RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SIEGMAR STÖPPLER

k-auflösbare Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 141-175

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__141_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

k-AUFLÖSBARE GRUPPEN

SIEGMAR STÖPPLER *)

Einleitung.

Während in der Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen große Fortschritte erzielt worden sind, sind die Kenntnisse der unendlichen auflösbaren Gruppen, das heißt, der Gruppen mit einer (transfinit) aufsteigenden Reihe von Normalteilern mit abelschen Faktoren, wesentlich geringer. Auflösbare Gruppen, in denen diese Faktoren endlich erzeugt sind, bilden den Gegenstand dieser Arbeit. Ist der Erzeugendenrang der Faktoren insgesamt beschränkt durch eine natürliche Zahl k, bezw. unbeschränkt, aber endlich, so heißt die Gruppe k-auflösbar, k endlich bezw. $k=\aleph_0$.

Ziel dieser Arbeit ist es, charakteristische Eigenschaften dieser Gruppenklasse abzuleiten und Kriterien für die k-Auflösbarkeit, für die k-Auflösbarkeit und Maximalbedingung für Untergruppen oder k-Auflösbarkeit und Minimalbedingung für Untergruppen zu gewinnen.

Da die k-Auflösbarkeit eine Verallgemeinerung der Überauflösbarkeit darstellt, wird es interessant sein, wie weit sich die bekannten Sätze für überauflösbare Guppen aus denen über k-auflösbare Gruppen herauslesen lassen. Um die Analogie möglichst weit zu treiben, werden (nil-k)-k-auflösbare Gruppen definiert, das sind Gruppen G, in denen jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen von $h<k+1$ Elementen erzeugten abelschen Normalteiler $N \neq 1$ besitzt, in dem G eine nilpotente Automorphismengruppe der Klasse $\overline{k}$ induziert. Überauflösbare Gruppen sind also sowohl 1-auflösbare wie (nil-1)-1-auflösbare Gruppen. Verschie-

*) Indirizzo dell'A.: Nordendstraße 61, 6 Frankfurt am Main (Germania).

dene Eigenschaften der (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbaren Gruppen wurden schon diskutiert, siehe etwa R. Baer [8]. Die Ergebnisse werden sich in dieser Arbeit meist als Korollare ergeben und können zur Kontrolle der Schärfe der Sätze über die k-auflösbaren Gruppen dienen. An ihnen ist der große Einfluß der Eigenschaften der in den Normalteilern induzierten Automorphismengruppen abzulesen.

In § 3 werden beide Gruppenklassen in die umfassendere Klasse der θ-$\mathfrak{f}$-radikalen Gruppen eingefügt, das sind Gruppen, in denen jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ einen θ-Normalteiler besitzt, in dem G eine $\mathfrak{f}$-Gruppe von Automorphismen induziert. Dadurch ist man in der Lage, einige allgemeine Lemmata abzuleiten, für die die spezifischen Eigenschaften der k-auflösbaren oder (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbaren Gruppen nicht benötigt werden. Einige Ergebnisse finden sich schon in R. Baer [8], sodaß diese übernommen werden können. Lemma 4 sagt aus, daß die charakteristische Untergruppe $\mathfrak{f}'G$, $\mathfrak{f}'G = \cap X(X \triangle G,\ G/X \in \mathfrak{f})$, in allen diesen Gruppen hyperzentral ist. Für die Beweismethoden ist dies von großer Wichtigkeit, denn θ-$\mathfrak{f}$-radikale Gruppen sind dann Erweiterungen von hyperzentralen Gruppen durch Gruppen, die für gewisse $\mathfrak{f}$ sogar $\mathfrak{f}$-Gruppen sind.

k-auflösbare Gruppen sind der Gegenstand des § 4. Nach Satz 7 hat jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ einer k-auflösbaren Gruppe eine charakteristische abelsche Untergruppe $A \neq 1$. Satz 8 verallgemeinert den Satz, daß maximale Untergruppen überauflösbarer Gruppen Primzahlindex haben, dahin, daß maximale Untergruppen k-auflösbarer Gruppen Primzahlpotenzindex p^a, $a < k+1$, haben.

Satz 9 ergibt für k-auflösbare Gruppen G die Hyperzentralität von $G^{(2k)}$; also sind k-auflösbare Gruppen Erweiterungen von hyperzentralen Gruppen durch auflösbare Gruppen der Stufe höchstens $2k$, wenn k endlich ist. (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare Gruppen sind Erweiterungen von hyperzentralen Gruppen durch nilpotente Gruppen der Klasse $\bar{k}$, wenn $\bar{k}$ endlich ist. Diese Tatsache erweist sich bei einigen Induktionsbeweisen als nützlich.

Unter Zusatzvoraussetzungen erhält man diese Resultate schon, wenn je $2^{2k}+1$ (bzw. $\bar{k}+2$) Elemente eine k-auflösbare (bzw. (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare) Untergruppe erzeugen (Satz 14 und Satz 15).

In § 5 werden lokal k-auflösbare Gruppen betrachtet. Die Äquivalenz der Maximalbedingung für Untergruppen und der endlichen

Erzeugtheit ist in diesem Fall bekannt. Satz 17 gibt an, daß für endliche k beide Bedingungen aus der Maximalbedingung für Normalteiler folgen, während der Satz falsch wird für $k=\aleph_0$. Dann gilt diese Folgerung nur noch, wenn abzählbar viele Elemente eine $\aleph_0$-auflösbare Untergruppe erzeugen. Satz 18 zeigt sogar, daß aus der Maximalbedingung für Normalteiler die endliche Erzeugtheit und die Auflösbarkeit endlicher Stufe folgen, wenn abzählbar viele Elemente eine auflösbare Untergruppe erzeugen. Dieser Satz hat auch von den k-auflösbaren Gruppen unabhängige Bedeutung.

Genügt die Gruppe G der Minimalbedingung für Normalteiler und ist sie lokal k-auflösbar für ein endliches k oder $\aleph_0$-auflösbar, so genügt sie auch der Minimalbedingung für Untergruppen. Satz 20 gibt weiter an, daß beide Minimalbedingungen äquivalent zur Extremalität sind. Černikov nennt eine Gruppe extremal, wenn sie eine endliche Erweiterung einer vollständigen abelschen, der Minimalbedingung für Untergruppen genügenden Gruppe ist.

Das Endglied einer aufsteigenden Reihe von Normalteilern mit k-abelschen Faktoren heißt das Radikal $\mathfrak{y}_k G$. Satz 5 in § 3 gibt die wesentlichen Eigenschaften eines allgemeineren Radikals an. Betrachtet man nun lokal k-auflösbare Gruppen, k endlich, von endlichem abelschen Untergruppenrang (zur Definition siehe § 2), so kann man zeigen, daß $G^{(2k)}$ im Radikal $\mathfrak{y}_k G$ liegt. Unter der gleichen Voraussetzung erhält man aus der lokalen (nil-$\bar{k}$)-k-Auflösbarkeit die (nil-$\bar{k}$)-k-Auflösbarkeit der ganzen Gruppe.

Als Folgerung aus diesen Ergebnissen kann man den Satz 26 betrachten: die Gruppe G ist dann und nur dann noethersch und k-auflösbar (k endlich), wenn sie lokal k-auflösbar ist, und ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugt sind. Satz 26 ist verwandt mit dem bekannten Ergebnis von Mal'cev und dessen Verallgemeinerungen von R. Baer.

Produkte von hyperzentralen Normalteilern mit k-auflösbaren Normalteilern sind wieder k-auflösbar (Lemma 28), während Produkte endlich vieler k_i-auflösbarer Normalteiler im allgemeinen nur wieder $\aleph_0$-auflösbar sind (Satz 29 und Korollar 30).

§ 1. Bezeichnungen und Definitionen.

$a^x = x^{-1}ax$

$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$

$[A, B]$ = Erzeugnis aller $[a, b]$, mit a aus A und b aus B

$G^{(0)} = G$, $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$, $n = 1, 2, \ldots$

${}_0G = G$, ${}_nG = [G, {}_{n-1}G]$, $n = 1, 2, \ldots$

$[x^{(0)}, y] = y$, $[x^{(n)}, y] = [x, [x^{(n-1)}, y]]$, $n = 1, 2, \ldots$

$\mathfrak{n}U$ = Normalisator der Untergruppe U von G in G

$\mathfrak{c}V$ = Zentralisator der Untermenge V von G in G

$\mathfrak{z}G$ = Zentrum von G

$N \subset M$: N ist echt in M enthalten

$N \triangle M$: N ist ein Normalteiler von M

(G) = Ordnung der Gruppe G, falls G endlich ist

$(G : U)$ = Index der Untergruppe U in G

Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn jedes epimorphe Bild H, $H \neq 1$, von G einen abelschen Normalteiler $N \neq 1$ enthält. G hat dann eine aufsteigende Reihe von Normalteilern von G mit abelschen Faktoren; man sagt, G habe eine aufsteigende auflösbare Reihe. Erreicht diese Reihe in endlich vielen Schritten G, so heißt G *auflösbar endlicher Stufe*. Das ist bekanntlich gleichwertig mit der Existenz einer natürlichen Zahl n mit $G^{(n)} = 1$, wobei $G^{(n)}$ die n-te Kommutatorgruppe ist. Die *Stufe der Auflösbarkeit* ist n, falls $G^{(n)} = 1$, aber $G^{(n-1)} \neq 1$ falls $G \neq 1$.

Eine Gruppe G heißt *hyperzentral*, wenn das Zentrum $\mathfrak{z}H$ verschieden von 1 ist für jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G. G hat dann eine aufsteigende Zentralreihe. Endet sie nach endlich vielen Schritten mit G, so heißt G *nilpotent* order auch *nilpotent endlicher Klasse*. G ist *nilpotent der Klasse c*, wenn ${}_cG = 1$ ist. Die charakteristische Untergruppe ${}_nG$ heißt das *n-te Glied der absteigenden Zentrenkette*.

Eine Gruppe G heißt *von endlichem Rang*, wenn eine natürliche Zahl n existiert, derart daß jede endlich erzeugte Untergruppe von G sich schon von höchstens n Elementen erzeugen läßt.

In einer abelschen Gruppe A bildet für jede Primzahl p die Gesamtheit der Elemente, deren Ordnung eine Potenz von p ist, eine charakteristische Untergruppe, die sogenannte *p-Komponente.* Das Produkt aller p-Komponenten ist die Torsionsuntergruppe $\mathfrak{t}A$ von A. Die Faktorgruppe $A/\mathfrak{t}A$ ist dann torsionsfrei und heißt die *0-Komponente* von A.

Eine Gruppe G heißt *von endlichem abelschen Untergruppenrang,* wenn jede abelsche Untergruppe A von G der Bedingung genügt, daß jede Komponente von A endlichen Rang hat. Eine Gruppe G heißt *von endlichem abelschen Rang,* wenn jedes epimorphe Bild von G von endlichem abelschen Untergruppenrang ist.

Eine Gruppe G heißt *lokal* $\mathfrak{e}$, für eine gruppentheoretische Eigenscaft $\mathfrak{e}$, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe von G die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ hat.

§ 2. Spezialisierung der auflösbaren Gruppen.

Definition. Die abelsche Gruppe A heißt *k-abelsch,* wenn sie von $r<k+1$ Elementen erzeugt werden kann. Dabei kann k eine natürliche Zahl oder unendlich sein.

Definition. Eine Menge von Elementen a_j in einer abelschen Gruppe A heißt *unabhängig,* wenn die Gleichung $\Pi a_i^{n_i}=1$ für ein endliches Produkt $\Pi a_i^{n_i}$ mit ganzen Zahlen n_i nur dann bestehen kann, wenn $a_i^{n_i}=1$ für alle i gilt.

Definition. Eine Menge von Elementen a_i aus A heißt eine *Basis* von A, wenn sie unabhängig ist und A erzeugt.

Eine k-abelsche Gruppe A wird nach obiger Definition von einer endlichen Zahl $r<k+1$ von Elementen erzeugt und hat also nach M. Hall [14] (Theorem 3.2.2, Seite 37), eine Basis von höchstens r Elementen. Das heißt aber, daß A eine direktes Produkt von höchstens r zyklischen Gruppen ist.

Enthält A Elemente endlicher Ordnung verschieden von 1, so enthält A mindestens ein Element ungleich 1 von Primzahlordnung p. Die Gesamtheit der Elemente der Ordnung p bildet eine charakteristische, elementar-abelsche Untergruppe B, denn jeder Automorphismus der abelschen Gruppe A bildet p-Elemente auf p-Elemente ab, und B hat die Ordnung p^s, $s \leq r$. Jede Untergruppe C von B hat natürlich eine Ordnung p^t, $t \leq s$, also hat C ebenfalls einen Rang nicht größer als r.

A ist eine freie abelsche Gruppe vom Range r, wenn A keine Elemente endlicher Ordnung enthält, also torsionsfrei ist, denn dann ist A ein direktes Produkt von höchstens r unendlichen zyklischen Gruppen.

Folgerung. *Ist $A \neq 1$ eine k-abelsche Gruppe, so enthält A entweder eine charakteristische, elementar-abelsche Untergruppe $A_p \neq 1$ oder eine charakteristische freie abelsche Untergruppe $A_f \neq 1$ vom Rang $r < k+1$.*

Definition. Die Gruppe G heißt *k-auflösbar*, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen k-abelschen Normalteiler $N \neq 1$ enthält.

Definition. Die Gruppe G heißt *(nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar*, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen k-abelschen Normalteiler $N \neq 1$ besitzt, in dem G eine Automorphismengruppe A induziert, die nilpotent der Klasse $k' < \bar{k}+1$ ist, das heißt, die Bedingung $_{k'}A = 1$ erfüllt.

($\bar{k}$ und k sind natürliche Zahlen oder unendlich).

Diese beiden Gruppenklassen liegen zwischen den auflösbaren und den überauflösbaren Gruppen. Genauer gesagt gilt die folgende Beziehung für festes k und beliebiges $\bar{k}$:

überauflösbar	→	(nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar	→	k-auflösbar	→	auflösbar

Für $k=1$ fallen jedoch 1-auflösbare, (nil-1)-1-auflösbare und überauflösbare Gruppen zusammen, denn es existiert dann in jedem epimorphen Bild $H \neq 1$ von G ein zyklischer Normalteiler $Z \neq 1$, und jede Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe ist abelsch, also nilpotent der Klasse 1.

Aus der Definition der k-Auflösbarkeit und der Tatsache, daß für $h \leq k$ alle h-abelschen Gruppen natürlich k-abelsch sind, ist ersichtlich, daß unter dieser Bedingung h-auflösbare Gruppen ebenfalls k-auflösbar sind. Das gleiche gilt für die (nil-$\bar{k}$)-k-Auflösbarkeit, falls zusätzlich die Beziehung $\bar{h} \leq \bar{k}$ erfüllt ist.

Hat $G \neq 1$ einen k-abelschen Normalteiler $N \neq 1$, so besitzt G entweder einen elementar-abelschen Normalteiler E der Ordnung p^r, $r < k+1$, oder einen freien abelschen Normalteiler F vom Range r, wie sich aus der Folgerung ergibt; denn charakteristische Untergruppen des Normalteilers N sind wieder normal in G. Induziert G in N eine nilpotente Automorphismengruppe der Klasse $k' < \bar{k}+1$, dann auch in E bzw. in F.

Diese beiden Gruppenklassen lassen sich in eine umfassendere Klasse einbetten, aus der man sie durch einfache Spezialisation leicht zurückerhalten kann. Die Einbettung wird nützlich sein, denn sie erlaubt uns, einige Lemmata und Sätze in entsprechend allgemeiner Form zu beweisen.

§ 3. θ-$\mathfrak{f}$-radikale Gruppen.

$\mathfrak{f}$ sei eine gruppentheoretische Eigenschaft, die mindestens der trivialen Gruppe, die nur aus der Einheit besteht, zukommt. Zur Abkürzung wird die folgende Schreibweise benützt: $\mathfrak{f}G = 1$, wenn G eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist, d.h., wenn G die Eigenschaft $\mathfrak{f}$ besitzt.

Die Eigenschaft $\mathfrak{f}$ erfülle die folgende Bedingung:

F 1: Untergruppen und epimorphe Bilder von $\mathfrak{f}$-Gruppen sind $\mathfrak{f}$-Gruppen, d.h. aus $\mathfrak{f}G = 1$ folgt $\mathfrak{f}U = 1$ und $\mathfrak{f}(G^*) = 1$ für Untergruppen U und Homomorphismen * von G.

Die gruppentheoretische Funktion $\mathfrak{f}'$ werde durch die folgende Vorschrift definiert:

$$\mathfrak{f}'G = \bigcap_{N \triangle G,\ \mathfrak{f}(G/N)=1} N$$

Als Folgerung ergibt sich sofort:

F 2: $\mathfrak{f}'G$ ist eine eindeutig bestimmte charakteristische Untergruppe von G.

θ sei ebenfalls eine gruppentheoretische Eigenschaft und es gelte:

E: Untergruppen und epimorphe Bilder von θ-Gruppen sind θ-Gruppen.

Als Verknüpfung der Eigenschaften θ und $\mathfrak{f}$ kann man jetzt eine Normalteiler-Eigenschaft $\theta_{\mathfrak{f}}$ definieren:

Definition. Der Normalteiler N von G ist ein $\theta_{\mathfrak{k}}$-*Normalteiler* von G, wenn er eine θ-Gruppe ist und G in ihm eine $\mathfrak{k}$-Gruppe von Automorphismen induziert.

Die Eigenschaft $\theta_{\mathfrak{k}}$ erfüllt nun die folgenden Aussagen, auf denen die Beweise der anschließenden Lemmata und Sätze im wesentlichen beruhen:

Lemma 1. i) *Normalteiler der Untergruppe U von G, die in $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteilern von G liegen, sind $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler von U.*

ii) *Die Faktorgruppe N/M eines $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteilers N von G nach einem Normalteiler M von G, $M \subseteq N$, ist ein $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler von G/M.*

iii) *In der Isomorphiegleichung $AB/A \simeq B/(A \cap B)$, wobei A und B Normalteiler von G sind, bleibt die Eigenschaft $\theta_{\mathfrak{k}}$ erhalten.*

Die einfachen Beweise sind hier entbehrlich, da das Lemma nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt ist.

Nach diesen Vorbemerkungen ist es möglich, folgende Klasse von Gruppen zu definieren:

Definition. G sei eine Gruppe, $\mathfrak{k}$ und θ seien Eigenschaften, die sich auf Untergruppen und epimorphe Bilder vererben ($F1$ bzw. E). G heißt θ-$\mathfrak{k}$-*radikal*, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler $N \neq 1$ besitzt.

Eine ganz ähnlich definierte Eigenschaft wurde schon von R. Baer [8] (§ 3, Seite 17) diskutiert. Die dort abgeleiteten allgemeinen Eigenschaften, die sich aus den Aussagen des Lemma 1 herleiten lassen, sind übertragbar:

Lemma 2. *Untergruppen und epimorphe Bilder θ-$\mathfrak{k}$-radikaler Gruppen sind θ-$\mathfrak{k}$-radikal.*

Zum Beweis siehe R. Baer [6] (Satz 4.4, Seite 358).

Lemma 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent, wobei θ und $\mathfrak{k}$ gruppentheoretische Eigenschaften sind, die den Bedingungen $F1$ bzw. E genügen*:

a) *Für jede charakteristische Untergruppe N von G mit $G/N \neq 1$ enthält G/N einen $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler $A/N \neq 1$.*

b) *G ist θ-$\mathfrak{k}$-radikal.*

c) *Sind S und R Normalteiler von G mit $R/S \neq 1$, so gibt es einen Normalteiler A von G mit $S \subset A \subseteq R$, und A/S ist ein $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteiler von G/S.*

Beweis. Nach Definition der Eigenschaft « θ-$\mathfrak{f}$-radikal » ist es klar, daß aus b) die Eigenschaft a) und aus c) die Eigenschaft b) folgt. Ein Lemma von R. Baer [8] (Lemma 3.2, Seite 17), angewendet auf $G_1 = G/S$, ergibt die Folgerung c) aus b). Es bleibt zu zeigen, daß a) auch b) nach sich zieht:

Sei G eine Gruppe, die der Bedingung a) genügt und M ein echter Normalteiler von G. Mit H sei das Produkt aller charakteristischen Untergruppen von G, die in M liegen, bezeichnet, und mit K das Produkt aller Normalteiler T, für die $H \subseteq T$ und T/H ein $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteiler von G/H ist. H ist nach Konstruktion in M enthalten, M ist echt in G enthalten, also ist $G/H \neq 1$. Da H eine charakteristische Untergruppe von G ist, wird die Voraussetzung von a) erfüllt, und es existiert mindestens ein Normalteiler T von G mit nicht-trivialer $\theta_{\mathfrak{f}}$-Faktorgruppe T/H, sodaß also H echt in K enthalten ist: $K/H \neq 1$.

K ist eine charakteristische Untergruppe von G, aber K ist größer als die größte charakteristische Untergruppe H von G, die in M liegt, also liegt K nicht in M. Aus der Konstruktion von K ergibt sich die Existenz eines $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteilers $A/H \neq 1$ von G/H, wobei A aber nicht in M liegt. MA ist normal in G, und M ist echt in MA enthalten.

Weiter ist $MA/M \simeq A/(M \cap A) \simeq (A/H)/((M \cap A/H)$, und folglich ist MA/M nach Lemma 1, ii), ein nicht-trivialer $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteiler von G/M, Damit ist das Lemma bewiesen.

Es ist jetzt möglich, ein Lemma zu beweisen, das einen Zusammenhang zwischen den Eigenschaften θ-$\mathfrak{f}$-radikal und hyperzentral herstellt und für die Untersuchung der k-auflösbaren Gruppen von großer Bedeutung ist. Dieses Resultat findet sich schon in einer Arbeit von R. Baer [7] (Lemma 2.5, Seite 193), ein kurzer Beweis sei jedoch hier angegeben.

Lemma 4. *Ist G eine θ-$\mathfrak{f}$-radikale Gruppe, so ist die charakteristische Untergruppe $\mathfrak{f}'G$ hyperzentral.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt von der Annahme ausgehend, $\mathfrak{f}'G$ sei nicht hyperzentral.

Nach der Definition und der Eigenschaft des Hyperzentrums, R. Baer [1] (Seite 176-177), ist das Hyperzentrum H der Gruppe $\mathfrak{f}'G$ also echt in $\mathfrak{f}'G$ enthalten, $\mathfrak{f}'G/H \neq 1$, und für das Zentrum dieser Faktorgruppe gilt $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}'G/H)=1$. H ist als charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{f}'G$ wiederum charakteristisch in G, also auch ein Normalteiler von G. Für die Normalteiler $\mathfrak{f}'G$ und H von G mit $\mathfrak{f}'G \supset H$ ergibt sich nach Lemma 3, Bedingung c), die Existenz eines Normalteilers N von G mit $\mathfrak{f}'G \supseteq N \supset H$, wobei N/H eine θ-Gruppe ist, in der G eine Automorphismengruppe A mit $\mathfrak{f}A=1$ induziert.

Mit C/H sei der Zentralisator von N/H in G/H bezeichnet. Mit N ist auch C normal in G und $G/C \simeq (G/H)/(C/H)$ ist im wesentlichen die von G in N/H induzierte Automorphismengruppe. N/H ist aber ein $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteiler von G/H, also ist $\mathfrak{f}(G/C)=1$. Folglich liegt $\mathfrak{f}'G$ in dem Normalteiler C : $\mathfrak{f}'G \subseteq C$. Für die Faktorgruppen nach dem Hyperzentrum H von $\mathfrak{f}'G$ heißt das, daß $\mathfrak{f}'G/H$ in C/H liegt, daß der Normalteiler N/H also von $\mathfrak{f}'G/H$ zentralisiert wird. N/H war verschieden von 1, woraus zu ersehen ist, daß $\mathfrak{f}'G/H$ ein nicht-triviales Zentrum besitzt. Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt; also ist $\mathfrak{f}'G$ hyperzentral.

Das θ-$\mathfrak{f}$-Radikal. Eine dem Hyperzentrum einer Gruppe analoge Bildung kann man für die Eigenschaft θ-$\mathfrak{f}$-radikal durchführen:

Definition. Der Normalteiler L von G ist ein θ-$\mathfrak{f}$-*radikal eingebetteter Normalteiler* von G, wenn gilt:

(′) jeder Faktor L/N, wobei $N \subset L$ ein Normalteiler von G ist, enthält einen $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteiler $K/N \neq 1$ von G/N.

Satz 5. *Für die Untergruppe $\mathfrak{y}G$ der Gruppe G sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

i) *$\mathfrak{y}G$ ist das Erzeugnis aller θ-$\mathfrak{f}$-radikal eingebetteten Normalteiler von G,*

ii) *$\mathfrak{y}G$ ist der maximale Normalteiler M von G, für den die Bedingung (′) gilt,*

iii) *$\mathfrak{y}G$ ist der Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit der Eigenschaft*

(″) *G/X enthält keinen $\theta_{\mathfrak{f}}$-Normalteiler $N/X \neq 1$ von G.*

Beweis. Aus i) folgt ii):

Sei $\mathfrak{y}G$ das Produkt aller θ-$\mathfrak{k}$-radikal eingebetteten Normalteiler A_j von G, N ein Normalteiler von G und echt in $\mathfrak{y}G=\Pi A_j$ enthalten. Es existiert dann ein i mit der Eigenschaft $N\cap A_i\subset A_i$. $A_i/(A_i\cap N)$ enthält dann wegen der Bedingung (′) für A_i einen $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler $K/(A_i\cap N)\neq 1$ Es ist

$$K/(A_i\cap N)=(K\cap A_i)/(K\cap A_i\cap N)\simeq(K\cap A_i)N/N=KN/N.$$

$KN/N\neq 1$ ist danach ein $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler von G/N, ist in $A_iN/N\subseteq \subseteq \mathfrak{y}G/N$ enthalten, und $\mathfrak{y}G$ erfüllt somit Bedingung (′). Als Produkt aller θ-$\mathfrak{k}$-radikal eingebetteten Normalteiler von G ist $\mathfrak{y}G$ also der einzige maximale θ-$\mathfrak{k}$-radikal eingebettete Normalteiler.

Aus ii) folgt iii):

Sei $\mathfrak{y}G$ der einzige maximale θ-$\mathfrak{k}$-radikal eingebettete Normalteiler von G. Alle Normalteiler X von G, die die Eigenschaft (″) haben, enthalten $\mathfrak{y}G$; denn sonst ist $X\cap\mathfrak{y}G$ echt in $\mathfrak{y}G$ enthalten, und $\mathfrak{y}G/(X\cap\mathfrak{y}G)$ besitzt einen $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler $K/(X\cap\mathfrak{y}G)\simeq KX/X$, also einen nicht-trivialen $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler von G/X.

$X=\mathfrak{y}G$ hat die Eigenschaft (″), denn andernfalls existierte ein $\theta_{\mathfrak{k}}$-Normalteiler $K/\mathfrak{y}G\neq 1$ von $G/\mathfrak{y}G$, und K hätte die Eigenschaft (′), das heißt, $\mathfrak{y}G$ wäre nicht maximal.

Die Folgerung von i) aus iii) ist nach obigem trivial.

Definition. Genügt die Untergruppe $\mathfrak{y}G$ von G den gleichwertigen Bedingungen i)-iii) des Satzes 5, so heißt $\mathfrak{y}G$ das θ-$\mathfrak{k}$-*Radikal* von G. $\mathfrak{y}$ heißt die *Radikalfunktion* zur Eigenschaft θ-$\mathfrak{k}$-radikal.

Es läßt sich nun folgendes feststellen:

R 1: *Das* θ-$\mathfrak{k}$-*Radikal* $\mathfrak{y}G$ *ist eine charakteristische Untergruppe von* G.

Beweis: Ein Automorphismus von G bewirkt eine Permutation der Normalteiler X mit der Eigenschaft (″), also ist ihr Durchschnitt charakteristisch in G.

R 2: *Das* θ-$\mathfrak{k}$-*Radikal* $\mathfrak{y}G$ *ist der kleinste Normalteiler* X *von* G *mit der Eigenschaft* (″) *und* $\mathfrak{y}(G/\mathfrak{y}G)=1$.

R 3: *Das* θ-$\mathfrak{k}$-*Radikal* $\mathfrak{y}G$ *ist das Endglied einer* (*transfinit*) *aufsteigenden Reihe von* $\theta_{\mathfrak{k}}$-*Normalteilern von* G.

θ-$\mathfrak{f}$-radikale Gruppen haben nach Lemma 4 die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die charakteristische Untergruppe $\mathfrak{f}'G$ hyperzentral ist.

Sei jetzt $\mathfrak{f}$ eine Eigenschaft, die über die Bedingung $F1$ hinaus das folgende Postulat FG erfüllt:

FG: Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe E von $\mathfrak{f}'G$ existiert eine endlich erzeugte Untergruppe D von G mit $E \subseteq \mathfrak{f}'D$.

SATZ 6. *Ist G eine lokal θ-$\mathfrak{f}$-radikale Gruppe von endlichem abelschen Untergruppenrang, und genügt $\mathfrak{f}$ der Bedingung FG, dann ist $\mathfrak{f}'G$ hyperzentral und von endlichem abelschen Rang.*

BEWEIS. Nach Bedingung FG folgt aus der lokalen θ-$\mathfrak{f}$-Radikalität von G die lokale Hyperzentralität von $\mathfrak{f}'G$. Anwendung eines Satzes von R. Baer [9] (B Theorem, Seite 98) zeigt die Hyperzentralität von $\mathfrak{f}'G$, und Lemma B in der gleichen Arbeit ergibt, daß $\mathfrak{f}'G$ von endlichem abelschem Rang ist.

§ 4. k-auflösbare Gruppen.

Für k-auflösbare und (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare Gruppen ist es nun möglich, Eigenschaften θ und $\mathfrak{f}$ anzugeben, für die sie genau die θ-$\mathfrak{f}$-radikalen Gruppen darstellen.

Setzt man für θ die Eigenschaft « k-abelsch » ein, so ist Bedingung E erfüllt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{f}_t$ die triviale Eigenschaft, Gruppe zu sein, also $\mathfrak{f}_t G=1$ für alle Gruppen, so ist das Postulat $F1$ ebenfalls erfüllt. Für diese Wahl von θ und $\mathfrak{f}$ sind k-auflösbare Gruppen genau die θ-$\mathfrak{f}_t$-radikalen. Daß $\mathfrak{f}_t=1$ nicht die einzige Möglichkeit ist, wird später von Bedeutung sein.

Sei θ wieder die Eigenschaft « k-abelsch »; aber für $\mathfrak{f}$ nehme man die Eigenschaft $\mathfrak{f}_{\bar{k}}=$« nilpotent der Klasse k', $k'<\bar{k}+1$ ». Sie genügt dem Postulat $F1$, und es gilt:

für endliche $\bar{k}$: $\mathfrak{f}_{\bar{k}}G=1$ genau dann, wenn ${}_{\bar{k}}G=1$,

und für $\bar{k}=\aleph_0$: $\mathfrak{f}_{\bar{k}}G=1$ genau dann, wenn ${}_{k'}G=1$ für eine passende natürliche Zahl k'.

Für diese Wahl ergeben sich also gerade die (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbaren Gruppen für entsprechende k und $\bar{k}$.

Die Funktion $\mathfrak{f}_{\bar{k}}'$ hat als Bild das $\bar{k}$-te Glied der absteigenden Zentrenkette, wenn $\bar{k}$ endlich ist:

$$\mathfrak{f}_{\bar{k}}'G = {}_{\bar{k}}G, \quad \text{und} \quad \mathfrak{f}_{\bar{k}}'G = \bigcap {}_nG(n \in \boldsymbol{N}) \quad \text{sonst.}$$

Die Lemmata aus § 3 sind jetzt auf die k-auflösbaren und (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbaren Gruppen voll anwendbar, insbesondere sind beide Eigenschaften untergruppen- und epimorphismenvererblich.

Satz 7. *Ist G k-auflösbar (k natürlich oder unendlich), so besitzt jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G eine charakteristische abelsche Untergruppe $Q \neq 1$.*

Beweis. Ist H ein epimorphes Bild der Gruppe G und verschieden von 1, so folgt aus der Voraussetzung der k-Auflösbarkeit die Existenz eines von r, $r < k+1$, Elementen erzeugbaren abelschen Normalteilers $N \neq 1$.

Sei $\mathfrak{C}N$ der Zentralisator von N in H. Dann ist $H/\mathfrak{C}N$ im wesentlichen eine k-auflösbare Automorphismengruppe der endlich erzeugten abelschen Gruppe N und als solche nach R. Baer [3] (Satz 2, Seite 171) noethersch und somit auflösbar endlicher Stufe.

Ist $\mathfrak{C}N = H$, so ist das Zentrum $\mathfrak{Z}H \neq 1$ eine charakteristische abelsche nicht-triviale Untergruppe von H.

Sei $\mathfrak{C}N$ echt in H enthalten. Es existiert dann eine natürliche Zahl s mit $(H/\mathfrak{C}N)^{(s)} = 1$ für die s-te Kommutatoruntergruppe von $H/\mathfrak{C}N$, aber $(H/\mathfrak{C}N)^{(s-1)} \neq 1$. Folglich ist $H^{(s)}\mathfrak{C}N = \mathfrak{C}N$, bzw. $H^{(s)} \subseteq \mathfrak{C}N$.

Ist $H^{(s)} = 1$, so ist $H^{(s-1)}$ eine charakteristische abelsche Untergruppe von H und verschieden von 1.

Im anderen Fall ist $H^{(s)} \neq 1$. Sei $\mathrm{A}(H)$ die volle Automorphismengruppe von H und P der charakteristische Abschluß von N in H: $P = \prod_{a \in \mathrm{A}(H)} N^a$. Da $H^{(s)}$ charakteristisch in H ist, zentralisiert $H^{(s)}$ mit N auch jedes N^a, also auch P. Ist $H^{(s)} \cap P \neq 1$, so ist das Zentrum $\mathfrak{Z}H^{(s)}$ eine abelsche charakteristische Untergruppe von H und verschieden von 1. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, in dem $H^{(s)} \cap P = 1$ ist. Es existiert dann aber eine minimale natürliche Zahl $h \leq s$ mit $Q = H^{(s-h)} \cap P \neq 1$, jedoch $H^{(s-h+1)} \cap P = 1$.

Q ist als Durchschnitt zweier charakteristischer Untergruppen von

H wieder eine charakteristische Untergruppe von H. Es ist weiter:

$$Q \cap H^{(s-h+1)} \subseteq P \cap H^{(s-h+1)} = 1,$$

folglich

$$Q \simeq Q/(Q \cap H^{(s-h+1)}) \simeq QH^{(s-h+1)}/H^{(s-h+1)} \subseteq H^{(s-h)}/H^{(s-h+1)},$$

also ist Q abelsch.

Somit ist in allen Fällen eine charakteristische abelsche Untergruppe verschieden von 1 in H gefunden.

Für den Spezialfall $k=1$ steht dieses Ergebnis in der Arbeit von R. Baer [2] (Lemma 3, Seite 18).

SATZ 8. *Jede maximale Untergruppe U der k-auflösbaren Gruppe G hat Primzahlpotenzindex $(G:U)=p^a$ mit $a<k+1$.*

BEWEIS. Sei G k-auflösbar und U eine maximale Untergruppe von G. Dann existiert nach dem Maximumprinzip ein maximaler Normalteiler M von G, der in U enthalten ist. Sei $V=U/M$. Aus der Voraussetzung folgt, daß $H=G/M$ einen k-abelschen Normalteiler $L=K/M \neq 1$ enthält, den man o.B.d.A. als elementarabelsch der Ordnung p^z, $z<k+1$, oder als frei abelsch vom Rang z annehmen kann.

Da M ein maximaler Normalteiler von G in U ist und U maximal in G, so ergibt sich $G=KU$, da K nicht in U liegen kann; und folglich ist auch $H=LV$.

Angenommen L sei frei abelsch. $V \cap L$ ist normal in V und liegt im Zentrum von L, da ja L sogar abelsch ist.

Also ist $V \cap L$ ein Normalteiler von $LV=H$. V enthält aber wegen der Maximalität von M als echte Normalteiler von H nur den trivialen Normalteiler 1, also gilt $L \cap V=1$.

Für die Primzahl $p>1$ ist $1 \neq L^p \subset L$, da L frei abelsch ist. L^p ist als charakteristische Untergruppe des Normalteilers L auch ein Normalteiler von H. Da er verschieden von 1 ist, liegt er nicht in V und es ist $H=L^pV$. Nach dem Dedekindschen Satz für modulare Verbände ergibt sich die Ungleichung:

$$L^p \subset L = L \cap L^pV = L^pL \cap L^pV = L^p(L \cap V) = L^p.$$

Aus diesem Widerspruch folgt, daß L in jedem Fall elementarabelsch ist.

Der Index von U in G ist gleich dem Index von V in H, und für diesen gilt: $(H : V)/(L) = p^z$, $z < k+1$.

Das ist die Behauptung des Satzes.

Für endliche auflösbare Gruppen ist dieser Satz wohlbekannt, vgl. etwa B. Huppert [17] oder N. Itô [19].

Für endliche Gruppen und $k=1$ gilt darüber hinaus die Umkehrung des Satzes, nämlich:

Genau dann ist G überauflösbar, wenn alle maximalen Untergruppen Primzahlindex haben. (B. Huppert [17] (Satz 9, Seite 416)).

Ein Satz, der dieses Ergebnis umfaßt, wurde von R. Baer gefunden:

Die Gruppe G ist dann und nur dann noethersch und überauflösbar, wenn sie endlich erzeugbar ist, ihre maximalen Untergruppen Primzahlindex haben, und wenn jede unendliche Faktorgruppe einen in ihr fast voll reduziblen, endlich erzeugbaren Normalteiler besitzt.

(Hauptresultat von R. Baer [5]).

B. Huppert [17] (Satz 21, Seite 428) hat für beliebiges k, G aber endlich, unter weiteren Zusatzvoraussetzungen ebenfalls eine Umkehrung bewiesen:

Sei G eine endliche auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. Sind die U_i die maximalen Untergruppen von G, so sei $(G : U_i) = p_i^{a_i}$, $a_i \leq k$. Dann ist G k-auflösbar (G vom Hauptrang höchstens k).

Eine offene, jedoch wichtige Frage ist es, ob man aus $(G : U) = p^a$, $a \leq k$, für alle maximalen Untergruppen U von G, im allgemeinen Fall wenigstens die Existenz einer Funktion $h(k)$ finden kann mit der Eigenschaft, daß G $h(k)$-auflösbar ist.

Satz 9. *Ist G eine k-auflösbare Gruppe, so ist die Kommutatorgruppe $G^{(2k)}$ hyperzentral.*

Beweis. Ersetzt man die Eigenschaft θ durch θ_m = « elementarabelsch der Ordnung p^h, $h < k+1$, für eine Primzahl p, oder frei abelsch vom Rang h, $h < k+1$ », so sind die daran geknüpften Bedingungen E erfüllt. Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild der k-auflösbaren Gruppe

G, so besitzt H nach den Bemerkungen in § 2 einen θ_m-Normalteiler $N \neq 1$ von H.

H induziert in N eine Automorphismengruppe, die der Faktorgruppe H/C isomorph ist, wenn mit C der Zentralisator von N in H bezeichnet wird. H/C ist also im wesentlichen eine auflösbare Untergruppe der linearen unimodularen Gruppe $GL(h, p)$ des Grades h mit Elementen aus dem Galoisfeld $GF(p)$, falls N elementar-abelsch der Ordnung p^h ist, oder eine auflösbare Untergruppe der linearen unimodularen Gruppe $GL(h, \mathbf{Z})$ (Determinate $+1$ oder -1) des Grades h und mit Elementen aus dem Ring der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$, falls N frei abelsch des Ranges h ist. Als auflösbare Automorphismengruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ist H/C nach R. Baer [3] (Satz 2, Seite 17) noethersch und somit auflösbar endlicher Stufe. Anwendung eines Satzes von B. Huppert [18] (Satz, 9 Seite 494), zeigt, daß $(H/C)^{(2h)} = 1$ für die $2h$-te Kommutatorgruppe von H/C gilt.

Setzt man nun für $\mathfrak{f}$ die Eigenschaft $\mathfrak{f}_k =$ « auflösbar der Stufe höchstens $2k$ », wenn k endlich ist, und « auflösbar endlicher Stufe », wenn k unendlich ist, so sind die k-auflösbaren Gruppen genau θ_m-$\mathfrak{f}_k$-radikal.

Die abgeleitete Funktion $\mathfrak{f}_k'$ bildet G auf die $2k$-te Kommutatorgruppe ab, wenn man $G^{(2k)}$ für unendliche k entsprechend definiert:

$$\mathfrak{f}_k' G = G^{(2k)}, \text{ wenn } k \text{ endlich,}$$

$$\mathfrak{f}_k' G = G^{(2k)} = G^{(\infty)} = \bigcap_{n \in N} G^{(n)}, \text{ wenn } k \text{ unendlich.}$$

Lemma 4 ergibt danach genau die Behauptung des Satzes.

Für endliche auflösbare Gruppen steht dieser Satz in der Arbeit von B. Huppert [18] (Satz 21, Seite 517).

Satz 10. *Ist G eine $(nil\text{-}\bar{k})$-k-auflösbare Gruppe, so ist das $\bar{k}$-te Glied der absteigenden Zentrenkette $_{\bar{k}}G$ hyperzentral.*

Dieser Satz ist schon in einer Arbeit von R. Baer [8] (Lemma 5.4, Seite 29) enthalten. Hier hat er sich wieder als Spezialisation von Lemma 4 ergeben.

Überauflösbare Gruppen sind (nil-1)-1-auflösbare Gruppen, siehe § 2. Also hat man dann den Spezialfall:

Ist G überauflösbar, so ist $G' = {}_1G$ hyperzentral. Dies ist ein Satz von R. Baer [2] (Proposition 2, Seite 21). Für endliche überauflösbare Gruppen hat schon E. Wendt [23] (Satz, Seite 480) dieses Resultat im Jahre 1902 bewiesen. O. Ore [22] gab 1938 einen einfacheren Beweis als E. Wendt an, und G. Zappa [24] dehnte 1941 diesen Satz aus, und zwar bewies er die Nilpotenz von G' für überauflösbare Gruppen G mit der Maximalbedingung für Untergruppen.

BEMERKUNG. In Satz 8 kann man nur unter zusätzlichen Voraussetzungen beweisen, daß für k-auflösbare Gruppen schon $G^{(k)}$ hyperzentral ist siehr B. Huppert [18]).

Die Kommutatorgruppe $G^{(2k)}$ ist schon hyperzentral, wenn eine beschränkte Anzahl von Elementen der Gruppe G eine k-auflösbare Untergruppe erzeugen und G gewissen anderen Zusatzbedingungen genügt. Um den Beweis durchzuführen, werden die folgenden Hilfssätze benötigt.

HILFSSATZ 11. *Wird die k-auflösbare Gruppe G von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt und ist G unendlich, so ist G keine Torsionsgruppe.*

BEWEIS. Da die unendliche k-auflösbare Gruppe G endlich erzeugt ist, gibt es einen Normalteiler M von G mit folgenden Eigenschaften: G/M ist unendlich und G/N ist endlich für jeden Normalteiler N von G, der M echt enthält, siehe etwa R. Baer [1] (Lemma 1, Seite 166).

G/M enthält dann einen nicht-trivialen k-abelschen Normalteiler K/M. M ist echt in K enthalten, und folglich ist die endlich erzeugte abelsche Gruppe K/M unendlich und somit keine Torsionsgruppe. Also enthält G ein Element unendlicher Ordnung.

DEFINITION. Nach der folgenden Rekursivregel erklärt man Kommutatoren: C_0 sei die Menge der Elemente aus G, C_n sei die Menge der Kommutatoren der Form $[c_1, c_2]$ mit c_1 und c_2 aus C_{n-1}. Ein Element aus C_n heißt ein *n-ter Kommutator* von G.

Wie aus der Definition sofort zu ersehen ist, wird ein n-ter Kommutator von G aus höchstens 2^n Elementen aus G gebildet.

Der Vollständigkeit wegen beweisen wir den bekannten Hilfssatz:

HILFSSATZ 12. *In einer Gruppe G bilden die n-ten Kommutatoren von G ein Erzeugendensystem von $G^{(n)}$.*

BEWEIS. Der Beweis wird mit der vollständingen Induktion erbracht:

Für $n=1$: G' hat als Erzeugendensystem die aus je 2 Elementen aus G gebildeten Kommutatoren; das ist eine bekannte Tatsache.

Für $n-1$: Induktionsannahme: $G^{(n-1)}$ hat als Erzeugendensystem die aus je 2^{n-1} Elementen aus G gebildeten $(n-1)$-ten Kommutatoren.

Für n: Erzeugende Elemente von $G^{(n)}$ sind die einfachen Kommutatoren $[u, v]$ mit u und v aus $G^{(n-1)}$. u und v sind dann Produkte von Erzeugendenelementen x_i, y_j, für die die Induktionsannahme zutrifft, die also $(n-1)$-te Kommutatoren sind: $u=x_1 \dots x_r$, $v=y_1 \dots y_s$, x_i und y_i nicht notwendig voneinander verschieden.

Behauptung: Der Kommutator $[u, v]$ von Produkten von $(n-1)$-ten Kommutatoren ist gleich einem Produkt von n-ten Kommutatoren.

Ist $[x, y]=x^{-1}y^{-1}xy$ und $b^a=a^{-1}ba$, so gelten die Identitäten:

$$[xy, z]=[x, z]^y[y, z]$$

und

$$[x, yz]=[x, z][x, y]^z,$$

wie aus der Ausrechnung sofort folgt.

Ein Kommutator $[x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_s]$ läßt sich demnach folgendermaßen abbauen:

$$\begin{aligned}[u, v]&=[x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_s]\\ &=[x_1, y_1 \dots y_s]^{x_2 \cdots x_r}[x_2, y_1 \dots y_s]^{x_3 \cdots x_r} \dots\\ &\qquad \dots [x_{r-1}, y_1 \dots y_s]^{x_r}[x_r, y_1 \dots y_s].\end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung $z_{i+1}=x_{i+1} \dots x_r$ zerlegen sich die Faktoren $[x_i, y_1 \dots y_s]^{x_{i+1} \cdots x_r}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}[x_i, y_1 \dots y_s]^{z_{i+1}}&=[x_i, y_s]^{z_{i+1}}([x_i, y_{s-1}]^{y_s})^{z_{i+1}} \dots\\ &\qquad \dots ([x_i, y_1]^{y_2 \cdots y_s})^{z_{i+1}}.\end{aligned}$$

Die $[x_i, y_j]$ sind also Kommutatoren mit x_i, y_j aus $G^{(n-1)}$, für die

die Annahme zutrifft, die also $(n-1)$-te Kommutatoren sind, aus je $2^{(n-1)}$ Elementen gebildet.

Konjugierte dieser $[x_i, y_j]$ sind von der gleichen Form, da diese Form sogar charakteristisch invariant ist.

Der Kommutator $[u, v]$ hat sich als ein Produkt von n-ten Kommutatoren herausgestellt, und somit ist die Behauptung bewiesen.

FOLGERUNG 13. *Erzeugen je 2^n Elemente der beliebigen Gruppe G eine Untergruppe U mit $U^{(n)}=1$, so gilt $G^{(n)}=1$.*

SATZ 14. *Ist G eine Gruppe, k eine natürliche Zahl, erzeugen je $2^{2k}+1$ Elemente aus G eine k-auflösbare Untergruppe, und genügt G einer der folgenden Bedingungen:*

A) Jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von $G^{(2k)}$ hat einen noetherschen Normalteiler $N \neq 1$,

B) $G^{(2k)}$ genügt der Minimalbedingung für Untergruppen,

so ist $G^{(2k)}$ hyperzentral.

BEWEIS. Sei $\mathfrak{f}$ die Eigenschaft « $F^{(2k)}=1$ » für eine Gruppe F. Nach Folgerung 13 ist $\mathfrak{f}$ durch Relationen in 2^{2k} Variablen definierbar. Satz 9 sagt aus, daß k-auflösbare Gruppen $\mathfrak{u}$-$\mathfrak{f}$-radikale Gruppen sind, wobei $\mathfrak{u}$ die triviale Eigenschaft ist, die allen Gruppen zukommt. Anwendung der Generalvoraussetzung und eines Lemmas von R. Baer [7] (Lemma 4.1, Seite 204) zeigt, daß

(′) $\mathfrak{f}'G=G^{(2k)}$ von seinen engelschen Elementen erzeugt wird. Da $2^{2k}+1$ stets größer als 3 ist, und endlich erzeugte k-auflösbare Gruppen nach R. Baer [4] (Zusatz 4, Seite 276) noethersch sind, erzeugen also je 3 Elemente aus G eine noethersche Untergruppe. Dann bilden aber die engelschen Elemente von G nach R. Baer [8] (Lemma 5.1, Seite 28) eine charakteristische Untergruppe von G. Hieraus und aus (′) folgt, daß

(″) die Menge $\mathfrak{e}G$ der engelschen Elemente von G die charakteristische Untergruppe $G^{(2k)}$ enthält.

Genügt $G^{(2k)}$ der Bedingung A, so folgt aus A und (″) nach R. Baer [7] (Satz 3.3, Seite 199) die Hyperzentralität von $G^{(2k)}$.

Genügt $G^{(2k)}$ der Bedingung B, so erzeugen Elementepaare aus $G^{(2k)}$ k-auflösbare Untergruppen, die wegen der Minimalbedingung für

Untergruppen und Hilfssatz 11 endlich sind. Da sie zudem nach ($''$) von ihren engelschen Elementen erzeugt werden, sind sie nach einem bekannten Satz nilpotent. Die Hyperzentralität von $G^{(2k)}$ ergibt sich nun aus der Anwendung eines Satzes von R. Baer [8] (Satz 4.1, Bed. v) und i), Seite 21).

Satz 15. *Ist G eine Gruppe, $\bar{k}$ eine natürliche Zahl, erzeugen je $\bar{k}+2$ Elemente aus G eine (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare Untergruppe, und genügt G einer der folgenden Bedingungen:*

A) *Jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von $_{\bar{k}}G$ hat einen noetherschen Normalteiler $N \neq 1$,*

B) *$_{\bar{k}}G$ genügt der Minimalbedingung für Untergruppen,*

so ist $_{\bar{k}}G$ hyperzentral.

Wie im Beweis zu Satz 14 schließt man die Behauptung aus der Tatsache, daß die Eigenschaft « $_{\bar{k}}F=1$ » für eine Gruppe F durch Relationen in $\bar{k}+1$ Variablen definierbar ist, siehe etwa M. Hall [14] (Definitionen und Theorem, Seite 150).

Für die Voraussetzung, daß G der Minimalbedingung für Untergruppen genügt, steht das Resultat in R. Baer [8] (Satz 5.7, Seite 30).

Satz 16. *Für die k-auflösbare Gruppe U, k beliebig, sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

i) *U ist lokal hyperzentral*

ii) *U ist hyperzentral*

iii) *Maximale Untergruppen W jeder endlich erzeugten Untergruppe E von U sind normal in E*

iv) *Für je zwei Elemente x und y aus U gilt $[x^{(n)}, y]=1$ für ein passendes $n_{x,y}$.*

Beweis. Aus i) folgt ii):

Sei die Gruppe U lokal hyperzentral. Ein epimorphes Bild $H \neq 1$ von U hat dann einen k-abelschen Normalteiler $N \neq 1$, sodaß die Automorphismengruppe $H/\mathfrak{C}N$, $\mathfrak{C}N$ der Zentralisator von N in U, nach R. Baer [3] (Satz 2, Seite 171) noethersch ist. Es sei $H=F\mathfrak{C}N$, F endlich erzeugt und N in F enthalten. F ist nach Voraussetzung hyperzentral und N ein Normalteiler von F. Nach einem bekannten Satz ist der

Durchschnitt $Z = N \cap \mathfrak{Z}F$ verschieden von 1. Z wird von F und $\mathfrak{C}N$ zentralisiert, also von H. U ist folglich hyperzentral.

Aus ii) folgt iii):

Sei U hyperzentral. Sei $E \subseteq U$ endlich erzeugt und W eine maximale Untergruppe von E. N sei ein maximaler Normalteiler von E, der ganz in W liegt. Wegen der Hyperzentralität von E ist $M/N = \mathfrak{Z}(E/N) \neq 1$ und folglich $WM \supset W$, denn N ist maximal. Dann enthält der Normalisator $\mathfrak{n}W$ von W in E die Gruppe MW, also $\mathfrak{n}W = E$, das heißt W ist ein Normalteiler von E. (Siehe auch A. G. Kurosh [20] (§ 63, Seite 219).

Aus iii) folgt i):

Ist E eine endlich erzeugbare Untergruppe von U, so ist E noethersch nach R. Baer [4] (Zusatz 4, Seite 276) wegen der k-Auflösbarkeit von E. E genügt den Bedingungen von K. Hirsch [16] (Theorem 3.33, Seite 194) und ist deshalb nilpotent, also auch hyperzentral. Damit ist die lokale Hyperzentralität von U bewiesen.

Aus i) folgt iv):

Sein x und y aus U. $\{x, y\}$ ist endlich erzeugt, demzufolge hyperzentral, noethersch und nilpotent endlicher Klasse. Für ein gewisses n ist dann $[x^{(n)}, y] = 1$.

Aus iv) folgt i):

Sei E eine endlich erzeugbare Untergruppe von U. E ist k-auflösbar, dann auch noethersch und auflösbar endlicher Stufe. Anwendung von K. W. Gruenberg [13] (Theorem 1, Seite 377) ergibt die Behauptung.

§ 5. Lokale k-Auflösbarkeit.

Für eine k-auflösbare Gruppe (k beliebig) sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) *G ist endlich erzeugt*

ii) *G genügt der Maximalbedingung für Normalteiler*

iii) *G ist noethersch.*

Ist die k-auflösbare Gruppe G noethersch, so genügt G der Maximalbedingung für Untergruppen. Dann genügt G aber auch der Maximalbedingung für Normalteiler, aus iii) folgt ii).

Aus der k-Auflösbarkeit und Maximalbedingung für Normalteiler folgt die Existenz einer aufsteigenden Reihe von Normalteilern von G mit endlich erzeugbaren und abelschen Faktoren, die nach endlich vielen Schritten abbricht. Ein Repräsentantensystem in G der endlich vielen Erzeugenden der einzelnen Faktoren ist endlich und erzeugt G, also ii) zieht i) nach sich.

Als k-auflösbare Gruppe besitzt jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen endlich erzeugbaren abelschen Normalteiler N, $N \neq 1$. Anwendung eines Satzes von R. Baer [4] (Zusatz 4, Seite 276) zeigt, daß aus der endlichen Erzeugbarkeit von G folgt, daß G eine noethersche Gruppe ist, das heißt, aus i) folgt iii).

Es ist interessant, daß man die Äquivalenz dieser Bedingungen schon zeigen kann, wenn G eine lokal k-auflösbare Gruppe mit endlichem k ist.

Gibt es in G keine aufsteigende Reihe von Normalteilern mit endlich erzeugbaren abelschen Faktoren, deren Erzeugendenränge sämtlich unter einem endlichen festen k liegen, so wird dieser Satz falsch, wie ein Beispiel von McLain [21] (Seite 102) zeigt.

SATZ 17. *Sei G eine lokal k-auflösbare Gruppe für ein festes endliches k. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

i) *G ist endlich erzeugbar*

ii) *G genügt der Maximalbedingung für Normalteiler*

iii) *G ist noethersch.*

BEWEIS. Es ist jetzt nur zu zeigen, daß aus der lokalen k-Auflösbarkeit (k endlich) und der Maximalbedingung für Normalteiler die endliche Erzeugbarkeit von G folgt.

Dazu wird die folgende Definition benötigt:

DEFINITION. Eine Gruppe G heißt *n-stufig-polynilpotent*, wenn es eine Kette von n Normalteilern N_i von G gibt,

$$1 = N_n \subseteq N_{n-1} \subseteq \dots \subseteq N_0 = G,$$

derart, daß die Faktoren N_i/N_{i-1} nilpotente Gruppen sind.

Ist E eine endlich erzeugte Untergruppe der lokal k-auflösbaren Gruppe G, so ist

1. E k-auflösbar,
2. E ist noethersch nach R. Baer [4] (Zusatz 4, Seite 276),
3. $E^{(2k)}$ ist hyperzentral nach Satz 9 und folglich nilpotent,
4. $E^{(i-1)}/E^{(i)}$ sind abelsche, also auch nilpotente Gruppen, $i=1, ..., 2k$.

Daraus folgt, daß für $N_i=E^{(i)}$, $i=0, ..., 2k$, und $N_{2k+1}=1$, E eine $(2k+1)$-stufig-polynilpotente Gruppe ist.

G ist dann lokal $(2k+1)$-stufig-polynilpotent mit endlichem und festem k, und G genügt der Maximalbedingung für Normalteiler. McLain [21] (Theorem 1, Seite 101) hat bewiesen, daß aus diesen Voraussetzungen die Auflösbarkeit von G folgt. Aus der Maximalbedingung für Normalteiler folgt die Auflösbarkeit endlicher Stufe und nach P. Hall [15] die endliche Erzeugbarkeit von G. Damit ist der Satz bewiesen.

Mit einer stärkeren Voraussetzung kann man die k-Auflösbarkeit (k beliebig) und endliche Erzeugbarkeit einer Gruppe G mit Maximalbedingung für Normalteiler zeigen.

SATZ 18. *Sei G eine Gruppe, die der Maximalbedingung für Normalteiler genügt, und in der abzählbar viele Elemente eine auflösbare Untergruppe erzeugen. Dann ist G auflösbar endlicher Stufe und endlich erzeugt.*

BEWEIS. Für jedes n ist die Faktorgruppe $G/G^{(n)}$ eine auflösbare Gruppe mit Maximalbedingung für Normalteiler, nach P. Hall [15] also endlich erzeugt. Sei E_n ein Repräsentantensystem eines endlichen Erzeugendensystems von $G/G^{(n)}$ in $S=G/D$, wobei D der Durchschnitt aller Kommutatoruntergruppen $G^{(n)}$ mit endlichem n ist: $D=\bigcap G^{(n)}$. E_n ist endlich und somit ist $E=\bigcup E_n$ eine abzählbare Untermenge von S. Da sich die Voraussetzung auf epimorphe Bilder vererbt, ist $F=\{E\}$ auflösbar. Weiter ist $\bigcap S^{(n)}=1$ und $S=FS^{(n)}$ für jedes natürliche n. Man zeigt jetzt, daß S auflösbar ist. F besitzt nach Voraussetzung einen abelschen Normalteiler N, $N\neq 1$. Für jedes n ist dann $NS^{(n)}$ ein Normalteiler von $FS^{(n)}=S$. Dann ist aber auch $M=\bigcap NS^{(n)}$ ein Normalteiler von S und N ist in M enthalten. M liegt für jedes n in $NS^{(n)}$, also liegt M' für jedes n in $(NS^{(n)})'$. Seien as und bt zwei Elemente aus $NS^{(n)}$, das heißt a, b aus N und s, t aus $S^{(n)}$. Es gilt dann

$$[as, bt]=[a, t]^s[a, b]^{ts}[s, t][s, b]^t;$$

aber es ist

$$[a, t]^s = ((t^{-1})^a t)^s \text{ in } S^{(n)}, \ [a, b]^{ts} = 1,$$

$$[s, t] \text{ in } S^{(n+1)} \text{ und } [s, b]^t \text{ in } S^{(n)}.$$

Folglich liegt $(NS^{(n)})'$ in $S^{(n)}$: $M' \subseteq (NS^{(n)})' \subseteq S^{(n)}$ für jedes n. Dann liegt M' in $\bigcap S^{(n)} = 1$, also ist M ein abelscher Normalteiler von S.

So fährt man fort und erhält eine aufsteigende Reihe von Normalteilern von S mit abelschen Faktoren, die wegen der Maximalbedingung für Normalteiler nach endlich vielen Schritten abbrechen muß. S ist also auflösbar endlicher Stufe, $S^{(m)} = 1$, beziehungsweise $G^{(m)} \subseteq D = \bigcap G^{(n)}$. Insbesondere ist $G^{(m)} \subseteq G^{(m+1)} \subseteq G^{(m)}$, das heißt $G^{(m)} = G^{(m+1)}$.

Angenommen $G^{(m)} \neq 1$.

Aus den Sätzen von P. Hall [15] ergibt sich, daß $G/G^{(m)}$ endlich erzeugt ist. Sei K maximal unter den echt in $G^{(m)}$ enthaltenen Normalteilern von G; dann ist $G^{(m)}/K$ nach Hilfssatz 12 endlich erzeugt. Also ist G/K endlich erzeugt und daher nach Voraussetzung auflösbar. Dann ist aber $G^{(m)}/K$ abelsch, was der Annahme $G^{(m)} = G^{(m+1)}$ widerspricht. Also gibt es kein solches K, d.h. $G^{(m)} = 1$.

Die endliche Erzeugbarkeit von G ergibt sich aus den Sätzen von P. Hall [15].

KOROLLAR 19. *Erzeugen abzählbar viele Elemente der Gruppe G eine k-auflösbare Untergruppe von G (k beliebig).* dann sind äquivalent:

i) *G ist endlich erzeugbar*

ii) *G genügt der Maximalbedingung für Normalteiler*

iii) *G ist noethersch.*

Ein dem Satz 17 ähnliches Resultat erhält man für die Minimalbedingung für Untergruppen bzw. für Normalteiler:

SATZ 20. *Sei G eine lokal k-auflösbare Gruppe, k endlich, oder sei G $\aleph_0$-auflösbar. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

i) *G genügt der Minimalbedingung für Normalteiler*

ii) *G genügt der Minimalbedingung für Untergruppen*

iii) *G ist extremal, d.h., G ist eine endliche Erweiterung einer vollständigen abelschen, der Minimalbedingung für Untergruppen genügenden Gruppe*

iv) *G ist eine endliche Erweiterung eines direkten Produktes einer endlichen Zahl von Gruppen vom Typ* (p^∞) (*oder G ist eine Černikov-Gruppe*).

Die Äquivalenz der Bedingungen i) und ii) folgert man aus einem Ergebnis von D. H. McLain [21] (Theorem 3, Seite 105) für den Fall der lokalen k-Auflösbarkeit von G. Ist G $\aleph_0$-auflösbar, so ist diese Äquivalenz in einem Satz von B. S. Čarin [11] (Theorem 3, Seite 305) enthalten. Nach S. N. Černikov [12] (Folgerung 2.2, Seite 22) folgt die Äquivalenz von ii) und iii) schon für Gruppen, die lokal auflösbar endlicher Stufe sind. Lokal k-auflösbare und ebenso $\aleph_0$-auflösbare Gruppen sind aber lokal noethersch und demzufolge lokal auflösbar endlicher Stufe. Für die Folgerung von iv) aus iii) und umgekehrt siehe etwa A. G. Kurosh [20] (§ 53, Seite 156).

FOLGERUNG *A*. *Ist G eine lokal k-auflösbare Gruppe, k endlich, und genügt G einer der Bedingungen* i) - iv) *aus Satz* 20, *so ist G auflösbar endlicher Stufe, k-auflösbar und lokal endlich.*

Beweis der k-Auflösbarkeit: G ist nach den Voraussetzungen eine Černikov-Gruppe und lokal noethersch und lokal $Q(k)$, d.h. jeder Hauptfaktor einer endlich erzeugten Untergruppe ist abelsch, periodisch und von endlichem Rang k. Nach McLain [21] (Lemma 7, Seite 104) genügt G der Bedingung $Q(k)$, sodaß wegen der Minimalbedingung für Normalteiler jedes epimorphe Bild einen endlichen abelschen Normalteiler enthält. Daher folgt aus der lokalen k-Auflösbarkeit die k-Auflösbarkeit für die ganze Gruppe G.

FOLGERUNG B. *Ist G eine* $\aleph_0$-*auflösbare Gruppe, die einer der Bedingungen* i) - iv) *aus Satz* 20 *genügt, so ist G auflösbar endlicher Stufe, k-auflösbar für ein endliches k und lokal endlich.*

Beweis der k-Auflösbarkeit, k endlich: G ist eine Černikov-Gruppe und nach McLain [21] (Theorem 3, Seite 105) lokal $Q(k)$ für ein endliches k. Wegen der Minimalbedingung für Untergruppen ist eine endlich erzeugte Untergruppe k-auflösbar, G also lokal k-auflösbar. Wie oben oder direkt aus der $\aleph_0$-Auflösbarkeit folgt die k-Auflösbarkeit.

Gruppen von endlichem abelschen Untergruppenrang.

BEZEICHNUNGEN. Die zur Eigenschaft « k-auflösbar » gehörige Radikalfunktion $\mathfrak{Y}$ werde mit $\mathfrak{Y}_k$ bezeichnet, die zur (nil-$\bar{k}$)-k-Auflösbarkeit gehörige mit $\mathfrak{Y}_{\bar{k},k}$.

HILSSATZ 21. *Ist B eine lokal k-auflösbare Gruppe, $B^{(n)}\neq 1$ und hyperzentral, $\mathfrak{z}B^{(n)}$ torsionsfrei und von endlichem Rang, und ist $\mathfrak{Y}_kB'\supseteq B^{(n)}$, dann ist auch $\mathfrak{Y}_kB\supseteq B^{(n)}$.*

BEWEIS. Sei S die Menge aller Normalteiler A von B, die von 1 verschieden und in $\mathfrak{z}B^{(n)}$ enthalten sind und eine torsionsfreie oder triviale Faktorgruppe $\mathfrak{z}B^{(n)}/A$ haben. S ist nicht leer, da $\mathfrak{z}B^{(n)}$ selbst in S liegt. $\mathfrak{z}B^{(n)}$ ist von endlichem Rang, also sind alle Gruppen in der Menge S von endlichem Rang, und folglich existiert unter ihnen ein Normalteiler M von B von minimalem Rang.

Eine Untergruppe A von $\mathfrak{z}B^{(n)}$ heißt *x-zulässig*, x aus B, wenn eine natürliche Zahl m existiert derart, daß m unabhängige Elemente in A existieren, je $m+1$ Elemente abhängig sind, jedes Element aus A in einem endlich erzeugbaren Normalteiler N von $\{B', x\}$ mit torsionsfreier Faktorgruppe A/N liegt, und jedes $A_m=\{a_1, ..., a_m\}$ mit unabhängigen a_i aus A und A/A_m torsionsfrei normal in $\{B', x\}$ ist.

BEHAUPTUNG 1. *Jeder Normalteiler N von B, $N\subseteq\mathfrak{z}B^{(n)}$, enthält eine Untergruppe Z, die x-zulässig ist.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{Y}_kB'\supseteq B^{(n)}$, also enthält B' einen k-abelschen Normalteiler K, der in N enthalten ist. $\{K, x\}$ ist endlich erzeugbar und k-auflösbar, also ist $\{K, x\}$ noethersch nach R. Baer [4] (Zusatz 4, Seite 276). Sei $R=\{K^{\{x\}}\}$. Als Untergruppe von $\{K, x\}$ ist R ein endlich erzeugbarer und als Untergruppe von $\mathfrak{z}B^{(n)}$ ein abelscher Normalteiler von $\{B', x\}$. $\{B', x\}$ induziert in R eine noethersche Automorphismengruppe $\{B', x\}/\mathfrak{C}R$, wobei $\mathfrak{C}R$ der Zentralisator von R in $\{B', x\}$ ist, siehe R. Baer [3] (Satz 2 oder Hauptsatz 3, Seite 171-172). Folglich existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe D mit $\{B' x\}=D\mathfrak{C}R$ und $R\subseteq D$. D ist k-auflösbar und enthält in seinem Normalteiler R einen k-abelschen Normalteiler Z, $Z\neq 1$. Z wird normalisiert von D und zentralisiert von $\mathfrak{C}R$, also ist Z ein k-abelscher Normalteiler von $\{B', x\}$. Z ist aber trivialerweise für ein $m<k+1$ eine x-zulässige Untergruppe von N.

BEHAUPTUNG 2. *Ist A x-zulässig, A^*/A die Torsionsuntergruppe von $\mathfrak{z}B^{(n)}/A$, so ist A^* ebenfalls x-zulässig.*

Beweis. Die Ränge m von A und A^F sind gleich, da schon in A m unabhängige Elemente existerien und $m+1$ Elemente aus A^* abhängig sind, da jeweils gewisse Potenzen von ihnen in A liegen und dort abhängig sind, also auch schon in A^*.

Ist a ein Element aus A^*, so existiert ein n mit a^n in A. In A existiert ein endlich erzeugbarer Normalteiler N mit a^n in N. Die Torsionsuntergruppe D/N von A^*/N ist aber endlich erzeugbar, weiter liegt a in D und D ist normal in $\{B', x\}$, da für ein d aus D/N auch d^y mit y in $\{B', x\}$ ein Torsionselement in D/N ist.

Sei $A^*{}_m=\{a_1, ..., a_m\}$ mit unabhängigen a_i aus A^* und $A^*/A^*{}_m$ torsionsfrei. Es existieren dann natürliche Zahlen n_i derart, daß jedes $a_i^{n_i}$ in A liegt und A/A_m, wobei $A_m=\{a_1^{n_1}, ..., a_m^{n_m}\}$ ist, torsionsfrei ist. Die $a_i^{n_i}$ sind unabhängig, denn sonst wären schon die a_i abhängig gewesen. Folglich ist A_m normal in $\{B', x\}$. Ist y ein Element aus $\{B', x\}$, dann liegt a_i^y in $A^*{}_m$, denn $a_i^{yn_i}=a_i^{n_iy}$ liegt in A_m. $A^*{}_m$ ist ein Normalteiler von $\{B', x\}$.

Sei T die Menge aller von 1 verschiedenen x-zulässigen Untergruppen A von M mit torsionsfreier Faktorgruppe $\mathfrak{Z}B^{(n)}/A$. Nach Behauptung 1 enthält M eine x-zulässige Untergruppe U, und nach Behauptung 2 ist U so erweiterbar, daß $\mathfrak{Z}B^{(n)}/U$ torsionsfrei ist. Also ist die Menge T nicht leer.

Behauptung 3. *Ist A x-zulässig, so ist auch A^B x-zulässig.*

Beweis. Als Untergruppe von $\mathfrak{Z}B^{(n)}$ hat A^B einen endlichen Rang m derart, daß m unabhängige Elemente existieren und $m+1$ Elemente abhängig sind.

Ist d ein Element aus A^B, so ist $d=\prod_{j=1}^{h} a_j^{y_j}$ ein Produkt endlich vieler konjugierter Elemente der a_j aus A mit y_i aus B. Jedes a_j $(j=1, ..., h)$ liegt in einem endlich erzeugbaren Normalteiler A_j von $\{B', x\}$ mit torsionsfreier Faktorgruppe, also liegt auch jedes $a_j^{y_j}$ in einem endlich erzeugbaren Normalteiler $A^*{}_j=A_j^{y_j}$ (denn B/B' ist abelsch) von $\{B', x\}$ mit torsionsfreier Faktorgruppe. Als endliches Produkt liegt nun auch d in einem endlich erzeugbaren Normalteiler von $\{B', x\}$ mit torsionsfreier Faktorgruppe.

Sei $D_m=\{d_1, ..., d_m\}$, $d_1, ..., d_m$ unabhängig und A^B/D_m torsionsfrei. Es ist zu zeigen, daß D_m normal in $\{B', x\}$ ist. Jedes d_i ist in einem endlich erzeugbaren Normalteiler mit torsionsfreier Faktorgruppe enthalten, also auch ganz D_m. Dieser Normalteiler E ist aber wegen des Ranges m schon von $m' \leq m$ Elementen erzeugbar, jedoch existieren m unabhängige Elemente, nämlich $d_1, \dots, d_m$, woraus man $m'=m$ folgert. Das heißt aber, daß D_m normal in $\{B', x\}$ ist.

Die Ränge der Gruppen in der nicht leeren Menge T sind nach oben begrenzt durch den endlichen Rang von $\mathfrak{Z}B^{(n)}$ und also auch durch den von M. So existiert in T eine x-zulässige Untergruppe X von maximalem Rang. Es ist $X \subseteq X^B \subseteq M^B = M$. Nach Behauptung 3 ist X^B ebenfalls x-zulässig und nach Behauptung 2 existiert eine x-zulässige Untergruppe V mit $X^B \subseteq V \subseteq \mathfrak{Z}B^{(n)}$ und $\mathfrak{Z}B^{(n)}/V$ torsionsfrei. Dann ist $M \cap V$ x-zulässig, $\mathfrak{Z}B^{(n)}/(M \cap V)$ torsionsfrei, und folglich liegt $M \cap V$ in der Menge T. Aus $X \subseteq X^B \subseteq M \cap V$ folgert man die Gleichheit der Ränge von $M \cap V$ und X (X war von maximalem Rang in T) und aus der Torsionsfreiheit von $(M \cap V)/X$ weiter die Identität $X = M \cap V$. Wegen $X^B \subseteq M \cap V$ ist die Untergruppe $X = X^B$ also normal in B. Nach Definition der Menge S liegt X in S. M war aber von minimalem Rang und $X \subseteq M$, folglich sind die Ränge gleich: $r(M) = r(X)$. $M/X \subseteq \mathfrak{Z}B^{(n)}/X$ ist wieder torsionsfrei, also ist $X = M$.

Nach dem Bewiesenen ist M $(M \neq 1)$ x-zulässig für alle x aus B, das heißt, jede von m unabhängigen Elementen erzeugte Untergruppe N mit M/N torsionsfrei ist normal in B. Nach einem wiederholt angewendeten Schluß folgert man aus der Existenz eines endlich erzeugbaren abelschen Normalteilers $E \neq 1$ mit Hilfe der Tatsache, daß $B/\mathfrak{C}E$ noethersch ist, und der lokalen k-Auflösbarkeit die Existenz eines k-abelschen Normalteilers $K \neq 1$. Folglich ist $\mathfrak{y}_k B \supseteq B^{(n)}$ und der Hilfssatz ist bewiesen .

Satz 22. *Ist G eine lokal k-auflösbare Gruppe von endlichem abelschen Untergruppenrang (k endlich), so enthält das Radikal $\mathfrak{y}_k G$ die $2k$-te Kommutatoruntergruppe $G^{(2k)}$.*

Beweis. Aus der lokalen k-Auflösbarkeit folgt nach Hilfssatz 12 und Satz 9 die lokale Hyperzentralität von $G^{(2k)}$; und nach Satz 6 ist $G^{(2k)}$ hyperzentral und von endlichem abelschen Rang.

Angenommen, $G^{(2k)}$ läge nicht vollständig in $\mathfrak{y}_k G$, dann wäre $H^{(2k)} \neq 1$ für $H = G/\mathfrak{y}_k G$, und H enthielte keinen k-abelschen Normalteiler ungleich 1 nach Definition des Radikals $\mathfrak{y}_k G$. — Diese Annahme wird im folgenden zum Widerspruch geführt —.

$H^{(2k)}$ ist als epimorphes Bild von $G^{(2k)}$ hyperzentral und von endlichem abelschen Untergruppenrang, insbesondere ist das Zentrum $\mathfrak{z}H^{(2k)} \neq 1$, elementar-abelsche Untergruppen von $\mathfrak{z}H^{(2k)}$ sind endlich, und torsionsfreie Untergruppen von $\mathfrak{z}H^{(2k)}$ haben endlichen Rang.

1. Fall. $\mathfrak{z}H^{(2k)}$ enthält Elemente endlicher Ordnung.

In diesem Fall enthält $\mathfrak{z}H^{(2k)}$ mindestens ein Element b einer Primzahlordnung p, und $\{b^H\} = X$ ist eine elementar-abelsche Untergruppe der in H charakteristischen Untergruppe $\mathfrak{z}H^{(2k)}$. Also ist X ein endlicher abelscher Normalteiler von H. Ist $\mathfrak{C}X$ der Zentralisator von X in H, so ist $\mathfrak{C}X$ normal in H, und $H/\mathfrak{C}X$ ist als Automorphismengruppe von X ebenfalls endlich. Folglich existiert in H eine endlich erzeugte Untergruppe F mit X in F und $H = F\mathfrak{C}X$. Nach Voraussetzung ist F k-auflösbar, und da X normal in F ist, besitzt F nach Lemma 3 einen k-abelschen Normalteiler $K \neq 1$, der in X liegt. K wird also von $\mathfrak{C}X$ zentralisiert und von F normalisiert, ist demzufolge ein k-abelscher Normalteiler von H. Dies ist der gesuchte Widerspruch zu der eingangs gemachten Annahme.

2. Fall. $\mathfrak{z}H^{(2k)}$ ist torsionsfrei.

Als torsionsfreie abelsche Untergruppe der Gruppe $H^{(2k)}$ von endlichem abelschen Untergruppenrang hat $\mathfrak{z}H^{(2k)}$ einen endlichen Rang. Mit Hilfe der vollständingen Induktion läßt sich nun zeigen, daß $\mathfrak{P}_k H \supseteq H^{(2k)}$ ist.

Induktionsverankerung: Sei $B = H^{(2k-1)}$, $n = 1$, dann ist B lokal k-auflösbar, B' ist hyperzentral, $\mathfrak{z}B' = \mathfrak{z}H^{(2k)} \neq 1$ ist torsionsfrei und von endlichem Rang. Anwendung des Hilfssatzes 21 zeigt nunmehr:

$$\mathfrak{P}_k B = \mathfrak{P}_k H^{(2k-1)} \supseteq H^{(2k)}.$$

Induktionsschluß von $m-1$ auf m:

Sei $B = H^{(2k-m)}$, $n = m$, dann ist B lokal k-auflösbar, $B^{(m)} = H^{(2k)}$ ist hyperzentral, $\mathfrak{z}B^{(m)} \neq 1$ ist torsionsfrei und von endlichem Rang. Nach Induktionsannahme ist weiter

$$\mathfrak{P}_k B' = \mathfrak{P}_k H^{(2k-m+1)} \supseteq H^{(2k)}.$$

Der Hilfssatz 21 besagt, daß

$$\mathfrak{Y}_k B = \mathfrak{Y}_k H^{(2k-m)} \supseteq H^{(2k)}$$

gilt.

Für $m=2k$ hat man jetzt schließlich das Ergebnis, daß $\mathfrak{Y}_k H$ die Kommutatorgruppe $H^{(2k)}$ enthält, mit anderen Worten: $H=G/\mathfrak{Y}_k G$ enthält einen k-abelschen Normalteiler K, $K \neq 1$, ein Widerspruch zu der anfangs gemachten Annahme.

Also enthält das Radikal $\mathfrak{Y}_k G$ die $2k$-te Kommutatoruntergruppe $G^{(2k)}$.

KOROLLAR 23. *Jede charakteristische k-auflösbare Untergruppe U der Gruppe G, G von endlichem abelschen Untergruppenrang, liegt in einer maximalen charakteristischen Untergruppe A von G, wobei das Radikal $\mathfrak{Y}_k A$ die 2k-te Kommutatorgruppe $A^{(2k)}$ enthält.*

BEWEIS. Nach dem Maximumprinzip liegt U in einer maximalen charakteristischen lokal k-auflösbaren Untergruppe A von G, und nach Satz 22 ist $\mathfrak{Y}_k A \supseteq A^{(2k)}$.

Ein besseres Resultat als das des Satzes 22 läßt sich für (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare Gruppen ($\bar{k}$ endlich) angeben:

SATZ 24. *Ist G eine Gruppe von endlichem abelschen Untergruppenrang, so ist G dann und nur dann (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar, wenn G lokal (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar ist ($\bar{k}$ endlich).*

BEWEIS. Aus der lokalen (nil-$\bar{k}$)-k-Auflösbarkeit folgt nach Satz 6, daß das $\bar{k}$-te Glied ${}_{\bar{k}}G$ der absteigenden Zentrenkette hyperzentral und von endlichem abelschen Rang ist.

Wie im Beweis zu Satz 22 zeigt man die Existenz eines k-abelschen Normalteilers $N \neq 1$ für jedes epimorphe Bild H von G im Zentrum $\mathfrak{Z}({}_{\bar{k}}H)$. Die in N induzierte Automorphismengruppe ist natürlich nilpotent der Klasse $\bar{k}$. Folglich liegt ${}_{\bar{k}}G$ im Radikal $(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, {}_k)G$. Da $G/{}_{\bar{k}}G$ nilpotent ist, also insbesondere (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar, folgt die (nil-$\bar{k}$)-k-Auflösbarkeit von G.

KOROLLAR 25. *Jede charakteristische (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare Untergruppe der Gruppe G von endlichem abelschen Untergruppenrang ($\bar{k}$ endlich), liegt in einer maximalen charakteristischen (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbaren Untergruppe von G.*

Beweis. Nach dem Maximumprinzip existiert wieder eine maximale charakteristische lokal (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbare Untergruppe von G, die nach Satz 24 (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar ist.

Aus Satz 22 kann man für endliche k noch eine Folgerung ziehen. Ob sie für unendliche k gilt, ist noch offen:

Satz 26. *Die Gruppe G ist dann und nur dann noethersch und k-auflösbar (k endlich), wenn sie lokal k-auflösbar ist und ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar sind.*

Beweis. Sind alle abelschen Untergruppen von G endlich erzeugbar, so ist G insbesondere von endlichem abelschen Untergruppenrang. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{P}_k G \supseteq G^{(2k)}$, also ist G schlechthin auflösbar. Als auflösbare Gruppe mit endlich erzeugbaren abelschen Untergruppen ist G nach R. Baer [3] (Hauptsatz 4, Seite 173) eine noethersche Gruppe, also auch k-auflösbar.

Korollar 27. *Die Gruppe G ist dann und nur dann noethersch und (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar ($\bar{k}$ endlich), wenn sie lokal (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar ist und ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugbar sind.*

Beweis. Wie im Beweis zum letzten Satz folgert man, daß die Gruppe G auflösbar, dann auch noethersch und (nil-$\bar{k}$)-k-auflösbar ist.

§ 6. Produkte k-auflösbarer Normalteiler.

Lemma 28. *Ist A ein k-auflösbarer und B ein hyperzentraler Normalteiler der Gruppe $G=AB$, so ist G k-auflösbar.*

Beweis. Sei H ein epimorphes Bild von G und $H\neq 1$. Es existieren dann Normalteiler L und M von H mit $H=LM$, L k-auflösbar und M hyperzentral. Sei M und somit $\mathfrak{Z}M$ verschieden von 1, denn sonst ist $H=L$ schon k-auflösbar.

Fall 1. $\mathfrak{Z}M \cap L=1$. $\mathfrak{Z}M$ wird zentralisiert von L und somit von ganz $H=LM$. Jede k-abelsche Untergruppe von $\mathfrak{Z}M$ ist dann ein k-abelscher Normalteiler von H.

Fall 2. $\mathfrak{Z}M \cap L=N\neq 1$. N wird zentralisiert von M und normalisiert von der k-auflösbaren Gruppe L, folglich liegt in N ein k-abelscher Normalteiler $K\neq 1$ von L nach Lemma 3. K wird zentralisiert von M, normalisiert von L und ist also ein k-abelscher Normalteiler verschieden von 1 von H.

H hat in allen Fällen einen k-abelschen Normalteiler und somit ist die k-Auflösbarkeit von G bewiesen.

SATZ 29. *Ist A ein k-auflösbarer und B ein h-auflösbarer Normalteiler der Gruppe $G=AB$, und sind k und h endlich, so ist die Gruppe G $\aleph_0$-auflösbar.*

BEWEIS. Nach Satz 9 sind die Kommutatoruntergruppen $A^{(2k)}$ und $B^{(2h)}$ hyperzentral. Als charakteristische Untergruppen der Normalteiler A bzw. B sind $A^{(2k)}$ und $B^{(2h)}$ Normalteiler von G, und somit ist $C=A^{(2k)}B^{(2h)}$ ein hyperzentraler Normalteiler von G. Man sieht weiterhin ein, daß die Faktorgruppe G/C auflösbar endlicher Stufe ist.

Sei $H=G/K\neq 1$ ein epimorphes Bild der Gruppe G. H ist darstellbar als Produkt eines k-auflösbaren Normalteilers V und eines h-auflösbaren Normalteilers W von H : $H=VW$.

Ist $R=CK/K\neq 1$, so ist R hyperzentral und $\mathfrak{Z}R\neq 1$ ein abelscher Normalteiler von H. Nach Lemma 28 sind $L=VR$ und $M=WR$ k- bzw. h-auflösbare Normalteiler von $H=LM$. Der Durchschnitt $L\cap M$ enthält einen abelschen Normalteiler $D=\mathfrak{Z}R\neq 1$, in dem H eine auflösbare Automorphismengruppe endlicher Stufe induziert, denn H/R ist auflösbar endlicher Stufe.

Ist $R=CK/K=1$, so ist H selbst auflösbar endlicher Stufe: $H^{(n)}=1$, $H^{(n-1)}\neq 1$. Dann sind wieder $L=VH^{(n-1)}$ und $M=WH^{(n-1)}$ k- bzw. h-auflösbar, und der Durchschnitt $L\cap M$ enthält wieder einen abelschen Normalteiler $D\neq 1$.

In jedem Fall ist also D nicht-trivial, abelsch, $D\subseteq L\cap M$, $H=LM$, und H induziert in D eine auflösbare Automorphismengruppe Z endlicher Stufe m.

L enthält nach Lemma 3 einen k-abelschen Normalteiler $N\neq 1$, der in dem Normalteiler D enthalten ist. Ist P der normale Abschluß von N unter H, so gilt

$$P=\{N^H\}=\{N^{LM}\}=\{N^M\}\subseteq D\subseteq L\cap M,$$

und P ist ein abelscher Normalteiler von H. Induziert M die Automorphismengruppe Y in P, so ist $P = \prod_{y \in Y} N^y$. X sei die von L in D induzierte Automorphismengruppe.

Da $Z^{(m-1)}$ abelsch ist, sieht man leicht ein, daß jedes N^y mit y aus $Y \cap Z^{(m-1)}$ invariant unter $X \cap Z^{(m-1)}$ ist, denn für x aus $X \cap Z^{(m-1)}$ gilt: $N^{yx} = N^{xy} = N^y$.

Mit Hilfe vollständiger Induktion zeigt man, daß jedes N^y mit y aus Y normal in L ist, denn Z ist auflösbar endlicher Stufe:

Annahme. Jedes N^y mit y aus $Y \cap Z^{(m-n)}$ ist invariant unter $X \cap Z^{(m-n)}$.

Sei y aus $Y \cap Z^{(m-n-1)}$ und x aus $X \cap Z^{(m-n-1)}$. Es ist dann $N^{yx} = N^{[y^{-1}, x^{-1}]xy}$, $[y^{-1}, x^{-1}]$ liegt in X und in $Z^{(m-n)}$, also ist $N^{[y, x]} = N$ und $N^{yx} = N^{xy} = N^y$.

Jedes Element aus P liegt in einem Produkt endlich vieler N^{y_i}, liegt also in einem endlich erzeugten abelschen Normalteiler von L. Als Normalteiler von M enthält P einen h-abelschen Normalteiler $Q \neq 1$. Die h Erzeugenden liegen also in einem endlich erzeugbaren Normalteiler $T = \prod_{j=1}^{t} N^{y_j}$ von L, das heißt $S = \prod_{x \in X} Q^x \subseteq T$, und S ist endlich erzeugbar und abelsch. Wie oben zeigt man, daß jedes Q^x normal in M ist. Folglich ist S normal in M und L und somit in H. Damit ist der Satz bewiesen.

Durch mehrmalige Anwendung des Satzes ergibt sich das folgende Korollar:

Korollar 30. *Sind A_i k_i-auflösbare Normalteiler von G für $i = 1, \ldots, n$ und $G = \prod_{i=1}^{n} A_i$, und sind alle k_i endlich, so ist G $\aleph_0$-auflösbar.*

Da sich die Sätze 22 und 29 noch allgemeiner aufstellen lassen, leiten wir den Satz ab:

Satz 31. *Ist G das Produkt der k_i-auflösbaren Normalteiler A_i, i aus der Indexmenge I, k_i beliebig, ist eine Kommutatorgruppe $G^{(n)}$ hyperzentral und G von endlichem abelschen Untergruppenrang, so enthält das Radikal $\mathfrak{P}\aleph_0(G)$ die Kommutatorgruppe $G^{(n)}$.*

Beweis. Endlich viele Elemente liegen in einem Produkt P endlich vieler A_i. Mit der Methode des Beweises zu Satz 29 zeigt, man, daß P $\aleph_0$-auflösbar ist, indem man die Hyperzentralität von $P^{(n)}$ ausnutzt. G ist folglich lokal $\aleph_0$-auflösbar.

Satz 22 gilt nur für lokal k-auflösbare Gruppen mit endlichem k, aber der Beweis führt zu einem gleichem Ergebnis für beliebiges k, wenn man die Hyperzentralität von $G^{(n)}$ in die Voraussetzung aufnimmt. Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

LITERATUR

[1] BAER, R.: *The hypercenter of a group*, Acta Math. 89 (1953), 165-208.

[2] BAER, R.: *Supersoluble groups*, Proc. Am. M. Soc. 6 (1955), 16-32.

[3] BAER, R.: *Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung*, Math. Annalen 129 (1955), 139-173.

[4] BAER, R.: *Noethersche Gruppen*, Math. Zeitschrift 66 (1956), 269-288.

[5] BAER, R.: *Überauflösbare Gruppen*, Abh. Math. Seminar Hamburg 23 (1959), 11-28.

[6] BAER, R.: *Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften*, Math. Zeitschrift 79 (1962), 344-363.

[7] BAER, R.: *Gruppentheoretische Eigenschaften*, Math. Annalen 149 (1963), 181-210.

[8] BAER, R.: *Gruppen mit Minimalbedingung*, Math. Annalen 150 (1963), 1-44.

[9] BAER, R.: *Local and global Hypercentrality and Supersolubility*, Indag. Math. 28, No. 2 (1966), 93-126.

[10] ČARIN, B. C.: *Bemerkung über die Minimalbedingung für Untergruppen*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 66 (1949), 575-576.

[11] ČARIN, B. C.: *Über Gruppen mit einer aufsteigenden auflösbaren Reihe*, Mat. Sbornik 41 (1957), 297-316.

[12] ČERNIKOV, S. N.: *Unendliche auflösbare Gruppen, Theorie der unendlichen speziellen Gruppen*, Mat. Sbornik 7 (1940), 35-64, 539-548; deutsch: *Endlichkeitsbedingungen in der Gruppentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.

[13] GRUENBERG, K. W.: *Two Theorems on Engel Groups*, Proc. Cambr. Ph. Soc. 49 (1953), 377-380.

[14] HALL, M.: *The Theory of groups*, The Macmillan Company, New York 1959.

[15] HALL, P.: *Finiteness conditions in soluble groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 4 (1954), 419-436.

[16] HIRSCH, K. A.: *On infinite soluble groups III*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 49 (1946), 184-194.

[17] HUPPERT, B.: *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Zeitschrift 60 (1954), 409-434.

[18] HUPPERT, B.: *Lineare auflösbare Gruppen*, Math. Zeitschrift 67 (1957), 479-518.

[19] ITÔ, N.: *Faktorisierung endlicher auflösbarer Gruppen*, Math. Zeitschrift 74 (1960), 392-413.

[20] KUROSH, A.: *The Theory of groups*, Second edition, Chelsea Publ. Co., New York 1956.

[21] MCLAIN, D. H.: *Finiteness conditions in locally soluble groups*, Journ. Lond. Math. Soc. 34 (1959), 101-107.

[22] ORE, O.: *Contributions to the theory of groups of finite order*, Duke Math. Journ. 5 (1939), 431-460.

[23] WENDT, E.: *Über eine specielle Classe von Gruppen*, Math. Annalen 55 (1902), 479-492.

[24] ZAPPA, G.: *Sui gruppi di Hirsch supersolubili*, Rend. del Sem. Mat. Padova 12 (1941), 1-11, 62-80.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 giugno 1969.