/2}) \end{cases} \right.$$

ii) On observe que

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{2j} dt - \widehat{\Phi}_j \frac{dC_j}{C_j} = C_j \left(\widehat{\alpha}_j d \left[\frac{C_{j+\frac{1}{2}}^2}{C_j} \right] + \widehat{\beta}_j d \left[\frac{C_{j-\frac{1}{2}}^2}{C_j} \right] \right) \\ \frac{C_{j+\frac{1}{2}}^2}{C_j} = C_{j+1}, \quad \frac{C_{j-\frac{1}{2}}^2}{C_j} = C_{j-1} \quad j=1, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

d'où, d'après (1.8)

$$(2.16) \quad \Psi_{2j} dt - \widehat{\Phi}_j \frac{dC_j}{C_j} \leq 0$$

et

$$(2.17) \quad \text{1er membre de (2.11)} \leq \int_0^t |\Psi_{1j}(\tau)| d\tau.$$

iii) Reste à majorer l'intégrale du 2e membre de 2.16.

Or:

$$(2.18) \quad |\Psi_{1j}| < |\widehat{\alpha}'_j| C_{j+\frac{1}{2}}^2 + |\widehat{\beta}'_j| C_{j-\frac{1}{2}}^2$$

et

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\widehat{\alpha}'_j| \leq \frac{1}{4} \left| \lambda^{\frac{1-j}{2}} C_j \widehat{u}^{(j)} \right|_{\lambda^2}^2 + 4 \left| \lambda^{\frac{1-j-1}{2}} C_{j+1} \widehat{u}^{(j+1)} \right|_{\lambda^2}^2 \\ |\widehat{\beta}'_j| \leq \frac{1}{4} \left| \lambda^{\frac{1-j}{2}} C_j \widehat{u}^{(j)} \right|_{\lambda^2}^2 + 4 \left| \lambda^{\frac{1-j+1}{2}} C_{j-1} \widehat{u}^{(j-1)} \right|_{\lambda^2}^2 \end{array} \right.$$

d'où

$$(2.20) \quad \int_0^t \Psi_{1j}(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2} \mathfrak{N}_{\mathcal{L}_j}(t, \lambda) + 4(\mathfrak{N}_{\mathcal{L}_{j+1}}(t, \lambda), \mathfrak{N}_{\mathcal{L}_{j-1}}(t, \lambda)).$$

d'où 2.11.

REMARQUE I.1. Si C_i est supposée continue dans $[0, +\infty[$ ($i=0, m$), u est localement dans $H_{1,1}^{(m)}$ et dans ces conditions on sait (Lions [1]) que $u^{(j)}$ est continue à valeurs dans $A_{j+1/2}$ pour $0 \leq j \leq m-1$, ce qui permet de définir $u^{(j)}(0)$ pour $0 \leq j \leq m-1$. Dans ces conditions, en reprenant les calculs précédents, on aboutit à :

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } u \in H_{C_0, C_m}^{(m)} \text{ et pour tout } t \geq 0 \\ \mathfrak{N}_{\mathcal{L}_j}(t) \leq 3\Phi_j(0) + 9\{\mathfrak{N}_{\mathcal{L}_{j-1}}(t) + \mathfrak{N}_{\mathcal{L}_{j+1}}(t)\} \\ \Phi_j(0) = \{C_{j-\frac{1}{2}}^2(0) | u^{(j-1)}(0) |_{A_{j-\frac{1}{2}}}^2 + C_{j+\frac{1}{2}}^2(0) | u^{(j)}(0) |_{A_{j+\frac{1}{2}}}^2\}. \end{array} \right.$$

REMARQUE I.2. En général, pour $u \in H_{C_0, C_m}^{(m)}$, on ne peut espérer une inégalité telle que (2.1) valable pour tout $t \geq 0$.

Soit en effet, $u(t)=t$, $m=2$ on voit alors facilement que pour t assez petit on a :

$$\int_0^t \tau^2 C_0^2(\tau) d\tau \leq \int_0^t C_0(\tau) C_2(\tau) d\tau$$

ce qu'il ne faut pas.

3. Le théorème de dérivées intermédiaires pour $\dot{H}_{C_0, C_m}^{(m)}$.

THÉORÈME I.1. Moyennant (1.8), l'application $u \rightarrow u^{(i)}$ est continue de $\dot{H}_{C_0, C_m}^{(m)} \rightarrow L_C^2(A_j)$ A_j, C_j donnés par (1.7) et (2.5).

En outre on a l'inégalité de convexité logarithmique

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_{\mathcal{L}_j} \leq \Gamma_{m,j} \mathfrak{N}_0^{1-j/m} \mathfrak{N}_m^{j/m} \quad \Gamma_{m,j} = 18^{j(m-j)} \\ j = 1, \dots, m-1. \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.1. De la démonstration du lemme I.1, il résulte que l'inégalité (2.1) est valable:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ pour toute fonction } u \text{ localement dans } \mathring{H}_{1,1}^{(m)} \\ 2) \text{ quels que soient les poids pourvu qu'ils vérifient l'hypothèse 1.8.} \end{array} \right.$$

On fait alors un raisonnement d'homogénéité:

Etant $\rho > 0$, on peut appliquer (2.1) pour

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\rho \text{ définie } u_\rho(\tau) = u(\rho\tau) \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^+, u \in \mathring{H}_{c_0, c_m}^{(m)} \\ C_{\rho_i} \text{ définie par } C_{\rho_i}(\tau) = C_i(\rho\tau) \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^+ \\ t \text{ remplacé par } \frac{\rho}{t}. \end{array} \right.$$

Ainsi après un changement de variable évident, on obtient:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \rho > 0 \text{ et } t \in \mathbf{R}^+ \\ 9\rho^4 \mathcal{C}_{j+1}(t) - \rho^2 \mathcal{C}_j(t) + 9\mathcal{C}_{j-1}(t) \geq 0. \end{array} \right.$$

Choisissant

$$\rho^2 = \frac{\mathcal{C}_j(t)}{18\mathcal{C}_{j+1}(t)}$$

il vient

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \geq 0 \\ \mathcal{C}_j^2(t) \leq K_0 \mathcal{C}_{j-1}(t) \mathcal{C}_{j+1}(t), \quad K_0 = 9^2 \times 2^2 \end{array} \right.$$

d'où

$$(3.6) \quad \mathcal{C}_j(t) \leq K_0^j \binom{m-j}{2} \mathcal{C}_0(t)^{1-j/m} \mathcal{C}_m(t)^{j/m} \leq \Gamma_m, j \mathcal{C}_0^{1-j/m} \mathcal{C}_m^{j/m}.$$

Le théorème I.1 suit

4. Le théorème de dérivées intermédiaires pour $H_{c_0, c_m}^{(m)}$.

THÉORÈME I.2. Soit j fixé $\{0, 1, \dots, m-1\}$. On suppose 1.8 vérifiée.

On fait l'hypothèse supplémentaire

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^k C_0 \left\{ \begin{array}{l} \notin L^2(0, 1) \text{ si } k < j \\ \in L^2(0, 1) \text{ si } k = j \end{array} \right. \\ \int_0^t C_k^2(\sigma) d\sigma < +\infty \quad k \leq j \leq m-1. \end{array} \right.$$

Alors l'application $u \rightarrow u^{(j)}$ est continue de

$$H^m(C_0, A_0; C_m, A_m) \rightarrow H^{(m-j)}(C_j, A_j; C_m, A_m).$$

REMARQUE 1.3. Soit

$$(4.2) \quad \gamma_j u = u_j(0) \text{ la trace d'ordre } j \text{ de } u \in H_{C_0, C_m}^{(m)}$$

lorsqu'elle existe.

D'après Poulsen [1] $\gamma_j u$ existe si et seulement si

$$(4.3) \quad \frac{t^{m-j-1}}{C_m} \in L^2(0, 1)$$

ce qui est toujours vérifié avec (1.8).

Il résulte alors de Lions [1], Lions-Peetre [1]

$$(4.4) \quad \gamma_j(u) \in A_{j+1/2} \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

Notons d'autre part

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } C_0 \notin L^2(0, 1) \\ \text{alors } \gamma_0(u) = 0 \end{array} \right.$$

car si $\gamma_0(u) \neq 0$ on aurait

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } \forall t \in (0, \varepsilon) \\ \|u(t)\|_{A_{j+1/2}} \geq \frac{1}{2} \|\gamma_0 u\|_{A_m} = \beta > 0 \end{array} \right.$$

et dans ce cas

$$(4.7) \quad \int_0^\varepsilon \|C_0 u\|_{A_0}^2 d\tau \geq \int_0^\varepsilon \|C_0 u\|_{A_m}^2 d\tau \geq \beta \int_0^\varepsilon C_0^2(\sigma) d\sigma = +\infty$$

ce qui est absurde.

On déduit alors de l'observation (4.5) que si $C_j \notin L^2(0, 1)$ le théorème I.2 peut être en défaut.

En effet, si $u \in H^{(m, j)}(C_j, A_j; C_m, A_m)$ on a $\gamma_0(u) = 0$ et ce n'est pas le cas de $\gamma_j(u)$ pour $u \in H_{C_0, C_m}^m$.

EXEMPLE.

$$C_0 = \frac{1}{t}, \quad C_m = 1, \quad A_0 = A_m = \mathbf{R}$$

$$u = 1 - e^{-2t}, \quad m = 2.$$

REMARQUE 1.4. Supposons

$$(4.8) \quad t^{j-1} C_0 \notin L^2(0, 1).$$

Alors

$$(4.9) \quad \gamma_k(u) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq j-1.$$

En effet, supposons que

$$(4.10) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta \text{ tel que } \forall t \in (0, \eta) \text{ on ait} \\ t^{-j} \|u(t)\|_{A_m} \geq \varepsilon \end{cases}$$

alors

$$(4.11) \quad \int_0^\eta \|C_0(\tau)u(\tau)\|_{A_0}^2 d\tau \geq \varepsilon \int_0^\eta [t^j C_0(\tau)]^2 d\tau = +\infty$$

ce qui est absurde.

En conséquence

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on peut trouver } \{t_q\} \text{ avec } \lim_{q \rightarrow +\infty} \{t_q\} = 0 \text{ telle que} \\ \lim_{q \rightarrow +\infty} \{t_q^{-j} \|u(t_q)\|_{A_m}\} = 0. \end{array} \right.$$

On constate alors facilement que (4.9) en résulte.

REMARQUE 1.5. Il n'est pas possible d'espérer l'inégalité de convexité logarithmique du théorème I.1 si $\gamma_{m-1}(u) \neq 0$ comme le montre l'exemple

$$A_0 = A_m = \mathbf{R}, u = t, m = 2, C_0, C_m \text{ convenables.}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.2. Elle se fait en deux points.

1er point. Relèvement.

LEMME I.2. On suppose

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } j \text{ fixé } \in \{0, \dots, m-1\} \\ C_0 \in L^2(0, 1) \\ C_j \in L^2(0, 1) \end{array} \right.$$

et soit a donné dans $A_{j+1/2}$.

Alors il existe un relèvement continu $R_j a$ possédant les propriétés

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_j a \in H_{C_0, C_m}^m, (R_j a)^{(i)} \in L_{C_j}^2(A_j) \\ \gamma_k(R_j a) = a \delta_k^j \text{ (}\delta_k^j \text{ symbole de Kronecker).} \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME I.2⁹⁾.

$$\text{Soit } \varphi \in \mathcal{D}_R \left| \begin{array}{l} \varphi(t) = 1 \text{ sur } (0, \varepsilon), 2\varepsilon < 1 \\ \varphi(t) = 0 \text{ si } t \geq 2\varepsilon. \end{array} \right.$$

On utilise l'isométrie $u \rightarrow \widehat{u}$ de A_m sur \mathcal{H} déjà utilisée dans la démonstration du lemme I.1.

Alors

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow \widehat{a} \text{ et l'on pose} \\ \widehat{u}(t, \lambda) = \widehat{a}(\lambda) \frac{t^j}{j!} \varphi(\lambda \frac{1}{2^m} t). \end{array} \right.$$

On vérifie

$$(4.16) \quad \gamma_k \widehat{u}(\cdot, \lambda) = \widehat{a}(\lambda) \delta_k^j$$

⁹⁾ Voir aussi Baouendi [1].

et par utilisation de la formule de Leibnitz et un changement de variable on obtient:

$$(4.17) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{I} \mathcal{L}_m &= \left[\int_{\lambda \geq \lambda_0} |a(\lambda)| \lambda^2 \lambda^{j + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}} d\nu(\lambda) \right] \int_0^{+\infty} \left[\sum_{r=0}^j \alpha_r C_m(t) t^{j-k} \varphi^{(m-k)}(t) \right]^2 dt \\ \mathfrak{I} \mathcal{L}_0 &= \left[\int_{\lambda \geq \lambda_0} |a(\lambda)| \lambda^2 \lambda^{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{m}} d\nu(\lambda) \right] \int_0^{+\infty} C_0^2(t) t^{2j} \varphi^2(t) dt \end{aligned} \right.$$

et une expression analogue pour $\mathfrak{I} \mathcal{L}_j$.

D'où le lemme I-2 en posant $R_j a = u$.

2ème point.

1) On suppose $C_j \in L^2(0, 1)$ pour tous les j ($0 \leq j \leq m-1$).

Soit $u \in H_{c_0, c_m}^{(m)}$ alors en posant $v = \sum_{j=0}^{m-1} R_j \gamma_j u$

$$u - v \in \mathring{H}_{c_0, c_m}^{(m)} \text{ et } u^{(j)} - v^{(j)} \text{ est dans } L_C^2(A_j)$$

d'après le théorème I.1.

Comme $v^{(j)}$ est dans $L_C^2(A_j)$ il en est de même de $u^{(j)}$. La continuité de l'application $u \rightarrow u^{(j)}$ s'obtient alors par le théorème du Graphe fermé.

2) Supposons 4.1 vérifié avec $j \geq 1$

alors si $u \in H_{c_0, c_m}^{(m)}$, $\gamma_k(u) = 0$ $k=0, 1, \dots, j-1$ d'après la remarque I.4.

Dans ce cas on considère la fonction $v = \sum_{k=j}^{m-1} R_k \gamma_k u$ et on achève comme au 1. D'où le théorème I.2.

REMARQUE I.6. A partir du résultat du théorème I-1 on obtient (X' désignant l'antidual du Hilbert X):

$$(4.18) \left\{ \begin{aligned} u &\rightarrow u^{(j)} \\ &\text{est continue de} \\ H_{\left(\frac{1}{c_m}, A'_m; \frac{1}{c_0}, A'_0\right)}^{(m)} &\rightarrow L_{\frac{1}{c_j}}^2(A'_j) \end{aligned} \right.$$

ce qui donne par conséquent le théorème I.II, sous l'hypothèse

(4.19) Les C_j son continus, positifs, croissants

et permet de retrouver le résultat de Baouendi [1] comme cas particulier.

VÉRIFICATION DE 4.18. On vérifie facilement que l'on a:

$$(4.20) \left\{ \begin{array}{l} [\mathring{H}_{(C_0, A_0; C_m, A_m)}^{(m)}] = H_{\left(\frac{1}{C_m}, A'_m, \frac{1}{C_0}, A'_0\right)}^{-m} = \\ = \{T \in \mathfrak{D}'(A'_0) \mid T = (-1)^m g_m + g_0; g_m \in L^2_{\frac{1}{C_m}}(A'_m); g_0 \in L^2_{\frac{1}{C_0}}(A'_0)\} \end{array} \right.$$

et

$$(4.21) \left\{ \begin{array}{l} \text{Le sous espace des distributions } T \in \mathfrak{D}'(A'_0) \text{ qui s'annulent} \\ \text{sur } \mathring{H}_{C_0, C_m}^{(m)} \text{ est isométrique à l'espace} \\ H_{\left(\frac{1}{C_m}, A'_m, \frac{1}{C_0}, A'_0\right)}^{(m)}. \end{array} \right.$$

Notons j l'application $u \rightarrow u^{(j)}$ continuée $u_{C_0, C_m}^{(m)} \rightarrow L^2_{C_j}(A_j)$ d'après le théorème I.1.

Sa transposée ${}^t j$ est linéaire continue de

$$L^2_{\frac{1}{C_j}}(A'_j) \rightarrow (\mathring{H}_{C_0, C_m}^{(m)})'$$

soit j_1 l'adjointe de ${}^t j$; j_1 est linéaire continue de

$$(\mathring{H}_{C_0, C_m}^{(m)})' \rightarrow L^2_{\frac{1}{C_j}}(A'_j)$$

et par restriction de j_1 au polaire de $\mathring{H}_{C_0, C_m}^{(m)}$, on obtient (4.81) compte tenu de (4.21).

5. Comportement à l'infini.

De manière analogue à ce qui est fait dans le § 2 nous posons pour $u \in H_{C_0, C_m}^{(m)}$

$$(5.1) \left\{ \begin{array}{l} \Phi_j(t) = \alpha_j(t) C_{j+\frac{1}{2}}^2(t) + \beta_j(t) C_{j-\frac{1}{2}}^2(t) \\ \alpha_j(t) = |u^{(j)}(t)|^2_{A_{j+\frac{1}{2}}}; \beta_j(t) = |u^{(j-1)}(t)|^2_{A_{j-\frac{1}{2}}} \end{array} \right. \quad 1 \leq j \leq m-1$$

$$(5.2) \left\{ \begin{array}{l} X_j(t) = C_j^2(t) \operatorname{Re}(\Lambda^{\rho_j + \frac{1}{2}} u^{(j)}(t), \Lambda^{\rho_j - \frac{1}{2}} u^{(j-1)}(t)); \quad \rho_j = \frac{1-j}{2} \\ 1 \leq j \leq m-1. \end{array} \right.$$

Remarquons que

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0 \quad 1 \leq j \leq m-1 \\ 2X_j(t) \leq \Phi_j(t) \quad \forall u \in H_{C_0, C_m}^{(m)} \end{array} \right.$$

Comme nous nous intéressons au comportement à l'∞, quitte à changer d'origine, nous ne restreindrons pas la généralité en supposant C_i continus ($i=0, m$) pour $t \in [0, +\infty[$. Ainsi

$$(5.4) \quad \Phi_j(0) \text{ a désormais un sens.}$$

Nous allons démontrer le

THÉORÈME I.3. *On suppose: 1.8 vérifiée pour $t \in [0, +\infty[$*

$$u \in H_{C_0, C_m}^{(m)}.$$

Alors

$$A) \quad 1) \quad - \int_0^{+\infty} \Phi_j(t) \frac{C_j'(t)}{C_j(t)} dt < +\infty$$

2) Les fonctions, $t \rightarrow \Phi_j(t)$, $t \rightarrow X_j(t)$ sont des mesures bornées sur $[0, +\infty[$

B) Moyennant

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } K = cte > 0 \text{ avec} \\ \frac{C_m(t)}{C_0(t)} \leq K \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right.$$

on a

$$(5.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_j(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} X_j(t) = 0.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.3.

A) 1) on écrit

$$-\int_0^t \Phi_j(\tau) \frac{C_j'(\tau)}{C_j(\tau)} d\tau = \Phi_j(0) - \Phi_j(t) + \int_0^t \Phi_j'(\tau) d\tau - \int_0^t \Phi_j(\tau) \frac{C_j'(\tau)}{C_j(\tau)} d\tau$$

et l'on note (avec des notations et définitions analogues à celles de la démonstration du lemme I.1) que:

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_j'(t) = \Psi_{1j}(t) + \Psi_{2j}(t) \\ \Psi_{2j}(t) dt - \Phi_j(t) \frac{C_j'(t)}{C_j(t)} \leq 0 \\ \int_0^t |\Psi_{1j}(t)| dt \leq 2\mathfrak{Z}_j(t) + \mathfrak{Z}_{j+1}(t) + \mathfrak{Z}_{j-1}(t) < +\infty \end{array} \right.$$

Ainsi

$$(5.8) \quad -\int_0^t \Phi_j(\tau) \frac{C_j'(\tau)}{C_j(\tau)} d\tau \leq \Phi_j(0) + 2\mathfrak{Z}_j + \mathfrak{Z}_{j+1} + \mathfrak{Z}_{j-1} < +\infty \quad \forall t \geq 0$$

d'où le 1.

2) La propriété résulte de

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} i) \int_0^t |dX_j(t)| < +\infty \\ ii) \int_0^t |d\Phi_j(t)| < +\infty. \end{array} \right.$$

VÉRIFICATION DE [(5.9) i]. On a

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^t |dX_j(\tau)| \leq \int_0^t C_j^2(\tau) |d\tilde{X}_j(\tau)| - 2 \int_0^t C_j(\tau) |\tilde{X}_j(\tau)| dC_j(\tau) \\ \text{où } X_j(\tau) = C_j^2(\tau) \tilde{X}_j(\tau) \end{array} \right.$$

on voit alors aisément

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 \int_0^t C_j(\tau) | \tilde{X}_j(\tau) | dC_j(\tau) \leq - \int_0^t \Phi_j(\tau) \frac{dC_j(\tau)}{C_j(\tau)} < + \infty \\ \int_0^t C_j^2(\tau) | d\tilde{X}_j(\tau) | \leq \mathcal{N}_j + \frac{1}{2}(\mathcal{N}_{j-1} + \mathcal{N}_{j+1}) < + \infty \end{array} \right.$$

d'où le i) de (5.9).

VÉRIFICATION DE [(5.9) ii]. On a

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^t | d\Phi_j(\tau) | \leq \int_0^t | \Psi_{1j}(\tau) | d\tau - \int_0^t \Psi_{2j}(\tau) d\tau \\ \text{car } \Psi_{2j}(t) \leq 0. \end{array} \right.$$

Or

$$0 \leq - \int_0^t \Psi_{2j} d\tau = \Phi_j(0) - \Phi_j(t) + \int_0^t \Psi_{1j} d\tau \leq \int_0^t | \Psi_{1j}(\tau) | d\tau + \Phi_j(0)$$

donc

$$(5.13) \quad \int_0^t | d\Phi_j(\tau) | \leq \Phi_j(0) + 2 \int_0^t | \Psi_{1j}(\tau) | d\tau < + \infty$$

d'après 1.

B) De [A - 2] il résulte que $\Phi_j(t)$ et $X_j(t)$ ont une limite pour $t \rightarrow + \infty$. Moyennant l'hypothèse (5.5) on peut dire plus.

En effet, il est facile de vérifier, compte tenu de

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_j \hookrightarrow A_{j+\frac{1}{2}} \\ A_{j-1} \hookrightarrow A_{j-\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

que l'on a

$$(5.15) \quad \int_0^{+\infty} \Phi_j(t) dt < C \cdot [\mathcal{N}_j + \mathcal{N}_{j-1}]$$

et comme $\lim_{t \rightarrow + \infty} \Phi_j(t)$ existe, elle est nulle.

Le comportement de $u \in H_{C_0, C_m}^{(m)}$ et de ses dérivées est précisé dans le

COROLLAIRE DU THÉORÈME I.3. *Sous les hypothèse du théorème I.3:*

1) Pour $t \rightarrow +\infty$

$$|u^{(j)}(t)|_{A_{j+\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{C_{j+\frac{1}{2}}(t)}\right) \quad 0 \leq j \leq m-1$$

2) si en outre (5.5) a lieu pour $t \rightarrow +\infty$:

$$|u^{(j)}(t)|_{A_{j+\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{C_{j+\frac{1}{2}}(t)}\right) \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

6. Un résultat complémentaire.

Nous donnons ici dans un cas simple un théorème de dérivées intermédiaires utile dans le II, qui est une variante et une généralisation de Lions [1].

Soient:

$$(6.1) \quad \begin{cases} V, H \text{ deux espaces de Hilbert complexes} \\ V \hookrightarrow H \text{ (injection continue), } V \text{ dense dans } H \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \begin{cases} V' \text{ l'antidual de } V. \text{ On a} \\ V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'. \end{cases}$$

Dans le § 6, $L^p(X)$ désigne l'espace des classes de fonctions fortement mesurables à valeurs X (Banach) de puissance p sommable pour la mesure de Lebesgue sur la droite, muni de la topologie habituelle.

On pose

$$(6.3) \quad \begin{cases} F = L^2(V') + L^1(H) \\ \text{muni de la norme: } v \rightarrow |v|_F = |v_1|_{L^2(V')} + |v_2|_{L^1(H)} \quad (v = v_1 + v_2) \\ \text{c'est un Banach.} \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}^2 = \{u \mid u \in L^2(V), u'' \in F\} \\ \text{muni de la norme: } u \rightarrow |u|_{\tilde{q}^2} = |u''|_F + |u|_{L^2(V)} \\ \text{c'est un Banach.} \end{array} \right.$$

Le résultat est consigné dans le

THÉORÈME I.4. *L'application $u \rightarrow u'$ est continue de*

$$\tilde{H}^2 \rightarrow L^2(H).$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.4. On considère l'opérateur Λ donné sur $D(\Lambda)$ par

$$(6.5) \quad ((u, v))^{10} = (\Lambda u, v) \quad u \in D(\Lambda).$$

On désigne par

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \text{ l'isométrie de } H \text{ sur } \mathcal{H} = \int^{\otimes} \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda) \\ \nu \text{ mesure } > 0 \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0 \end{array} \right.$$

et par

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{u} \text{ la transformée de Fourier en } t \text{ de } u. \\ \tau \text{ variable duale de } t. \end{array} \right.$$

On pose

$$(6.8) \quad \widehat{w}(\tau, \lambda) = T[\widehat{u}(\tau)](\lambda).$$

Alors:

$$(6.9) \quad u \in L^2(V) \Leftrightarrow \lambda^{1/2} \widehat{w} \in (\mathcal{H})$$

et en écrivant

$$(6.10) \quad \tau^2 \widehat{w} = \widehat{w}_1 + \widehat{w}_2$$

¹⁰⁾ (,) (resp. ((,))) , | | (resp. || ||) désignant le produit scalaire et la norme dans H (resp. dans V).

on a

$$(6.11) \quad u'' \in L^2(V') + L^1(H) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^{-\frac{1}{2}} \widehat{w}_1 \in L^2(\mathcal{H}) \\ \widehat{w}_2 \in L_0^\infty(\mathcal{H})^{11).} \end{cases}$$

En écrivant $\widehat{w}_i(\tau)$ au lieu de $w(\tau, \lambda)$ il vient

$$(6.12) \quad |\tau \widehat{w}(\tau)|_{\lambda^2} = \tau^2 |\widehat{W}(\tau)|_{\lambda} |\widehat{w}(\tau)|_{\lambda} \leq (|\widehat{w}_1(\tau)|_{\lambda} + |\widehat{w}_2(\tau)|_{\lambda}) |\widehat{w}(\tau)|_{\lambda}$$

on en déduit:

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{+\infty} |\tau \widehat{w}(\tau)|_{\lambda^2} d\nu &\leq \left(\int_{\lambda_0}^{+\infty} |\widehat{w}_2(\tau)|_{\lambda^2} \lambda^{-\frac{1}{2}} d\nu \right)^{1/2} \left(\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda |\widehat{w}(\tau)|_{\lambda^2} d\lambda \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{\lambda_0}^{+\infty} |\widehat{w}_2(\tau)|_{\lambda^2} d\nu \right)^{1/2} \left(\int_{\lambda_0}^{+\infty} |\widehat{w}(\tau)|_{\lambda^2} d\nu \right)^{1/2} \end{aligned} \right.$$

ce qui équivaut à

$$(6.14) \quad |\tau \widehat{u}(\tau)|^2 \leq |\widehat{v}_1(\tau)|_{V'} \|\widehat{u}'(\tau)\| + |\widehat{v}_2(\tau)| |\widehat{u}(\tau)|$$

et qui peut s'écrire

$$|\tau \widehat{u}(\tau)|^2 \leq |\widehat{v}_1(\tau)|_{V'} \|\widehat{u}(\tau)\| + \frac{|\widehat{v}_2(\tau)| |\widehat{u}(\tau)|}{1 + |\tau|^2} + \frac{|\tau| |\widehat{v}_2(\tau)|}{1 + |\tau|^2} |\tau| |\widehat{u}(\tau)|.$$

Par Cauchy-Schwarz, nous obtenons:

$$(6.16) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tau \widehat{u}(\tau)|^2 d\tau &\leq \frac{1}{2} (|\widehat{v}_1|_{L^2(V')}^2 + |\widehat{u}|_{L^2(V)}) + \\ &+ \frac{1}{2} |\widehat{v}_2|_{L^\infty(H)} \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{1 + |\tau|^2} + \frac{1}{2} |\widehat{u}|_{L^2(H)}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} |\widehat{v}_2|_{L^\infty(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tau|^2}{1 + |\tau|^2} d\tau + \frac{1}{2} |\tau \widehat{u}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned} \right.$$

¹¹⁾ X étant un Banach $L_0^\infty(X)$ est l'espace des $u \in L_0^\infty(X)$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Ainsi, comme

$$(6.17) \quad |\widehat{u}(\tau)| \leq \|\widehat{u}(\tau)\|$$

il vient

$$(6.18) \quad \frac{1}{2} \int_R |\tau \widehat{u}(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|\widehat{v}_1\|_{L^2(V')}^2 + \pi \|\widehat{v}_2\|_{L^\infty(H)} + \|\widehat{u}\|_{L^2(V)}.$$

En définitive:

$$(6.19) \quad \begin{cases} \|u'\|_{L^2(H)} \leq C[\|v_1\|_{L^2(V')} + \|v_2\|_{L_0^\infty(H)} + \|u\|_{L^2(V)}] \\ (u'' = v_1 + v_2) \quad C = \text{cte} \end{cases}$$

d'où le théorème.

REMARQUE I.7. Notons

$$\widetilde{H}_+^2 = \{u \mid u \in L^2(R^+; V), u'' \in \underbrace{L^2(R^+; V') + L^1(R^+; H)}_{F_+}\}$$

muni de la norme

$$u \rightarrow \|u\|_{\widetilde{H}_+^2} = \|u''\|_{F_+} + \|u\|_{L^2(R^+; V)}.$$

C'est un Banach.

\widetilde{H}^2 étant de type local, toute $u \in \widetilde{H}_+^2$ est restriction à R^+ d'une fonction de \widetilde{H}^2 .

Ainsi le résultat du théorème I.4 vaut pour \widetilde{H}_+^2 .

II. APPLICATION AU COMPORTEMENT À L^∞ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES

1. Notations - problème.

On se donne deux espaces de Hilbert V et H dans la situation du I.§ 6. Soit une famille de formes sesquilinéaires $a(t; u, v)$ définie pour $t \geq 0$, continues sur $V \times V$ et satisfaisant

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Pour tout } (u, v) \in V \times V, t \rightarrow a(t; u, v) \in L_{\text{loc}}^1(R^+; \mathbf{C}) \\ 2) \exists Q(t) > 0 \text{ telle que } \forall \tau \in (0, t) \\ \quad |a(\tau; u, v)| \leq Q(t) \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V \end{array} \right.$$

$A(t)$ étant l'opérateur dans $\mathcal{L}(V, V')$ défini pour chaque t par $a(t; u, v)$, on considère l'équation différentielle opérationnelle au sens des distributions à valeurs dans V' :

$$(1.2) \quad \begin{cases} u^{(m)}(t) + A(t)u(t) = f(t) \text{ p.p.} \\ f \text{ donnée convenable.} \end{cases}$$

Le problème est l'étude du comportement à l' ∞ des solutions de (1.2).

2. Le cas $t \rightarrow \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V, V')}$ non borné pour $t \rightarrow +\infty$.

Supposons que (1.2) admette une solution u vérifiant

$$(1.3) \quad \begin{cases} u \in L_{C_0}^2(V) \\ C_0 \text{ satisfaisant [I (1.8)].} \end{cases}$$

Alors si

$$(1.4) \quad \begin{cases} f \in L_{C_m}^2(V') \\ \left(C_m = \frac{C_0}{Q} \right) C_m \text{ vérifiant (I 1.8)} \end{cases}$$

on a

$$(1.5) \quad A(t)u \in L_{C_m}^2(V')$$

donc

$$(1.6) \quad u \in H_{C_0, C_m}^{(m)}$$

et les § 4.5 du I s'appliquent.

Notons que quitte à remplacer $Q(t)$ par $\sup_{s \in (0, t)} (Q(s), 1)$ il est possible de supposer:

$$(1.7) \quad \begin{cases} t \rightarrow Q(t) \text{ croissante au sens large avec} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = +\infty, \quad Q(t) \geq 1 \quad \forall t \in \mathbf{R}^+. \end{cases}$$

Dans ces conditions, $C_m = \frac{C_1}{Q}$ vérifie (1.8) si c'est le cas pour C_0 .

De plus l'hypothèse (5.5) est satisfaite puisque d'après (1.7) on a

$$(1.8) \quad 0 \leq \frac{C_m}{C_0} \leq 1.$$

Pour fixer les idées, prenons:

$$(1.9) \quad C_0 = 1, \quad m = 2.$$

Alors

THÉORÈME II.1. *Supposons les hypothèses (1.3) à (1.9) vérifiées et $f \in L^2_{C_2}(V')$ ($C_2 = \frac{1}{Q}$).*

Alors pour toute solution de (1.2) avec $m=2$ nous avons

- 1) $u \in H^{(2)}_{1, \frac{1}{\sqrt{Q}}}$ donc $u' \in L^2_{\frac{1}{\sqrt{Q}}}(R^+; H)$
- 2) $|u(t)|_{(V, V')_{1/4}} = O(\sqrt{Q(t)})$; $|u'(t)|_{(V, V')_{3/4}} = O(\sqrt{Q^3(t)})$.

REMARQUE II.1. Pour le cas scalaire $m=2$, c'est-à-dire $V'=V=R$, le résultat est dû à Z. Opial [1].

3. Le cas $t \rightarrow \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V, V')}$ bornée pour $t \rightarrow +\infty$.

Si l'on suppose

$$(3.1) \quad \sup_{t>0} Q(t) < +\infty$$

on obtient

COROLLAIRE DU THÉORÈME II.1 *Les hypothèses étant celles du théorème II.1 avec en outre (3.1), pour toute solution u de 1.2 avec $u \in L^2(V)$, nous avons:*

- 1) $u \in H^2_{1, 1}$ donc $u' \in L^2(H)$
- 2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t)|_{(V, V')_{1/4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} |u'(t)|_{(V, V')_{3/4}} = 0$.

REMARQUE II.2. Le corollaire du théorème II.1 est valable le cadre plus général où

$$(3.2) \quad f \in L^2(V') + L^1(H).$$

Dans ce cas

THÉORÈME II.2. *Les hypothèses étant celles du théorème II-1 avec en outre (3.1), (3.2). Toute solution $u \in L^2(V)$ de l'équation (1.2) vérifie*

- 1) $u \in \tilde{H}_+^2$ donc $u' \in L^2(H)$
- 2) le 2) du corollaire du théorème II.1.

DÉMONSTRATION.

Le 1) résulte du théorème I.4.

Le 2) résulte du

LEMME II.1. *Si $u \in L^2(V)$, $u' \in L^2(H)$*

- i) *u est continue et bornée à valeurs dans $(V, H)_{1/2} = (V, V')_{1/4}$*
- ii) *lorsque $t \rightarrow \infty$, $u(t) \rightarrow 0$ dans $(V, H)_{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ $\forall \varepsilon \geq 0$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME II.1. On considère l'opérateur Λ de la démonstration du théorème I.4.

On note $u \rightarrow \widehat{u}$ l'isométrie de H sur $\int^{\otimes} \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$ d'après l'hypothèse du lemme

$$(3.3) \quad \widehat{u}' + \sqrt{\lambda} \widehat{u} = f \in L^2(\mathcal{H})$$

ainsi

$$(3.4) \quad \widehat{u}(t, \lambda) = \widehat{u}(0, \lambda) e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\sigma)} f(\sigma, \lambda) d\sigma$$

et par Cauchy-Schwarz:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^{1/2} |\widehat{u}(t, \lambda)|^2 \leq \lambda^{1/2} e^{-2\sqrt{\lambda}t} |\widehat{u}(0, \lambda)|^2 + \left(\int_0^t \lambda^{1/2} e^{-2\sqrt{\lambda}(t-\sigma)} d\sigma \right) \times \\ \left(\int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma \right) \end{array} \right.$$

D'après Lions [1], u est p.p. égale à une fonction continue à

valeurs dans $(V, H)_{1/2}$ donc

$$(3.6) \quad \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{1/2} |\widehat{u}(0, \lambda)|_{\lambda^2}^2 d\lambda < +\infty.$$

Comme

$$\int_0^t \lambda^{1/2} e^{-2\sqrt{\lambda}(t-\sigma)} d\sigma \leq 1,$$

il vient

$$(3.7) \quad |u(t)|_{(V, H)_{\frac{1}{2}}} \leq C[|u(\sigma)|_{(V, H)_{\frac{1}{2}}} + \|f\|_{L^2(\mathcal{K})}]$$

d'où le i).

ii) Comme

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (V, H)_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow (V, H)_{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \geq 0 \\ \text{injection continue} \end{array} \right.$$

il suffit de voir le résultat pour $(V, H)_{1/2}$.

Or

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } t \geq t_0 \\ |\lambda^{1/4} \widehat{u}(t, \lambda)|_{\lambda^2} \leq 2e^{-2\sqrt{\lambda_0}(t-t_0)} |\lambda^{1/4} \widehat{u}(t_0, \lambda)|_{\lambda^2} + \frac{1}{2} \int_0^t |\widehat{f}(\sigma, \lambda)|_{\lambda^2} d\sigma \end{array} \right.$$

d'où le résultat en choisissant t_0 assez grand.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTOLA, M.: *Dérivées intermédiaires dans les espaces hilbertiens pondérés*, C.R.A.S. Paris, t. 262, p. 693-695, (1966).
 [2] ARTOLA, M.: *Sur certains espaces de Banach avec poids*, (A paraître).
 [1] BAOUENDI, S. M.: *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Thèse Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), p. 45 e 87.

- [1] LIONS, J. L.: *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. R.P.R. Bucarest 2 (1958), p. 419-432.
- [2] LIONS, J. L.: *Dérivés Intermédiaires est Espaces Intermédiaires*, C.R.A.S. Paris, t. 256, p. 4343-4345 (1965).
- [1] LIONS, J. L. et PEETRE, J.: *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. I.H.E.S. 19, p. 5-68 (1964).
- [1] POULSEN, E. T.: *Boundary values in function spaces*, Math. Scand 10 (1962), p. 45-52.
- [1] OPIAL, Z.: *Nouvelles remarques sur l'équation $u'' + a(x)u = 0$* , Ann. Pol. Math. 7 (1960), p. 293-303.

Manoscritto pervenuto in redazione 27 giugno 1969.